ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/rendiconti-classe-scienze-fisiche-matematiche-naturali_1921_30_part-2

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota IV del Socio CARLO SOMIGLIANA (1).

La costante k ha le dimensioni di una lunghezza, ed è un parametro geometrico che determina la forma del profilo.

Come nel caso precedente, avremo una limitazione nei valori di N nel fatto che il punto in cui si annulla il denominatore nella (20), $6Ny + M = 0$, non può cadere nell'intervallo da 0 ad L.

La curva rappresentata dalla (20) per $M > L$ è composta di un'ovale simmetrica rispetto all'asse y, e da un ramo indefinito passante pel punto $y = M$. Il profilo della sezione è in questo caso rappresentato dalla mezza-ovale, che incontra perciò ortogonalmente l'asse della sezione, come nel caso della mezza ellisse.

Se scriviamo l'equazione (17) nella forma

$$v = \frac{1}{2} H k \varphi(y)$$

l'espressione della profondità (20) si può scrivere

$$z^2 = \frac{\varphi(y)}{\psi(y)} \quad \text{ove} \quad \psi(y) = \frac{1}{N} + \frac{6y}{LM}.$$

Quindi mentre il massimo della velocità superficiale è determinato dall'equazione $\varphi'(y) = 0$, il massimo della profondità è dato dall'equazione

$$\varphi'(y)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi'(y) = 0$$

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

e quindi non coincide col primo, cioè la massima profondità non corrisponde al punto della sezione in cui è massima la velocità superficiale. Questa particolarità è indicata nelle figg. 3, 4, 5, come ora vedremo.

Nel caso in cui $M = L$, e quindi $\alpha = 1:3$, la curva della velocità superficiale nell'estremo L è tangente alla linea della sezione, riproducendo una particolarità che spesso si presenta nelle curve d'osservazione. Nella fig. 3 è rappresentata una curva di velocità per $L = M = 10$; in essa naturalmente l'ordinata è determinata all'infuori di un fattore che dipende dall'unità di tempo fissata, ossia dal valore del prodotto $H k$ che è l'inversa di un tempo. La relazione (19) diventa in questo caso una relazione fra N e k e precisamente

$$N = \frac{5k}{5 - k}$$

per cui il paramento k, che è una lunghezza, non può assumere un valore maggiore od eguale a 5.

Le curve delle figure 4, 5, dànno il profilo in corrispondenza ai valori $k = 2$ e $k = 4$, e le linee tratteggiate verticali dànno la posizione delle massime ordinate. I valori di z in corrispondenza ai valori interi di y per $k = 1, 2, 3, 4$ sono rappresentati nella seguente tabella:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 1$	0,0	0,97	1,17	1,24	1,17	1,06	0,86	0,71	0,50	0,20	0,0
$k = 2$	0,0	1,50	1,74	1.75	1,63	1,44	1,20	0 93	0,64	0,32	0,0
$k = 3$	0,0	2,04	2,24	2,16	1,96	1,71	1,39	1,07	0.72	0,36	0,0
$k = 4$	0,0	2,71	2,73	2,52	2,23	1,89	1,52	1,15	0,77	0,39	0,0

V.

Profili di 4° ordine.

Supponiamo che la curva della velocità sia rappresentata da una curva di 4° ordine, che sia simmetrica, cioè abbia l'ordinata massima nel punto di mezzo della sezione. Preso questo punto come origine sarà

$$\varphi(y) = A_0 + A_1 y^2 + A_2 y^4$$

e se L è la semi-larghezza, M un'altra costante che dovremo supporre non inferiore ad L, potremo anche porre

$$(23) \qquad v = \varphi(y) = \frac{1}{2} H k^2 \left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{M^2}\right).$$

Il massimo di velocità sarà

$$v_M = \frac{1}{2} H k^2$$

e col procedimento solito avremo per l'espressione della velocità

$$(24) \quad u = \frac{1}{2} H k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} \right) y^2 - \frac{z^2}{N^2} + \frac{1}{L^2 M^2} (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) \right\}$$

colla condizione

$$(25) \quad \frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{k^2}$$

che determina la costante N quando sia nota k, che è una lunghezza, come L , M , N .

L'equazione del profilo assume la forma

$$(26) \quad \frac{z^4}{L^2 M^2} - \left(\frac{1}{N^2} + \frac{6 y^2}{L^2 M^2} \right) z^2 + \frac{y^4}{L^2 M^2} - \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} \right) y^2 + 1 = 0$$

e perciò la determinazione della profondità z si riduce alla semplice risoluzione di un'equazione biquadratica

$$z^4 - F(y^2) z^2 + G(y^2) = 0$$

dove

$$F(y^2) = 6 y^2 + \frac{L^2 M^2}{N^2} \qquad G(y^2) = (y^2 - L^2)(y^2 - M^2)$$

ed è quindi anche praticamente assai semplice.

La curva rappresentata dalla (23) incontra l'asse della sezione nei punti $y = \pm L$, $y = \pm M$; mentre l'ordinata è positiva fra $-L$ e $+L$, e dà luogo ad un ramo che è concavo verso l'asse stesso e può effettivamente prestarsi alla rappresentazione delle curve di osservazione. Oltre alla velocità massima, abbiamo in questo caso una seconda costante M, che potrà essere determinata dal valore della velocità in un altro punto, o dall'angolo sotto cui la curva incontra l'asse.

Quando $M = L$, quest'angolo si annulla, la curva negli estremi è tangente all'asse, riproducendo una particolarità che effettivamente in qualche caso si osserva (v. fig. 6).

Per la determinazione della profondità possono utilmente usarsi anche coordinate polari. Posto

$$y = \varrho \cos \theta \qquad z = \varrho \operatorname{sen} \theta \qquad \varrho = \alpha L$$

la equazione (16) diviene

$$\alpha^4 \cos 4\theta - \left[\left(1 + \frac{M^2}{L^2} - \frac{M^2}{N^2}\right)\cos^2\theta + \frac{M^2}{N^2}\right]\alpha^2 + \frac{M^2}{L^2} = 0$$

nel caso $L = M$

$$\alpha^4 \cos 4\theta - \left[\left(2 - \frac{L^2}{N^2}\right)\cos^2\theta + \frac{L^2}{N^2}\right]\alpha^2 + 1 = 0 .$$

Se si pone

$$L = M = 10 \qquad N = 5$$

si trova $k^2 = 50 : 3$ e l'equazione del profilo diviene

$$\alpha^4 \cos 4\theta - 2(1 + \operatorname{sen}^2\theta)\,\alpha^2 + 1 = 0 .$$

Nella fig. 7 si è disegnata questa curva che riproduce nelle apparenze una

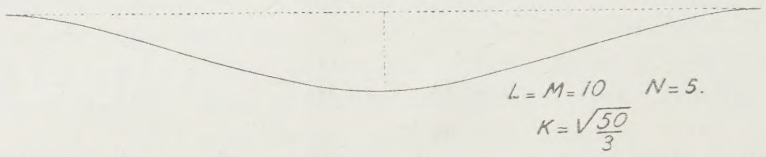


Fig. 6 (Curva della velocità).

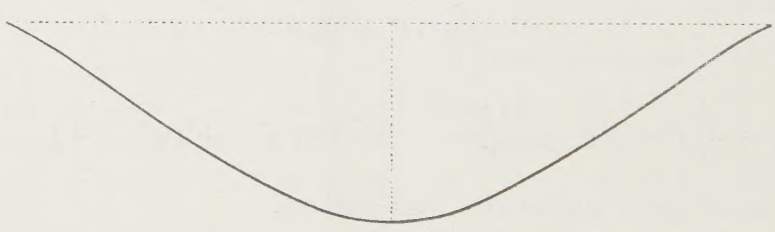


Fig. 7 (Profilo).

delle ordinarie configurazioni di un fondo di valle. I valori che più facilmente si deducono per α dalla equazione precedente sono

per $\theta = 0$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$.

$\alpha^2 = 1$, $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 1}$, $\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 1}$, $2 - \sqrt{3}$.

I metodi che abbiamo considerato ed i modelli speciali costruiti possono in molti casi essere sufficienti per una rappresentazione del profilo dal punto di vista della forma. La difficoltà che si presenta per l'esattezza numerica dipende dalla ancora incompleta conoscenza del coefficiente d'attrito che si

ripercuote nel parametro geometrico k. Possiamo anche dire che non è possibile per ora affermare dentro quali limiti nella realtà del fenomeno questo coefficiente si possa considerare come costante in modo assoluto.

Negli studî della *Società elvetica di Scienze naturali* sul ghiacciaio del Rodano si è verificata la fortunata circostanza che il ritiro del ghiacciaio ha messo a nudo dei profili per i quali in precedenza era stata determinata la velocità superficiale durante un certo periodo di anni. Valendoci di questi dati, e delle rappresentazioni che abbiamo studiato, ci proponiamo di ottenere delle nuove determinazioni del coefficiente d'attrito, e discutere nello stesso tempo della precisione che si può raggiungere coll'applicazione dei metodi proposti per la determinazione della profondità dei ghiacciai.

Fisica. — *Azione di un campo magnetico sul flusso di calore.* Nota del Socio O. M. Corbino [1].

La teoria elettronica di Lorentz sulla conducibilità dei metalli per il calore e per l'elettricità è stata estesa da R. Gans [2] per dedurne l'effetto dovuto all'azione di un campo magnetico e quindi la spiegazione dei fenomeni galvano e termomagnetici. Già il Gans applicò le sue formole al calcolo dell'effetto Hall, isotermo o adiabatico, e dell'effetto Ettingshausen; mentre il Koenisberger [3] più tardi ne deduceva la teoria dell'effetto Nernst e dell'effetto Righi. La corrispondenza coi fatti sperimentali è in generale malsicura; e in qualche caso, precisamente per l'effetto Ettingshausen, non si ha accordo con l'esperienza neanche per il segno del fenomeno. Una particolare semplicità acquistano le formole del Gans quando siano applicate a un disco circolare, riscaldato al centro, poichè vengono in tal caso a mancare il gradiente elettrico e il gradiente termico nel senso circolare. Per un piccolissimo quadrangolo del disco, compreso fra due raggi e due archi di cerchio vicini, identificando la direzione del raggio con l'asse delle ascisse x e quella dell'arco con la direzione dell'asse y si potrà perciò porre nelle formole di Gans, per l'accelerazione elettrica Y_1 nel senso y,

$$Y_1 = 0 ,$$

e porre inoltre eguali a zero tutte le derivate di tipo $\frac{\partial}{\partial y}$.

La funzione $f(\xi , \eta , \zeta)$ che denota la densità elettronica nel campo infinitesimo di velocità comprese fra ξ e $\xi + d\xi$; η e $\eta + d\eta$; ζ e $\zeta + d\zeta$,

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

(2) R. Gans, Ann. d. Phys. *20*, 293, a. 1906.

(3) Koenisberger, Phys. Zeitschr., p. 232, a. 1913; Id. Ann. d. Phys. *46*, 446; *47*, 566, a. 1915.

assume perciò la forma seguente, deducibile dalle formole (21) e (19) di Gans:

$$(1) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-hr^2} + \xi F - Kl \frac{\eta}{r} F$$

dove il primo termine dà la distribuzione normale maxwelliana, e la funzione F è data da

$$F = \frac{F_{10}}{1 + \frac{K^2 l^2}{r^2}} = \frac{1}{1 + \frac{K^2 l^2}{r^2}} \frac{l}{r} e^{-hr^2} \left(2hAX_1 - \frac{\partial A}{\partial x} + r^2 A \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

mentre si ha

$$K = \frac{e}{m} H$$

dove e misura la carica elettrica dell'elettrone, m la sua massa ed H il campo magnetico.

Analogamente le formole finali (43′) e (44′) che dànno i flussi di corrente e di calore nel senso circolare cioè j_y e W_y, nella ipotesi di $E_y = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, e di $j_x = 0$, cioè di un disco riscaldato al centro ed elettricamente isolato, divengono, con delle facili trasformazioni,

$$j_y = - \frac{w}{2} \sigma_0 \sqrt{\pi} \frac{\alpha}{3e} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1 + w^2}{1 - w^2}$$

$$W_y = - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T \frac{w \sigma_0}{2} \sqrt{\pi} \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{1 + w^2}{1 - w^2} - 2 \right)$$

dove

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_0 R_0 H$$

designando R_0 la costante limite dell'effetto Hall per campi debolissimi.

Come si vede da queste formole, al gradiente termico radiale $\frac{\partial T}{\partial x}$ corrisponde un sistema di correnti elettriche circolari, di densità j_y, e un flusso circolare di calore di intensità W_y. Essendo w una grandezza molto minore dell'unità, si riconosce dalle formole precedenti che j_y e W_y sono del medesimo segno, e poichè gli elettroni fluiscono in senso opposto alla corrente elettrica si ha questo risultato interessante:

Per effetto del campo magnetico attraverso a un semipiano radiale passano nei due sensi elettroni in numero diseguale, ciò che equivale al passaggio di una corrente elettrica; ma quelli che passano nel senso del minor numero trasportano globalmente, nonostante siano meno numerosi, una quan-

tità di energia cinetica maggiore. Si ha pertanto un sistema di correnti circolari, come ho trovato nella mia esperienza termomagnetica; ma insieme un flusso circolare di energia cinetica in senso opposto a quello del flusso elettronico. Considerando perciò uno di quei semipiani, poichè in un verso passa un numero maggiore di elettroni che nell'altro, ma quelli meno numerosi che passano in questo secondo senso portano una forza viva maggiore dei primi, che avverrà delle quantità di moto con le quali gli elettroni urtano nei due sensi contro gli atomi metallici che incontrano in quel piano? Solo se queste due quantità di moto sono diseguali potrà aversi un trascinamento meccanico della materia del metallo; trascinamento che appunto per tale causa ha luogo nella ruota di Barlow, quando cioè il flusso radiale è una corrente elettrica.

Per risolvere questo quesito occorre ricordare che attraverso a un centimetro quadrato di quel piano passano nel senso delle y positive un certo numero di elettroni animati da velocità diverse, e che a determinare l'impulso comunicato al metallo interviene la componente η della velocità.

Nel campo di velocità $d\lambda = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ passano verso l'alto per il piano considerato, un numero di elettroni

$$\int_1 \eta f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda$$

dove l'integrale è esteso al campo delle η positive; e di essi ogni gruppo avente la velocità η porta una quantità di moto $m|\eta|$, dove $|\eta|$ è il valore assoluto di η. Nel senso opposto passa un numero di elettroni

$$\int_2 \eta f(\xi\, \eta\, \zeta)\, d\lambda$$

esteso al campo delle η negative, e di essi ogni gruppo avente la velocità η porta la quantità di moto $m|\eta|$.

Si deduce che la differenza delle quantità di moto che traversano il piano nei due sensi è data da

$$Q = m \int |\eta|\, \eta f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda$$

estese all'intero campo di velocità. Sostituendo a f il valore dato dalla (1) e osservando che l'integrale relativo al 1° termine è nullo, e che si ha inoltre

$$\int |\eta|\, \eta \xi F\, d\lambda = 0$$

si ottiene

$$Q = - mkl \int |\eta|\, \eta^2 \frac{F}{r}\, d\lambda\,.$$

Ora si dimostra facilmente che l'ultimo integrale è nullo, poichè F è funzione della sola r, e si ha inoltre:

$$\int \eta^2 F \, d\lambda = \int \xi^2 F \, d\lambda = 0$$

essendo nulla la corrente j_x nel senso x.

A un risultato analogo si giunge osservando che la forza globale esercitantesi nel senso y per effetto del campo su tutti gli elettroni in movimento, forza che si trasmetta alle molecole del metallo negli urti con le molecole, è nulla. Invero essa è data da $\int H e \xi f \, d\lambda = He \int \xi f \, d\lambda$; e poichè $e \int \xi f \, d\lambda$ misura la corrente j_x nel senso x, che è nulla, sarà nulla anche la forza.

Giungiamo così al risultato che attraverso a quel semipiano radiale passano elettroni in maggior numero in un certo senso, una maggiore forza viva in senso opposto, e una eguale quantità di moto nei due sensi. Con ciò si giustifica la mancanza di ogni azione di trascinamento sul metallo che l'esperienza ha constatato.

Si noti a questo proposito che al solo flusso termico corrisponde nel caso di una sbarra sottoposta a una differenza di temperatura, un eccesso della quantità di moto nel senso del flusso termico, compensata da una reazione sulle basi; fenomeno che ha il suo analogo nella teoria cinetica dei gas quando questo è contenuto in una massa di materia solida spugnosa, o il gradiente termico è creato in un sistema di tubi sottilissimi (1). Nel caso nostro manca la reazione sulle basi, poichè il flusso circolare termico si chiude su sè stesso, senza differenze di temperatura, ciò che è senza precedenti nel fenomeno della conduzione termica. La compensazione delle quantità di moto avviene nonostante il flusso termico in un senso, per il maggior flusso elettronico in senso opposto.

Si potrebbe pertanto ritenere che la mancanza di un effetto di trascinamento sul metallo, cioè dell'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère, deriva da ciò che se son più numerosi gli elettroni che sono trascinati dal campo circolante in un verso, gli altri trascinati in senso opposto possiedono una maggiore forza viva, cosicchè avviene il compenso fra le quantità di moto corrispondenti.

Nessun'altra manifestazione potrebbe mettere in rilievo l'esistenza di questo singolare flusso vorticoso di energia cinetica; esso ci si rivela solo con la compensazione dell'effetto trascinatore che sarebbe dovuto a quegli elettroni che circolano in maggior numero in senso opposto; questi ultimi fanno constatare la loro esistenza come corrente elettrica circolare che rende il disco simile a una lamina magnetica.

(1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. *31*, 205, a. 1910.

Biologia. — *Razza biologica di Anofele che non punge l'uomo. Un singolarissimo caso di anofelismo e paludismo senza malaria.* Nota preliminare del Socio B. Grassi (1).

Il professore Giacomo Rossi della Scuola Superiore di Agricoltura di Portici, nel 1906 richiamava l'attenzione sopra i poco lontani Orti di Schito (tra Torre Annunziata e Castellamare di Stabia), definendoli un classico esempio di paludismo e anofelismo senza malaria.

Tutti sanno che il fenomeno dell'anofelismo senza malaria ha fatto sostituire alla mia formula: uomo malarico + anofele = malaria, quest'altra: uomo malarico + anofele + x + y + z = malaria. Il Rossi dopo di avere visitate tante altre località, in cui si verifica tale fenomeno, sosteneva in modo assoluto l'esistenza di un nesso positivo tra coltivazione intensa del suolo e diminuzione ed anche scomparsa della malaria. Riferendosi evidentemente anche agli Orti di Schito, osservava che la coltura, che risana più rapidamente un territorio, è quella orticola, la quale rimuove il terreno fino a quattro volte l'anno. Credeva così di avvicinarsi alla sostituzione di un termine noto alle incognite x, y, z della nuova formula malarica.

È naturale che volendo io approfondire lo studio di questo argomento, facessi mèta delle mie osservazioni anzitutto gli Orti di Schito. Basta una rapida corsa in questa zona per persuadersi che la definizione del Rossi era ed è pienamente giustificata. La quantità di Anofeli (*claviger s. maculipennis*, che vi pullula, è veramente fenomenale. Al tramonto, che è il momento degli amori, svolazzano nell'aria dei veri nugoli di maschi, che il volgo ben conosce; nei porcili si contano a migliaia le femmine e anche non pochi maschi. E la malaria? Da un bel numero di anni è scomparsa e i militari malarici ritornati in questa zona non ne hanno acceso alcun nuovo focolaio.

Io ho avuto la fortuna di scoprire che la spiegazione di questo fenomeno, che sembra a tutta prima contradire la teoria esclusivista da me sempre sostenuta, è semplicissima. Cosa a tutta prima incredibile, ma vera: gli Anofeli di Schito non pungono l'uomo; sono in sommo grado misantropi. Questa asserzione è basata su prolungate e accuratissime indagini fatte sul posto, da me dapprima coll'aiuto dell'amico dottor Weiss e poi coll'aiuto del mio ottimo tecnico Neri Francesco. Durante i mesi di giugno e di luglio

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1921.

io mi sono recato quattro volte a Schito e vi ho passato ogni volta alcuni giorni. Le osservazioni sono state da noi continuate per tutta la notte, dal calar del sole fino a giorno fatto. Le abitazioni furono accuratamente esaminate con la lampada ad acetilene. Insomma non si è trascurata alcuna cautela. Ebbene non abbiamo mai veduto un Anofele avvicinarsi all'uomo e tanto meno pungerlo.

Anche il dottor Grandi, assistente del prof. Silvestri, ebbe occasione di persuadersi della realtà dell'inaspettato fenomeno, almeno al tramonto e per ben due volte.

Quei di Schito chiamano le zanzare Tavani, in genere, e ne lamentano le punture: infatti essi vengono molto tormentati, ma soltanto dai *Culex*, non mai dagli Anofeli.

Soltanto artificialmente si può ottenere che gli Anofeli di Schito ci pungano. Infatti se gli Anofeli digiuni vengono liberati in ambienti chiusi, tentano di fuggire, ma non riuscendovi, quando si sentono morir di fame, finiscono per contentarsi del sangue dell'uomo; *spontaneamente però, cioè in natura, non lo pungono mai.*

Si tratta evidentemente di una razza biologica caratterizzata dalla misantropia. Che essa si sia formata col rimuovere il terreno, come potrebbe far pensare l'ipotesi del Rossi, è cosa per me inconcepibile. Ritengo invece che essa siasi formata in quell'epoca — verso il 1860-70 — in cui nel padule di Schito si contavano già molti pagliai (capanne) nei quali stabulavano animali domestici, mentre il numero degli uomini, che pernottavano sul posto, era minimo. Da notizie da me assunte risulterebbe *grosso modo* che vi erano circa tre centinaia di capi di bestiame, custoditi durante la notte soltanto da una ventina di uomini: gli altri coltivatori al tramonto si ritiravano sulle colline circostanti, donde al mattino seguente tornavano al padule.

Già altri autori hanno parlato della possibile esistenza di razze d'Anofeli più o meno misantrope, ma io, che ho osservato e reso di pubblica ragione molti anni prima i fenomeni su cui essi si fondano, li avevo attribuiti a termotropismo positivo, e certamente almeno in parte notevole sono tali. Invece nel caso di Schito la termofilia degli Anofeli non basta più a spiegare il fenomeno e occorre ammettere la formazione di una *razza biologica* con carattere almeno temporaneamente ereditario.

Conviene aggiungere che a Massarosa, altro luogo classico di anofelismo e paludismo senza malaria, in antitesi a quel che accade a Schito, gli Anofeli pungono maledettamente. A primo aspetto questa stridente contradizione tra il comportarsi degli Anofeli nelle due diverse regioni mette in grave imbarazzo, ma io credo che questi due fenomeni contrari si possano conciliare insieme, come tenterò di dimostrare in una Memoria che spero di poter pubblicare tra pochi giorni.

Intanto mi si conceda da un lato di dire che il fenomeno osservato a Schito a me sembra di sommo interesse e sia destinato a rappresentare un punto critico nei metodi di lotta antimalarica; e dall'altro di aggiungere che gli x, y, z almeno nel caso classico di Schito equivalgono a zero (1).

Fisiologia. — *Conseguenze della nefrectomia nei topi siamesi diseguali* (2). Nota del Corrisp. prof. B. Morpurgo (3).

In una comunicazione fatta l'anno scorso al Congresso di Fisiologia a Parigi sugli scambii fra topi siamesi (uniti con ampia celostomia laterale) avevo rilevato che assai spesso avviene che l'uno dei due compagni si mostri prevalente sull'altro, nel senso che, essendo i due animali mantenuti a pane secco ed acqua, si manifesta un enorme squilibrio nella nutrizione dei due animali, che in pochi giorni conduce a morte per atrofia generale il compagno deperito, mentre non muta lo stato dell'altro. Il grado dell'atrofia è così alto, che esso è appena raggiunto da quello che si osserva nel topo singolo nell'inanizione completa. Lo squilibrio della nutrizione è sempre preceduto da una particolare alterazione degli scambii dei liquidi fra i due organismi uniti, alterazione che consiste nel passaggio di molto liquido dal compagno recessivo in quello prevalente, e che si manifesta con la introduzione di una grande quantità di acqua nel recessivo e con l'urinazione abbondantissima del prevalente. L'alimentazione del recessivo continua fino all'ultimo, sebbene sia sempre più scarsa di quella del prevalente e diminuisca via via che procede l'atrofia. Ho lasciato aperta la questione che riguarda la causa essenziale dell'atrofia, ma ho potuto dimostrare che essa sta in relazione con il passaggio di liquido dal topo recessivo in quello prevalente. Infatti, se si impone artificialmente un certo grado di eguaglianza nell'introduzione di acqua nei due siamesi diseguali, si riesce ad impedire il tracollo della nutrizione del recessivo. Limitando la quantità della bevanda al recessivo, o, meglio, concedendo a tutti e due i compagni soltanto pane inzuppato d'acqua, in modo che l'uno, per sedare la sua sete, mangi di più di quanto vorrebbe, e l'altro, per acquetare l'avido appettito, sia costretto ad introdurre col cibo molta acqua, le coppie di diseguali vivono e i loro componenti spesso si mantengono in equilibrio riguardo allo stato di nutrizione.

Dopo queste esperienze, che ho ampiamente confermate quest'anno, mi sono proposto di verificare come si sarebbero comportati, rispetto alla di-

(1) Debbo una parola di vivo ringraziamento, per le cortesie usatemi, all'ottimo ingegnere Vivanti, direttore dell'Ilva a Torre Annunziata.

(2) Istituto di Patalogia generale dell'Università di Torino.

(3) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1921.

stribuzione dei liquidi, due siamesi diseguali quando ad uno di essi fosse stata operata la nefrectomia bilaterale. Si sarebbe mantenuta la direzione della corrente dei liquidi, oppure, in certe circostanze, si sarebbe essa invertita, così da forzare le tendenze costituzionali dei due individui uniti? E come si sarebbero comportati i topi senza reni, per effetto delle loro tendenze costituzionali?

Per rispondere a questi quesiti ho scelto due gruppi di topi siamesi diseguali per rispetto alla distribuzione dei liquidi ed ho operata la nefrectomia bilaterale in un gruppo al compagno recessivo, nell'altro a quello prevalente.

Il primo gruppo è formato di quattro coppie. In due di queste ho fatto la nefrectomia bilaterale in un tempo; nell'altre due in due tempi con l'intervallo di sette e rispettivamente di undici giorni fra la prima e la seconda nefrectomia.

Dopo la prima nefrectomia i topi recessivi non mutarono comportamento: essi continuarono ad urinare poco e a bevere molto, il peso specifico dell'urina oscillò in senso inverso della quantità dell'urina. Il secondo rene estirpato aveva un peso maggiore di quello del primo rene, ma l'ipertrofia non era molto sviluppata: in un caso il primo rene pesava 0,58 gr. ed il secondo 0,62 gr. e nell'altro caso il primo rene pesava 0,52 gr. ed il secondo 0.72 gr.; in questo caso, nel quale l'ipertrofia era maggiore, lo squilibrio fra i due compagni era stato minore. Dopo la seconda nefrectomia i topi recessivi continuarono a bevere assai più dei loro compagni e questi non urinarono molto più di prima, ma produssero un'urina con peso specifico più alto.

Nelle due coppie operate di nefrectomia bilaterale in un tempo si sono svolti fatti analoghi a quelli che ho notati dopo la seconda nefrectomia nelle coppie operate in due tempi; soltanto si è verificato che i topi recessivi, privati dei due reni in una volta, bevettero un poco meno di quelli srenati in due tempi.

Tutte e quattro le coppie nelle quali era stata fatta la nefrectomia al compagno recessivo sopportarono assai bene le conseguenze dell'operazione e, mantenute a pane inzuppato, si ristabilirono senza notevole squilibrio della nutrizione. Una coppia sopravvisse 53 giorni e perì in seguito all'atrofia del recessivo (perdita di 44 % del peso iniziale), atrofia che si svolse in modo precipitoso durante un periodo di alimentazione a pane secco ed acqua. Le altre tre coppie vissero in ottimo stato e, dopo 2-3 settimane furono adoperate per un esperimento, del quale dirò alla fine.

Il secondo gruppo di topi siamesi, nel quale ho fatto la nefrectomia al compagno prevalente, è formato di cinque coppie. In tre di queste ho estirpato prima uno e, un mese dopo, l'altro rene; nelle altre ho fatto l'estirpazione dei due reni in una volta. Nelle prime dopo l'estirpazione di un rene,

non avvenne alcuna modificazione nel comportamento del prevalente, e quindi continuò lo squilibrio nella distribuzione dei liquidi fra i due compagni.

Dopo l'estirpazione del secondo rene in queste coppie e dopo la nefrectomia bilaterale in quelle operate in un tempo, in contrasto con ciò che era avvenuto nel primo gruppo, si iniziò quasi subito nel topo prevalente un quadro di malattia, che in tutti i casi si aggravò rapidamente e condusse a morte l'animale in tre o quattro giorni.

Il fenomeno che si presentò per primo fu la tachipnea, che di tanto in tanto aveva carattere di respiro ansioso, poi l'abbassamento forte della temperatura, l'apatia ed il rifiuto del cibo e della bevanda, poi la sonnolenza e, da ultimo, il completo rilassamento del corpo. La differenza della temperatura fra i due compagni fu persino di cinque gradi. Nella seconda metà della malattia il respiro divenne corto e affannoso, e si presentò edema degli arti posteriori e della pelle dell'addome.

Nel compagno recessivo di queste coppie non fu osservato alcun fenomeno morboso, continuò l'introduzione di molta acqua e la produzione di poca urina, fino alla morte del prevalente, e, avvenuta questa, se la coppia fu sciolta in tempo, il topo recessivo sopravvisse e riacquistò presto un buono stato di nutrizione.

L'autossia dei topi prevalenti privati dei reni diede un risultato molto conforme: anasarca del treno posteriore, versamento abbondante di liquido sanguinolento nelle cavità sierose e specialmente in quelle pleuriche (atelettasia dei polmoni e ingrandimento del cuore, con aumento di peso dei ventricoli svuotati del sangue. Una volta mancò l'idrope e ciò avvenne nel solo caso nel quale, dopo la nefrectomia del prevalente, il recessivo urinò più che prima di questa operazione.

Il confronto delle conseguenze della nefrectomia bilaterale ai topi recessivi con quelle della nefrectomia ai prevalenti, dimostra che nel primo caso presto si avvia e interamente si compie la funzione renale compensatoria da parte del topo prevalente, mentre nel secondo caso codesta funzione manca o non si sviluppa in misura sufficiente da parte del compagno recessivo. Questa fondamentale differenza è connessa con il fatto che la corrente dei liquidi dal topo recessivo a quello prevalente continua nello stesso senso, anche se al prevalente è tolto con la nefrectomia il mezzo più importante per lo scarico dell'acqua che ad esso affluisce.

Il quadro patalogico caratteristico, che si svolge rapidamente e costantemente nel topo prevalente privato dei reni, è, senza dubbio, composto di elementi diversi, dei quali alcuni devono dipendere dalla mancanza di una funzione renale sufficiente, altri dalle speciali condizioni dei topi siamesi diseguali.

Per valutare la natura complessa di codesto quadro patologico è pertanto necessario di tenere presente che l'anuria prodotta dall'estirpazione

dei reni in un topo singolo è seguìta da fenomeni differenti da quelli osservati nel siamese prevalente srenato. Infatti, negli animali singoli, dopo la nefrectomia bilaterale, per un periodo di tempo relativamente lungo non si avverte qualsia fenomeno morboso: l'animale si mantiene vispo, mangia e beve presso a poco come prima dall'operazione; e, soltanto a breve distanza dalla morte, esso diventa pallido, leva il pelo irsuto, rifiuta cibo e bevanda, si ritira sonnolento in un angolo della gabbia e, di tanto in tanto, sussulta e, infine, si adagia su un fianco e, completamente rilassato, con respirazione rara e superficiale e con forte abbassamento della temperatura, muore. — L'autossia mostra una certa succulenza di tutti i tessuti, ma non edema, nè raccolte idropiche, cuore floscio non ingrandito.

Il quadro patologico consecutivo alla nefrectomia nel topo singolo è dunque molto differente da quello che si osserva nel topo siamese prevalente. D'onde tale differenza? Rispondere in modo semplice e definito a questa domanda, per me, non è possibile. Dirò invece di qualche esperimento che ho aggiunto a quelli descritti e degli insegnamenti che se ne possono ricavare.

In tre coppie nelle quali avevo operata la nefrectomia bilaterale al recessivo, ho fatto, una volta 25 giorni e due volte 15 giorni dopo la nefrectomia, l'estirpazione di un rene al compagno prevalente, ed ho così affidato tutta la funzione renale per i due siamesi ad un solo rene. Le conseguenze dell'estirpazione del terzo rene furono nei tre casi diverse, in parte per circostanze indipendenti dall'operazione.

Nel primo caso, dopo sei giorni di apparente benessere, il topo senza reni divenne tachipnoico e freddo, poi apatico ed idropico e, al nono giorno, passò in coma, mentre il suo compagno stava benissimo. Quando il primo fu moribondo, ho sacrificato tutti e due i siamesi. L'autossia mostrò nel topo recessivo senza reni gli stessi fatti che erano stati osservati nei topi prevalenti srenati, cioè edema, versamento idropico nelle cavità, attelettasia dei polmoni e aumento del cuore (i ventricoli vuoti pesavano 0,52 gr.). Nel topo prevalente invece, la succulenza dei tessuti era evidentemente minore della normale; il rene unico era ipertrofico (pesava 0,87 gr., mentre un rene di un topo normale di egual taglia pesa 0,5 — 0,6 gr.); il cuore era più stretto e i ventricoli avevano parete più sottile di quelli del compagno (i ventricoli vuoti pesavano, 0,47 gr.). Questa esperienza dimostra che gli stessi fenomeni che furono notati nel compagno prevalente srenato si possono manifestare anche nel recessivo srenato quando la funzione renale del prevalente sia diminuita, ed insegna che quei fenomeni non possono essere attribuiti soltanto all'afflusso di liquido, da un compagno all'altro, come sarebbe naturale di supporre dai risultati delle prove antecedenti; perchè queste stesse prove hanno dimostrato che non avviene l'inversione della corrente di liquido dal prevalente al recessivo, neppure quando il prevaleute sia stato privato di tutti e due i reni.

La seconda coppia siamese con un solo rene è vissuta 34 giorni e la morte del recessivo senza reni è avvenuta per un accidente che non dipendeva dalle operazioni subìte, ma da un grave impedimento della respirazione e della deglutizione, cagionato da un fascio di peli inghiottiti, che s'erano incrostati di sali ed avevano formato un concremento aguzzo, fisso contro il faringe. All'autossia nel recessivo non si è trovato traccia di idropisia nè ipertrofia di cuore, ma atrofia generale avanzatissima (il corpo aveva perduto oltre 50 % del peso iniziale e il cuore pesava 0,37 gr.); nel compagno il rene unico era molto ingrandito (pesava 1,09 gr.) ed anche il cuore era aumentato di peso (0,66 gr.). In questo caso il topo recessivo senza reni morì per atrofia, la compensazione renale, per mezzo dell'unico rene del compagno prevalente, era stata sufficiente.

La terza coppia non mostrò alcun segno di sofferenza per ben undici giorni dopo la terza nefrectomia. Con vitto di pane inzuppato la nutrizione si mantenne equilibrata. Al mattino del dodicesimo giorno, ho sospeso l'alimentazione solita e la ho sostituita con sola carne cotta: i topi ne mangiarono abbondantemente fino verso la sera, senza mostrare sofferenze od alterazioni. A sera il topo senza reni divenne tachipnoico e freddo e poi apatico e nella notte morì. All'autossia ho trovato una notevole succolenza di tutto il corpo, un'abbondantissima raccolta sieroso-sanguinolenta nelle cavità pleuriche, attelettasia dei polmoni, gli atrii del cuore molto dilatati, i ventricoli contratti e forse un poco ingranditi (pesavano 0,52 gr., peso che in rapporto con la taglia dell'animale è un poco maggiore del normale), lo stomaco molto dilatato e ancora pieno di alimento. Qualche ora dopo del compagno, morì il prevalente: ma in questo non si trovò idropisia; il rene unico era assai ingrandito (pesava 0,95 gr.) ed anche il cuore era un poco aumentato di volume e di peso (0,55 gr.). Il risultato di questo esperimento dimostra in modo chiaro che la tachipnea, l'abbassamento della temperatura e l'idrope sono dipendenti dall'insufficenza renale; perchè questi fenomeni, mentre non erano stati neppure accennati nel periodo lungo di alimentazione con pane, si presentarono in modo subitaneo e gravissimo non appena, con l'alimentazione carnea, fu accresciuto il lavore del rene unico. L'ipertrofia del cuore è, senza dubbio, anch'essa dipendente dalla insufficenza renale, ma in questo caso non ebbe il tempo per svilupparsi in modo notevole.

Il complesso dei risultati delle esperienze descritte indica che lo studio dell'insufficienza renale potrà trarre vantaggio dall'applicazione del metodo della unione siamese di due organismi. Per ora le prove eseguite con questo metodo mi permettono di affermare le seguenti conclusioni:

1. La compensazione della funzione renale, dopo la nefrectomia totale ad un topo di una coppia di siamesi diseguali, può avvenire soltanto da parte del topo prevalente.

2. La corrente di liquido dal topo recessivo al prevalente non s'inverte neppure dopo la nefrectomia totale al prevalente.

3. Il prevalente è in grado di effettuare la compensazione renale anche con un solo rene.

4. La funzione renale, dopo la triplice nefrectomia, è labile e non dispone, almeno nel primo tempo, di riserve sufficienti per far fronte ad un rapido aumento del lavoro.

5. In tutti i casi nei quali la compensazione renale non è sufficiente, si manifesta un quadro patologico molto caratteristico, diverso da quello che si presenta in un topo singolo operato di asportazione dei due reni.

6. Il quadro dell'insufficienza renale nei siamesi si avvicina a quello dell'uremia vera.

7. I fenomeni di insufficenza renale si manifestano esclusivamente nel topo completamente privo di reni, mentre nel compagno manca ogni traccia di alterazione o di sofferenza, e ciò si avvera anche in quei casi nei quali la corrente di liquido continua a fluire dal topo srenato (recessivo) verso il suo compagno (prevalente).

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle determinazioni di differenze di longitudine mediante la telegrafia senza fili.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio V. Volterra (1).

I notevoli progressi fatti dalla radiotelegrafia in questi ultimi tempi sono di grande utilità per il problema delle determinazioni di longitudine che già negli anni precedenti alla guerra, nelle prime esperienze da questa interrotte, era stato risolto con buoni e promettenti risultati (2). Una grande attività in questo campo con vasti programmi internazionali rivive ora specialmente in Inghilterra e in Francia (3) e per opera del Consiglio Internazionale di Ricerche (4).

Le stazioni radiotelegrafiche sparse su tutto il globo costituiscono ormai una rete per emissione di segnali di tempo, che possono venire raccolti dagli osservatorî o da tutte quelle stazioni nelle quali interessi un esatto valore della longitudine. Il problema consiste nell'usare un sistema di recezione che assicuri la voluta precisione.

(1) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.
(2) G. Cassinis, *L'Elettrotecnica*. 15 luglio 1914.
(3) Monthly Notices of the R. A. S. May 1920, pp. 648-679.
(4) Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A. June 1920, pag. 372.

Tre sono generalmente i metodi usati per la recezione dei segnali di tempo: quello dei segnali indipendenti costituiti da linee o punti che vengono ricevuti col telefono e registrati con tasto a mano sul cronografo, il metodo delle coincidenze o dei segnali ritmici, e quello della registrazione automatica.

Il primo è di semplice e facile uso anche in difficili circostanze di recezione dovute ad eventuali grandi distanze dalla stazione emittente o agli « intrusi » o « scariche » che in certe stagioni dell'anno, specialmente sulla terraferma, possono disturbare notevolmente le comunicazioni radiotelegrafiche. Con questo metodo non si elimina però l'equazione personale nella registrazione dei segnali, a meno che non si possa provvedere allo scambio degli osservatori la cui equazione personale deve restare costante durante lo scambio.

Nelle determinazioni di longitudine eseguite dal Comandante A. Alessio e dallo scrivente nell'Asia Centrale, venne usato questo metodo come è stato riferito in una precedente Nota [1]. Lo scambio degli osservatori non era possibile in una spedizione in regioni di difficile accesso e viabilità; tuttavia si sono raccolti elementi bastanti per concludere che le equazioni personali dei vari osservatori i quali presero parte alle determinazioni, nelle stazioni eseguite dalla spedizione, e nella stazione base di Dehra Dun, sono dell'ordine di quelle che si hanno nella registrazione dei passaggi di stelle pure fatte con tasto a mano. Come nella equazione personale di queste si ha un termine dipendente dallo splendore delle stelle (equazione di splendore), così nella registrazione dei segnali esiste probabilmente un termine dipendente dall' intensità con cui si ascoltano i segnali nel telefono. Tale intensità può essere variabilissima per cause inerenti alla costituzione ed alle proprietà elettriche dell'atmosfera, e quindi questa causa può anche essere fonte di errori in misure di grande precisione. Ma in condizioni difficili di recezione può essere questo il solo metodo che si possa adoperare.

In India per esempio, durante la stagione dei monsoni di sud-ovest (estate), le usuali comunicazioni radiotelegrafiche sono talvolta rese molto difficili dalle numerosissime e fortissime « scariche », ed in tal caso è appena possibile di ricevere alcuni segnali di tempo di una serie determinata indipendenti l'uno dall'altro.

Il metodo delle coincidenze consiste, come è ben noto, nel confrontare i segnali radiotelegrafici emessi ad intervalli della durata diversa da un secondo per una piccola quantità, con i secondi dell'orologio della stazione ricevente. Questo metodo implica l'ascoltazione ininterrotta di una serie più o meno lunga di segnali secondo quanto sono spaziati i battimenti emessi, e di poter percepire almeno il principio o la fine della serie. Di più sulla precisione dell'apprezzamento di una coincidenza influisce la diversa intensità

[1] Rendiconti Acc. Lincei, vol. XXX, fasc. 10, pag. 305.

e timbro con cui si sentono nel telefono i segnali radiotelegrafici e le battute dell'orologio locale.

Il terzo metodo consiste nella registrazione automatica dei segnali radiotelegrafici con un apparecchio registratore che può essere quello usato nelle determinazioni di tempo locale. La difficoltà nell'uso di questo metodo consiste nel trasformare le onde herziane, che vengono raccolte dall'apparecchio ricevente, in correnti di sufficiente intensità, tale da poter registrare automaticamente i segnali. Quando le distanze fra stazione emittente e ricevente sono piccole e la potenza della stazione emittente sia sufficiente, allora gli strumenti di registrazione possono essere del tutto simili a quelli usati nelle determinazioni di longitudine con la telegrafia ordinaria, come già fecero Albrecht e Wanach nel 1906 (1). Ma se le distanze sono notevoli bisogna ricorrere ad apparecchi più sensibili, come sono per esempio i magneto-oscillografi usati da Abraham nella determinazione di longitudine Parigi-Washington. Sono questi dei galvanometri a ferro mobile (2) molto sensibili che possono registrare, con una penna su carta affumicata o con un raggio di luce su di un nastro fotografico, correnti di intensità inferiore ad un milliampère e che sostituiscono il telefono nel circuito dei moderni apparecchi riceventi muniti di valvole ed amplificatori a tre elettrodi, senza che sia necessario di interporre alcun relais meccanico ausiliario.

Per la precisione che si raggiunge con i primi due metodi, gli esperimenti finora eseguiti permettono di fare le seguenti considerazioni.

Nelle determinazioni sopra citate, fatte nell'Asia Centrale, essendo la distanza fra la stazione emittente e quelle riceventi comprese fra 400 e 900 chilometri, coll'uso per le determinazioni di tempo di uno strumento dei passaggi con 65 mm. di apertura, montato su di un treppiede, in condizioni di osservazione non sempre favorevoli e facili, poichè la maggior parte delle stazioni si trovava a notevole altezza sul livello del mare (fra 2000 e 5400 metri), l'errore medio, per una longitudine dedotta da una sera di osservazioni, comprendente la recezione di 90 segnali radiotelegrafici, risultò uguale a $\pm$ 0.^{s}07. Gli errori medî dei valori definitivi delle longitudini, come risulta dalla tabella della precedente Nota, vanno da un minimo di $\pm$ 0,^{s}015, che spetta a Cashgar, con quattro sere di osservazioni favorite da buone condizioni meteoriche e da ottima recezione dei segnali, ad un massimo di $\pm$ 0.^{s}054, sull'altipiano Depsang, con cinque sere di osservazioni in circostanze meteoriche varie, e notevoli perturbazioni nella recezione dei segnali per causa delle continue e forti « scariche ». È forse lecito concludere che con questo metodo, usato in condizioni meno difficili, con l'impiego del micrometro impersonale per l'osservazione dei passaggi e con lo scambio

(1) Veröff. des Kgl. Preusz. Geod. Inst. Neue Folge Nr. 31. Berlin, 1907.
(2) Comptes Rendus. N. 4, 28 Juillet 1919, pag. 171.

degli osservatori, si possa raggiungere in analoghe determinazioni, con quattro o cinque sere di osservazioni, un errore all'incirca di $\pm 0,^s01$.

Col secondo metodo vennero eseguite in osservatorî stabili e con strumenti di passaggi in solida sistemazione provvisti di micrometro impersonale con movimento di orologeria, le differenze di longitudine Parigi-Bizerta, Parigi-Uccle e Parigi-Washington. Per la prima si effettuò lo scambio di segnali radiotelegrafici da Parigi a Bizerta e da Bizerta a Parigi e lo scambio di osservatori, ottenendo in dieci sere di osservazioni un valore della longitudine con errore medio di $\pm 0,^s004$. Per la seconda i segnali radiotelegrafici emessi dalla stazione della torre Eiffel vennero ricevuti a Parigi e a Uccle, e in 20 sere di osservazione, nelle quali contemporaneamente vennero eseguite determinazioni con la telegrafia ordinaria, sono stati conclusi due valori della longitudine diversi l'uno dall'altro di $0,^s01$ con un errore medio, per la telegrafia senza fili di $\pm 0,^s006$ e per la telegrafia ordinaria di $\pm 0,^s007$. Ciò che sta a provare la concordanza ed uguaglianza dei due metodi.

D'altra parte nella differenza di longitudine fra Parigi e Washington, con una distanza di più che 6000 chilometri, con due gruppi di osservatori, l'uno americano e l'altro francese, che eseguirono due determinazioni indipendenti con scambio di segnali da ambedue le stazioni e scambio di osservatori, sono stati ottenuti, in due periodi distinti, due valori della longitudine con errori medî rispettivamente di $\pm 0,^s007$ e $\pm 0,^s004$, ma differenti fra loro di $0,^s2$. La causa più probabile di questa notevole differenza sistematica deve ascriversi, almeno in parte, agli errori ed alle equazioni personali inerenti ai confronti radiotelegrafici dei pendoli [1], come si deduce dal confronto con i risultati contemporaneamente ottenuti da H. Abraham con registrazione automatica dei segnali su di un cronografo fotografico del tipo dianzi accennato. Data la grande distanza delle due stazioni, si dovettero usare delle emissioni relativamente lunghe e cioè della durata di mezzo secondo perchè potessero venire percepite. Da questo fatto risultò una notevole diminuzione di precisione nell'apprezzamento delle coincidenze con l'esistenza di notevoli equazioni personali [2].

Il metodo della registrazione automatica venne usato in questa occasione, nel 1913-14, soltanto in via di esperimento, e da allora ha fatto notevoli progressi in uno con quelli della radiotelegrafia, per la quale la facilità delle comunicazioni è molto aumentata con migliorati apparecchi di emissione e di recezione. Adesso è ormai certo che la registrazione automatica in un prossimo futuro potrà sostituire, per misure di grande precisione, i metodi di ascoltazione telefonica.

[1] Bulletin Astronomique. Tome XXXIII, pag. 259, Paris, 1916.

[2] *Rapport annuel sur l'état de l'Observatoire de Paris pour l'année 1914*, pag. 19, Paris, 1915.

Tutti e tre i metodi, per la possibilità di impiego in qualunque regione della terra, per le grandi distanze a cui verranno impiegati e per la facilità con la quale si possono fare determinazioni contemporanee di più stazioni, porteranno in breve tempo un notevole contributo alla conoscenza delle longitudini; e ciò giustifica l'interesse che si dedica e si deve dedicare a questo promettente campo di ricerche.

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno* ∞^2 *rette.* Nota II di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre (1).

c) Supponiamo infine che B, C coincidano in un punto, semplice per γ e doppio per V_3^4, e sia L la linea (2) irriducibile luogo di $B \equiv C$. Da un punto generico P di L escono ∞^1 generatrici di V_3^4 formanti un cono (irriducibile o no, ma) privo di componenti piane variabili al variare di P su L, e la cui parte variabile Γ è quindi di ordine ≥ 2; su ogni generatrice di Γ esiste, per le ipotesi fatte (3), un punto doppio di V_3^4 consecutivo a P, perciò tutte le generatrici di Γ sono doppie per il cono quadrico tangente a V_3^4 in P (21), cono che sarà perciò un S_3, ω, da contar due volte. La V_3^4 è segata da ω in una F^4, contenente Γ, e che ha in P un punto quadruplo. Infatti, se P fosse solo triplo per quella F^4, essa si comporrebbe o di Γ e d'un piano σ non passante per P, oppure di Γ e d'una quadrica Γ_1 passante semplicemente per P, secondochè l'ordine di Γ è 3 o 2. Ora, nel 1° caso, al variare di P su L, il piano σ dovrebbe restar fisso, perciò ω descriverebbe il fascio degli S_3 passanti per σ, il che è assurdo, perchè L, che è irriducibile e non sta su σ, non può essere tangente ad ω in P. Invece, nel 2° caso, la quadrica Γ_1 essendo irriducibile (se no ω sarebbe fisso al variare di P su L, e quindi la F^4 conterrebbe L stessa come linea tripla), la sezione iperpiana generica di V_3^4 conterrebbe ∞^1 coniche, sezioni del suo S_3 con le ∞^1 quadriche analoghe a Γ e Γ_1; e poichè detta superficie non è rigata, nè ha curve-sezioni ellittiche o razionali, quelle coniche, e quindi anche le quadriche Γ, Γ_1, apparterrebbero ad uno stesso sistema continuo (4), il che, per la genericità di P, contraddice al fatto che P è

(1) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(2) E non la *superficie*, perchè verrebbe d'ordine > 1 (14).

(3) Ciò si vede pensando ad una trasformazione quadratica per cui P sia punto fondamentale, e con ovvia estensione ad S_4 di teoremi noti in S_3 (Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Ann. di Matem., (2) 25 (1897), pp. 1-54, n. 1).

(4) V. la mia Memoria: *Le superficie di 6° ordine con infinite coniche*, Mem. Ist. Lomb., (3) 12 (1916), pp. 243-307, Cap. 1° e 2°.

doppio per Γ e non per Γ_1. In generale, dunque, L è una linea doppia tacnodale: ogni suo punto è per V_3^4 un tacnodo (1).

Ne segue che L non può essere una linea non piana, di ordine quindi ≥ 3, perchè la sezione iperpiana generica di V_3^4 avrebbe almeno tre tacnodi non allineati senza poter avere una linea doppia di ordine > 1. Se poi L, di ordine ≥ 2, stesse in un piano τ, questo non potrebbe stare su V_3^4 (se no starebbe anche nell' S_3 . ω, del ragionamento precedente, quindi L sarebbe doppia per il cono F^4, cosa chiaramente assurda), e quindi L potrebbe essere solo una conica; ma allora un S_3 generico per τ segherebbe la V_3^4 in una F^4 rigata con L doppia ed avente una retta doppia fuori di τ, sicchè V_3^4 acquisterebbe un piano doppio incidente ad L, e sarebbe una di quelle del n. 4 *a*), la quale non può rientrare evidentemente nel caso attuale.

Si conclude che L è una retta; sicchè ω sega V_3^4 in un cono quartico, generalmente irriducibile, avente L come generatrice doppia. Un piano generico σ per L sega V_3^4, fuori di L, in due rette incontrantisi su L; perciò per un punto generico di V_3^4 passa una sola retta di V_3^4 incidente ad L, e σ sta su uno solo degli S_3 tangenti a V_3^4 nei punti di L: tali S_3 formano dunque fascio (intorno ad un piano contenente L). Notando infine che la sezione iperpiana generica di V_3^4 è una F^4 con un tacnodo P su r, sulla quale i coni quartici sezioni di V_3^4 con gli ∞^1 S_3 anzidetti segano un fascio di sezioni piane passanti per P (l' S_3 tangente a V_3^4 in P segando proprio il piano tangente alla F^4 in P), e che detto fascio risulta riferito proiettivamente ai punti di L, si ricava per V_3^4 la seguente costruzione: presa in un S_3 una F^4 con un tacnodo P su L (2), si ponga una proiettività tra i punti di L ed i piani d'un fascio, nell' S_3 della F^4, contenente l'unico piano tangente ad F^4 in P stesso, e in modo che questo piano corrisponda al punto P di L: la V_3^4 richiesta è luogo dei coni che proiettano da ogni punto di L la C^4 sezione di F^4 col piano omologo.

Scritte le equazioni della F^4 sotto la forma:

$$(1) \qquad z_0 = z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2 \alpha_2(z_2 z_3 z_4) + \beta_4(z_2 z_3 z_4) = 0,$$

e quella della proiettività considerata sotto la forma: $y_1 z_2 - y_0 z_4 = 0$, la V_3^4 risulta luogo del punto:

$$(2) \qquad \varrho x_0 = \lambda y_0 \; ; \; \varrho x_1 = z_1 + \lambda y_1 \; ; \; \varrho x_2 = z_2 \; ; \; \varrho x_3 = z_3 \; ; \; \varrho x_4 = z_4 \; ;$$

(1) Chiamando così un punto doppio uniplanare P di V_3^4 quando le sezioni di V_3^4 coi piani generici per P hanno ivi un tacnodo.

(2) Cremona, *Sopra una certa superficie di 4° ordine*, Coll. in mem. Chelini, Milano, 1881, pp. 413-424; Opere Matem., III, pp. 444-453. Noether, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*, Math. Ann., 33 (1889), pp. 546-571.

perciò la sua equazione è:

(3) $(x_1x_2 - x_0x_4)^2 + (x_1x_2 - x_0x_4)\,\alpha_2(x_2x_3x_4) + \beta_4(x_2x_3x_4) = 0$ [1].

5. In generale, la (1) e le sezioni iperpiane di V_3^4 sono razionali [2], e però tale è pure V_3^4 [2]; ma si hanno dei casi speciali notevoli in cui la (1) diviene irrazionale, perchè acquista un fascio ellittico di coniche; si riconosce allora subito che anche V_3^4 diviene irrazionale, perchè acquista un fascio ellittico di quadriche. Cioè:

a) se α_2 e β_4 non contengono x_2, vi è sulla (1) un tacnodo P′ distinto da P [3], e su V_3^4 si ha una seconda retta doppia tacnodale L′ incidente ad L; le quadriche di V_3^4 stanno a coppie negli S_3 contenenti LL′, le quadriche d'una stessa coppia essendo raccordate fra loro lungo L ed L′;

b) prendendo: $\beta_4 \equiv \frac{1}{4}\alpha_2^2 - \psi_4(x_2x_3)$ [4], la V_3^4 si può riguardare come un caso speciale della precedente in cui $L' \equiv L$.

c) prendendo invece: $\beta_4 \equiv \frac{1}{4}\alpha_2^2 - \psi_4(x_2x_4)$, il fascio di piani usato nella costruzione della V_3^4 coincide con quello dei piani delle coniche della (1), sicchè le rette di V_3^4 uscenti da un punto generico di L formano, ora, due coni quadrici aventi lungo L contatto di 3° ordine.

6. Ammettiamo ora che V_3^4 abbia lungo g un S_3 tangente fisso; sicchè i punti A, B, C del n. 3 son tutti multipli per V_3^4.

Se due di essi, ad es. A, B, coincidono in un punto doppio per γ e triplo per V_3^4, essi descrivono una retta tripla t od una conica tripla L (n. 4 *b*)). Il primo caso va escluso, perchè il piano gt non può contenere su g un punto doppio ulteriore C di V_3^4 distinto dal punto gt, nè ad esso consecutivo. Nel secondo caso, un S_3 generico condotto per il piano π di L, che è doppio per V_3^4, sega ancora V_3^4 in una F^2 irriducibile contenente L; ne segue che C è distinto da $A \equiv B$, se no quella F^2 non sarebbe un cono, e quindi per un suo punto generico passerebbero due generatrici distinte g, g' di V_3^4, contro l'ipotesi che la cubica γ sezione ulteriore (fuori di g) di V_3^4 col piano gg' non incontri g fuori del punto gL. Dunque V_3^4 ha, oltre L, una linea doppia irriducibile L_1, di ordine x e con $x - 1$ punti su π; se y di questi stanno su L, si vede subito che dev'essere: $2x - y = 4$,

[1] Equazione analoga a quella d'una F^4 rigata di S_3 con due rette doppie infinitamente vicine; v. Cayley, *A second Memoir on skew Surfaces, otherwise Scrolls*, Phil. Trans., 154 (1864), pp. 559-576 e Coll. Math. Papers, vol. V, pp. 201-220; Cremona, *Sopra una certa famiglia di superficie gobbe*, Rend. Ist. Lomb., (2) 1 (1868), pp. 109-112 e Opere Matem., II, pp. 399-401.

[2] Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, Ann. di Matem., (3) 24 (1915), pp. 49-88; Scritti mat. offerti ad E. D'Ovidio, pp. 342-363.

[3] Kummer, *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen*, Crelle, 64 (1865), pp. 66-78, a p. 71.

[4] De Franchis, *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo*, Rend. Palermo, 14 (1900), pp. 33-65, n. 3.

e quindi (poichè: $y \leq x-1$): $x=2$, $y=0$ od: $x=3$, $y=2$; cioè L_1 può essere: una C^2 con un punto su π, ma non su L; una C^3 piana con un punto doppio su L; una C^3 sghemba con due punti (distinti o no) su L. In ogni caso V_3^1 è luogo delle rette incidenti ad L , L_1, perciò va escluso il 1° caso ([12]); la sua equazione è, negli altri due casi rispett.:

$$x_2[x_0\alpha_2(x_3x_4)+\beta_3(x_3x_4)]-x_1^2\alpha_2(x_3x_4)=0\ ;\ x_1^2x_3x_4-(x_0x_4-x_3^2)(x_2x_3-x_4^2)=0.$$

(Nell'ultimo caso si son supposti distinti i punti comuni ad L , L_1).

Se poi A , B , C son tutti doppî per V_3^4, al più uno di essi può descrivere (una superficie, anzi) un piano doppio di V_3^4; ne segue che A , B , C non sono tutti distinti, perchè se A, ad es., descrive un piano, le quadriche di V^1 situate con quel piano in uno stesso S_3 dovrebbero avere due punti doppî distinti, e, d'altra parte, il luogo di A , B , C non può essere complessivamente una linea (irriducibile o no), perchè questa, avendo ∞^2 trisecanti, sarebbe piana. Se $A \equiv B$ (ed eventualmente $A \equiv B \equiv C$), la V_3^1 deve rientrare in quelle del n. 4 *c*), ma se si scrive l'equazione dell' S_3 tangente generico della (3) si vede che esso non può restar fisso lungo g (per far ciò possono servire le (2), che rappresentano parametricamente la V_3^4 coi parametri $\lambda , z_2 , z_3 , z_4$, quando vi si riguardi z_1 come funzione implicita di z_2 , z_3 , z_4 definita dalla (1)).

7. *Le* V_3^4 *irriducibili normali, non coni, che son luoghi di* ∞^2 *o* ∞^3 *rette sono:*

1°) *La* V_3^4 *di* S_6 *luogo dei piani che uniscono punti omologhi di due rette e d'una* C^2, *generiche, riferite proiettivamente* (*è la sola a curve-sezioni razionali, e la sola con* ∞^3 *rette*);

2°) *La* V_3^4 *base d'un fascio di quadriche di* S_5 (*è la sola a curve-sezioni ellittiche*);

3°) *La* V_3^4 *di* S_4 *con piano doppio*;

4°) *Le seguenti* V_3^4 *di* S_4 *aventi lungo ogni generatrice un piano tangente fisso*: a) *le* V_3^4 *con piano doppio* π *ed inoltre una linea doppia* (*che può essere: una retta sghemba con* π, *una conica incidente a* π, *una* C^3 *piana con un punto doppio su* π, *una* C^3 *sghemba con due punti su* π, *una* C^4 *di* 2^a *specie d'un* S_3 *con tre punti allineati su* π, *una* C^4 *di* S_4 *con tre punti su* π); b) *la* V_3^4 *con retta tripla*; c) *la* V_3^4 *con conica tripla* (*entro un piano doppio*); d) *la* V_3^4 *con una retta doppia tacnodale*; e) *la* V_3^4 *con due rette doppie tacnodali incidenti, ed eventualmente coincidenti* (*è la sola irrazionale*);

5°) *Le* V_3^4 *di* S_4 (*aventi lungo ogni generatrice un* S_3 *tangente fisso*) *dotate di conica tripla* L, *in un piano doppio* π, *e d'una linea doppia ulteriore* (*che può essere: una* C^3 *piana con un punto doppio su* L, *una* C^3 *sghemba con due punti su* L).

Matematica. — *Sui numeri reali e le grandezze.* Nota II di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (*).

3. Se u, v sono classi di grandezze, omogenee rispetto alle operazioni h, k, inoltre m, n sono elementi, non nulli, il primo di u e il secondo di v, consideriamo la ordinaria *proporzionalità* tra gli u e i v che a $0_{u,h}$ ed m fa corrispondere $0_{v,k}$ ed n e alla somma (h) di due elementi di u fa corrispondere la somma (k) dei due corrispondenti di v. Tale proporzionalità resta individuata da un $\mathrm{Ops}(u, v)$, che risulta essere reciproco [pag. 178], e che indicheremo col simbolo completo $p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix}$: vale a dire porremo,

(1) $$h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper}\,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, h\,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, k\,.\, m \,\varepsilon\, u - \iota\, 0_{u,h}\,.\, n \,\varepsilon\, v - \iota\, 0_{v,k} :$$

$$\mathfrak{O}_{h,k,u,v,m,n} : p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix} .\equiv .\, \iota\,[\mathrm{Ops}\,(u,v) \cap f \,\varepsilon\, \{f 0_{u,h} = 0_{v,k}\,.\, fm = n :$$

$$x, y \,\varepsilon\, u\,.\, \mathfrak{O}_{x,y}\,.\, f(x\,h\,y) = (fx)\; k\; (fy)\}].$$

Si dimostra facilmente (7), ed è ben noto, che la classe entro [ ] è una Cls_1 [pag. 70] e quindi la proporzionalità considerata esiste ed è univocamente determinata. Risulta pure che

(2) $$\mathrm{Hp}\,(1)\,.\,\mathfrak{O}_{h,k,u,v,m,n}\,.\; p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix} \varepsilon\, \mathrm{Ops\ Rcp}\,(u, v)$$

(3) $$\mathrm{Hp}\,(1)\,.\,\mathfrak{O}_{h,k,u,v,m,n}\,.\; \left\{ p\begin{pmatrix} u, h, m \\ v, k, n \end{pmatrix} \right\}^{-1} = p\begin{pmatrix} v, k, n \\ u, h, m \end{pmatrix}$$

e che per $u = v$, $h = k$, $m = n$ la proporzionalità è una *identità*.

4. Conviene indicare con un simbolo speciale la proporzionalità (cfr. n. 2, (3)) che allo *zero* ed *uno* di $\mathrm{Q}_0\,(u, h)$ fa corrispondere lo *zero* ed *uno* di $\mathrm{Q}_0\,(v, k)$. Si porrà

(1) $$h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\; h\,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\; k : \mathfrak{O}_{h,k,u,v} :$$

$$p_{u,h,v,k}\,.\equiv .\, p\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_0\,(u, h), h, 1_{u,h} \\ \mathrm{Q}_0\,(v, k), k, 1_{v,k} \end{pmatrix}.$$

Si può ora definire la classe *assoluta*, Q_0, dei *numeri reali* ponendo

(2) $$\mathrm{Q}_0\,.\equiv .\,\mathrm{Ops} \cap x \,\varepsilon\, [h \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; u \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\; h\,.\, \mathfrak{O}_{h,u}$$

$$\exists\, \mathrm{Q}_0\,(u, h) \cap a \,\varepsilon\, \{k \,\varepsilon\, \mathrm{Oper.}\; v \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\; k\,.\, \mathfrak{O}_{k,v}\,.\, x\,(v\,;k) = p_{u,h,v,k}\, a\}]$$

(*) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(7) C. Burali-Forti, *Teoria delle Grandezze* [Formulaire de Mathématiques, T. I, pp. 28-57; Rivista di Matematica, vol. III, pp. 76-101 (1893)].

e ogni Q_0 risulta essere Ops per coppie $(v ; k)$ tali che k è operazione e v è classe di grandezza omogenea rispetto a k.

Si definisce la somma, $+$, per i Q_0 assoluti ponendo

(3) $$x , y \varepsilon Q_0 : \supset_{x,y} : x + y . = . \imath [Q_0 \cap z \ni \{h \varepsilon \text{Oper. } u \varepsilon \text{Grand } h . \supset_{h,u} . z(u ; h) = x(u ; h) +_{u,h} y(u ; h)\}]$$

(perchè $p_{u,h,u,h}$ è una identità) e risulta

(4) $$Q_0 \varepsilon \text{Grand} + .$$

Si possono definire lo *zero*, 0, e l'*unità*, 1, assoluti di Q_0 ponendo

(5) $$0 . = . \imath [Q_0 \cap x \ni \{h \varepsilon \text{Oper } v \varepsilon \text{Grand } h . \supset_{h,u} . x(u, h) = 0'_{u,h}\}]$$

(6) $$1 . = . \imath [. . . . . 1_{v.h} . . .].$$

In modo ovvio si ottengono le classi assolute N_0, R_0 degli *interi* e dei *razionali*, insieme ai simboli assoluti 2, 3, ..., e loro derivati, con i quali si esprimono i Q_0. È chiaro che

(7) $$h \varepsilon \text{Oper} . u \varepsilon \text{Grand } h . \supset_{h,u} . Q_0(u, h) = x(u ; h) \mid x \text{`} Q_0$$

cioè da ogni simbolo fisso, x, indicante un particolare Q_0 assoluto, si ottiene il $Q_0(u, h)$ corrispondente con la notazione $x(u ; h)$, e ciò per ogni x di Q_0 [8]. Inoltre si ha ovviamente

(8) $$\text{Hp}(7). x, y \varepsilon Q_0 . \supset_{h,u,x,y} . x(u ; h) +_{u,h} y(u ; h) = (x + y)(u ; h) .$$

Il prodotto, $\times$, per i Q_0 assoluti si definisce così. Si definisca, come d'uso [pag. 169], $x \times y$ quando $x, y \varepsilon N_0$, indi quando $x, y \varepsilon R_0$ non entrambi N_0, infine quando $x, y \varepsilon Q_0$ non entrambi R_0 ponendo $x \times y = 1'(a \times b)$ ove a, b sono classi di R_0 tali che $x = 1'a$, $y = 1'b$. Si avranno per il *prodotto*, $\times$, le ordinarie proprietà e potrà esser definito il *quoto*, $/$, pure con gli ordinari metodi. La teoria dei Q_0 assoluti è così stabilita [9].

Giova osservare che i Q_0, definiti dalla (2) non sono Ops $(u ; u, u)$, ove u è Grand h generica, e neanche è possibile (cfr. [8]) assegnare ad essi, con definizione, tale proprietà per seguire l'uso comune secondo il quale si scrive semplicemente xa al posto di $x(u ; h)a$ ove $x \varepsilon Q_0$ e $a \varepsilon u$ [10].

[8] Gli elementi, ad es., di $N_0(u, h)$ sono indicati da

(a) $$0(u ; h) , 1(u ; h) , 2(u ; h) , 3(u ; h) , ...$$

Per le classi ${}_1C$, C_1 (cfr. [4]) s'ha, ad es.,

$$2({}_1C ; h)(1 ; 1) = (1 ; 2) , 2(C_1 ; k)(1 ; 1) = (2 ; 1) ,$$

il che prova che nelle (a) *non* si possono sopprimere u, h perchè altrimenti si avrebbe $2(1 ; 1) = (1 ; 2)$, $2(1 ; 1) = (2 ; 1)$, il che è un assurdo essendo $(1 ; 2) - = (2 ; 1)$ (cfr. [2]).

[9] La (2) dà i Q_0 assoluti in modo diverso, più semplice e rigoroso, di quello seguito nella Nota del 1915 (cfr. [1]).

[10] Se $x, y \varepsilon Q_0$ si potrà scrivere, seguendo l'uso comune, xy al posto di $x \times y$, ma solo come notazione *abbreviata* e non come notazione *effettiva*, altrimenti ogni Q_0

5. Dalle precedenti osservazioni risulta che il simbolo Grd [pag. 381, (5)] è privo di alcune delle proprietà che nelle pp. 381-409 di L. M. gli sono state attribuite. Ecco i cambiamenti generici che occorre fare.

a) Volendo, come è opportuno, mantenere a Grd il significato di « grandezza omogenea *assoluta* », a pag. 381 si cambi (5) e Grd in (5′) e Grd′ « grandezza omogenea *relativa* ad una operazione ». Le classi ${}_1C$, C_1, F, G (cfr. [4]), Q_0, $+Q_0$ sono delle Grd′.

b) Le ordinarie grandezze *geometriche* (lunghezza, ...), o *fisico-meccaniche* (massa, lavoro, ...) sono enti per i quali è stabilita a *priori* la *condizione di uguaglianza* e la operazione *somma*, dipendenti *soltanto* da proprietà geometrico-fisico-meccaniche e non dalla particolare definizione nominale ($\equiv$) di esse [pp. 298-311]; esse, peraltro, si definiscono [pag. 298 e seg.] nominalmente insieme alla somma. — Queste classi di grandezze, insieme alla relativa operazione somma (cfr. [1]) formano appunto la classe Grd « grandezza omogenea *assoluta* » che interessa introdurre e che *riteniamo definita* dalle condizioni sopra esposte. Una definizione nominale ($\equiv$) di Grd, simbolica, è possibile ma presenta alcune difficoltà formali che ora non intendiamo affrontare. Ci basti per ora ritenere che se $u, v \varepsilon$ Grd aventi a comune almeno un elemento, esse sono identiche. Inoltre se $u \varepsilon$ Grd è da considerarsi *una sola* operazione *somma* che, senza inconvenienti formali, può essere indicata con l'*unico* simbolo $+$.

c) Stabilito quanto è indicato in *b*), segue che la definizione di Q_0 [pag. 388] vien sostituita dalla (2) del n 4 di questa Nota; ma, lo si noti, i Q_0 si ottengono sempre dalle grandezze e gli N_0, R_0 come casi particolari dei Q_0. — La definizione euclidea dei Q_0 [pp. 399-406] si cambierà nella definizione dei Q_0 (u, h), sostituendo a Grd il nuovo simbolo Grd′ (cfr. *a*), ponendo esplicita la ipotesi $h \varepsilon$ Oper, $u \varepsilon$ Grand h e conservando ovunque gli indici u, h come nelle (1) (2) (3) delle pp. 400, 401 di L. M. — Il teorema di pag. 406, n. 1, L. M. è implicitamante contenuto nella definizione, *b*), di Grd. — Ecc.

d) Se $u \varepsilon$ Grd, $a \varepsilon u$, $x \varepsilon Q_0$, si può, per seguire l'uso comune, porre $x\, a \equiv x\,(u, +)\, a$ e dopo ciò i Q_0 assoluti risultano Ops per gli u qualunque sia la classe u appartenente a Grd; notando che $Q_0 - \varepsilon$ Grd. — Poste ancora le (6), (7) di pag. 381, L. M., col nuovo significato di Grd, e se $x \varepsilon$ grd − Zero, allora $Q_0\, x$ indica (cfr. n. 1) una sola classe di Grd e precisamente « grandezza omogenea con x ». — Ecc.

---

sarebbe Ops e Opd per i Q_0 (cfr. n. 1, [6]). — Inoltre se ai Q_0 si assegnasse la proprietà di essere Ops $(u\,;u, u)$ si avrebbe, ad es, (cfr. [2]), considerando i $+Q_0$,

$$3 + 5 = 8 \text{ e anche } 3 + 5 = 3\,(+5) = +15,$$

e si avrebbe così un assurdo.

Micologia. — *Un Ifomicete dai conidi mesoendogeni: Menispora microspora n. sp.* (1). Nota del dott. Beniamino Peyronel, presentata dal Socio prof. R. Pirotta (2).

Durante le mie ricerche sul marciume nero delle castagne, prodotto dalla *Rhacodiella Castaneae*, ho avuto occasione di osservare un gran numero di funghi interessanti, non tanto per la loro azione patologica, trattandosi per lo più di specie saprofitarie, quanto per le loro particolarità morfologiche e biologiche. In questa breve Nota voglio appunto dare una sommaria descrizione d'un Ifomicete, il quale mi sembra degno d'essere additato all'attenzione dei micologi, non tanto perchè si tratta, com'io credo, di specie nuova, quanto perchè in esso è facile ad osservarsi un modo di produzione dei conidî, che ritengo non sia ancora stato da altri descritto.

Il fungo in questione forma alla superficie della buccia esterna delle castagne delle minute, diffuse macchie vellutate, bruno-olivacee, cosparse come d'una finissima pruina bianca (formata dai conidî), poco percettibili ad occhio nudo, perchè spiccano pochissimo sul colore della buccia stessa.

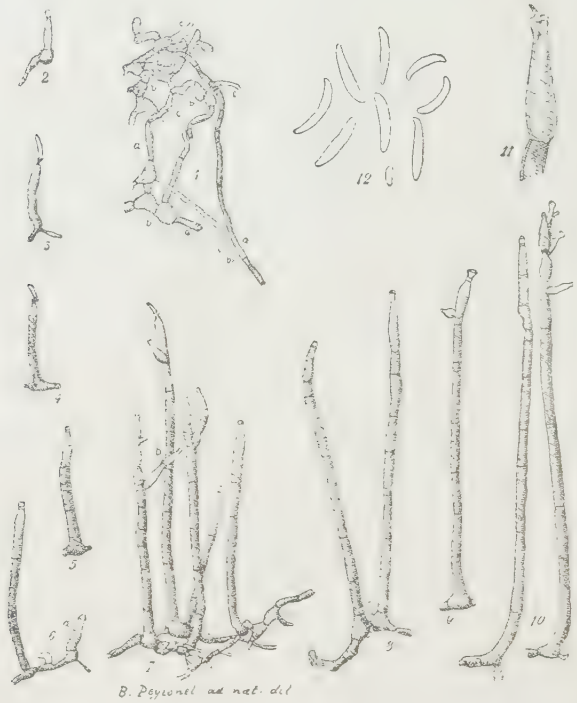
L'esame microscopico ci fa tosto riconoscere nel nostro fungillo una di quelle specie cui i vecchi micologi sistematici attribuivano un *mycelium subnullum*, o *hyphae parcae, nullae vel obsoletae*, quali le *Chalara*, le *Menispora*, ecc. Infatti le ife miceliche superficiali sono poco sviluppate; esse sono di color bruno-olivaceo, settate, scarsamente ramificate, assai sottili, misurando appena 1,5-3 μ di diametro (fig. 1 *a*); qua e là, però, specialmente attorno alla base dei conidiofori, esse si ingrossano bruscamente in articoli irregolarmente poligonali, appiattiti, spesso combacianti gli uni cogli altri pei loro margini, come le mattonelle d'un pavimento (fig. 1 *b*), e aderenti strettamente al sustrato. Le ife superficiali mandano nello spessore della buccia abbondanti filamenti micelici sottilissimi, scarsamente settati, molto rifrangenti e che si distinguono difficilmente se non si ricorre ad opportune colorazioni artificiali, come, ad esempio, col Bleu Poirrier in acido lattico (fig. 1 *c*). Dalle ife brune superficiali, e specialmente dagli articoli appiattiti, s'innalzano i conidiofori, anch'essi bruno-olivacei, cilindrici, per lo più alquanto ingrossati a bulbo alla base, settati, subsemplici, portanti all'apice, e spesso anche lateralmente poco sotto questo, delle cellule

(1) Lavoro eseguito nella Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

foggiate a bottiglia, più chiare, che rappresentano gli organi produttori dei conidî o conidiogeni (fig. 7-10).

La lunghezza dei conidiofori è variabilissima, a seconda dell'età e dell'ambiente. Essi, infatti, sono spesso, dapprincipio, ridotti al semplice conidiogeno o a poche cellule sotto questo (fig. 2-6); in generale, però, sono



Menispora microspora Peyr. — Fig. 1, micelio: *a*) ife miceliche superficiali; *b*) articoli miceliari ingrossati, depressi; *c*) ife penetranti nel sustrato. — Figg. 2-3, conidiogeni inseriti direttamente sul micelio. — Figg. 4-10, diverse forme di conidiofori e di conidiogeni; 6*a*), 7*a*), conidiofori in formazione; 7*b*), un conidiogeno ne ha prodotto un altro al suo apice. — Fig. 11, un conidiogeno con un conidio in via di formazione. — Fig. 12, conidî. — (Ingrandimenti: figg. 1-10, 333 diam.; fig. 11, 900 diam; fig. 12, 666 diam.).

più sviluppati e possono raggiungere fino a 200 μ circa di lunghezza; in media misurano 100-150 × 3,5-4,5 μ.

I conidiogeni hanno tipicamente la forma d'una bottiglia terminata da un collo svasato a guisa d'imbuto (*stomidio*, da στόμα, bocca, e εἶδος, aspetto, immagine); in fondo allo stomidio la parete del conidiogeno presenta un ispessimento annulare limitante un minuto forellino centrale (poro). Non di rado il conidiogeno, oltre allo stomidio apicale, ne porta uno o più altri laterali od anche dei conidiogeni più ridotti (figg. 7, 9, 10).

Non sempre lo stomidio è così evoluto, talora esso è ridotto ai minimi termini o manca del tutto, il conidiogeno aprendosi direttamente all'esterno mediante il poro apicale. Quando esso è bene sviluppato, è chiaro il modo di formazione dei conidî; questi vengono prodotti uno dopo l'altro direttamente dal protoplasma del conidiogeno, il quale esce attraverso il poro e si riveste d'una sottile membrana (1). I conidî così formati rimangono molto probabilmente addossati gli uni agli altri, formando dei glomeruli in cima al conidiogeno — come ho qualche volta potuto osservare — qualora non siano divorati e dispersi dagli acari, come avveniva nei miei esemplari. Essi sono solcati, seleniformi, alquanto assottigliati ed acuti inferiormente, superiormente ottusiuscoli, ialini, pieni d'un plasma omogeneo e molto rifrangente, come quello che riempie i conidiofori e conidiogeni in pieno sviluppo; misurano 8-14, per lo più 10-12 × 1,5-2,25 μ (fig. 12). I conidiogeni misurano 15-22, generalmente 18-20 × 3,5-5 μ; quelli secondarî talora inseriti sul principale, solo 7-12 × 3-4 μ.

Il nostro fungillo appartiene manifestamente al genere *Menispora* quale è fissato da Saccardo nella *Sylloge fungorum* (IV, pag. 325), e precisamente al sottogenere *Eumenispora*, comprendente le specie dei conidî senza ciglia, e sembra distinguersi dalle specie finora descritte (almeno quelle di cui si hanno le misure) per la piccolezza dei suoi conidî; sarebbe del resto impossibile ascriverla all'una piuttosto che all'altra specie, data l'assoluta insufficienza delle diagnosi. Propongo il nome di *Menispora microspora* per la nostra specie.

Il modo di formazione dei conidî sopra descritto fu da me ugualmente riscontrato ed illustrato nella *Eriomenella tortuosa* (Corda) Peyr. (2), ma in quel fungillo manca all'apice del conidiogeno uno stomidio bene sviluppato, onde l'origine del conidio direttamente dal protoplasma è meno evidente. Un termine di passaggio tra i conidî così formati, ai quali si può dare il nome di *mesoendogeni*, e quelli schiettamente endogeni, quali si osservano nei generi *Chalara*, *Chalaropsis*, *Sporoschisma*, *Thielaviopsis*, ecc., lo si riscontra nella *Rhacodiella Castaneae*, la quale possiede dei conidiogeni lageniformi generalmente provvisti d'uno stomidio assai sviluppato e dei conidî sferici, assai minuti, che vengono formati dal protoplasma, fuoruscente attraverso il poro, nello stomidio stesso ed in questo raggiungono il loro completo sviluppo prima di venire espulsi all'esterno (3). Conidî mesoendo-

(1) Questo modo di formazione dei conidi ha qualche riscontro in quel fenomeno, a quanto pare assai frequente, che dal Pantanelli fu chiamato « genunazione » del tubo pollinico.

(2) B. Peyronel, *Un Hyphomycète singulier: Eriomenella tortuosa* (Corda) Peyr., Bull. Soc. Mycol. de France, tome XXXV, 1920, pp. 165-182, Pl. VIII-IX.

(3) Cfr. B, Peyronel, *Sul nerume o marciume nero delle castagne*. Le Staz. Sper. Agr. Ital., vol. LII, 1919, pp. 21-41, tav. I-IV.

geni ho ugualmente riscontrato in un gran numero di specie — appartenenti a tutte le famiglie degli Ifali — provviste di ramuli conidiofori differenziati o conidiogeni; anche in alcune forme picnidiche ho potuto accertare che le sporule vengono prodotte allo stesso modo. Tali ricerche, opportunamente approfondite ed allargate, ci porteranno verosimilmente alla conclusione che i conidî si formano sempre nel modo anzidetto tutte le volte che essi vengono prodotti *successivamente* in gran numero sopra conidiogeni differenziati, e che è fondata sopra inesatte osservazioni l'opinione corrente, secondo la quale i conidî, anche in tal caso, si produrrebbero per lo strozzamento e l'isolamento per settazione dell'apice del còndiogeno stesso.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Fisica. — *Sulla teoria dell'effetto Thomson.* Nota del Socio O. M. Corbino (1).

La spiegazione elettronica dell'effetto Thomson riconduce questo fenomeno alla sovrapposizione di due cause. Anzitutto, come conseguenza della diversa pressione elettronica fra i punti del metallo a diversa temperatura, si produrrebbe un afflusso di elettroni dai posti caldi ai posti freddi, e quindi un campo elettrico che ostacola l'ulteriore diffusione degli elettroni medesimi; il movimento della elettricità dovuto a una corrente elettrica che sia inviata nel metallo darà quindi luogo, per effetto di quel campo, a uno sviluppo o ad un assorbimento di calore che si sommerà algebricamente con quello dovuto all'effetto Joule. Inoltre gli elettroni, trasportati dalla corrente in senso opposto al senso di questa, passando da un punto dove la temperatura è $T + dT$ in un altro dove la temperatura è T, sviluppano nel secondo l'eccesso αdT della loro forza viva media rispetto al punto di arrivo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1921.

Per precisare le idee, nel caso della figura, scelto come senso positivo dell'asse x quello della corrente i, e detto X il campo elettrico dovuto alla diffusione, computato positivamente se è nel senso della freccia, la quantità di energia svolta per effetto Thomson dalla corrente i in uno strato di spessore dx cui corrisponde una variazione termica $d\mathrm{T}$ sarà

$$q = -\frac{i}{e}\,\alpha\, d\mathrm{T} + i\,\mathrm{X}\,dx\,. \tag{1}$$

Per valutare X si suole ragionare nel modo seguente (¹). Nello strato di spessore dx gli elettroni sono in equilibrio sotto l'azione del campo X e della differenza di pressione fra le basi; detto n il numero di elettroni per centimetro cubo, e supposta 1 l'area delle basi dello strato sarà

$$\mathrm{X}\,n\,e\,dx - \frac{dp}{dx}\,dx = 0 \tag{2}$$

cioè

$$\mathrm{X} = \frac{1}{n\,e}\,\frac{dp}{dx} = \frac{1}{n\,e}\,\frac{dp}{d\mathrm{T}}\,\frac{d\mathrm{T}}{dx}$$

ma

$$p = \frac{2}{3}\,\alpha\, n\,\mathrm{T}$$

perciò

$$\mathrm{X} = \frac{1}{n\,e}\,\frac{2}{3}\,\alpha\,\frac{d(n\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\frac{d\mathrm{T}}{dx}\,. \tag{2'}$$

Sostituendo nella (1) avremo

$$q = -\frac{i}{e}\,\alpha\, d\mathrm{T} + \frac{i}{n\,e}\,\frac{2}{3}\,\alpha\,\frac{d(n\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,d\mathrm{T}\,.$$

Detto μ il coefficiente dell'effetto Thomson, definito da

$$q = \mu\, i\, d\mathrm{T}$$

si avrà perciò

$$\mu = -\frac{\alpha}{e}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{1}{n}\,\frac{d(n\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\right) = -\frac{1}{3}\,\frac{\alpha}{e}\left(1 - 2\mathrm{T}\,\frac{d\log n}{d\mathrm{T}}\right)\,. \tag{3}$$

Risultando poi dall'esperienza che in tutti i casi μ è molto piccolo rispetto al coefficiente $\frac{1}{3}\,\frac{\alpha}{e}$, se ne deduce che in prima approssimazione dev'essere

$$2\mathrm{T}\,\frac{d\log n}{d\mathrm{T}} = 1$$

e perciò che n deve sensibilmente variare come $\sqrt{\mathrm{T}}$.

(¹) Per es. vedi E. Bloch, *La théorie électronique des métaux*, nel volume *Les idées modernes sur la constitution de la matière*, pag. 169.

A un risultato diverso si perviene se il campo X viene calcolato dalle formole di Lorentz (1) anzichè col metodo sopra esposto.

Si ha infatti da quelle formole, nel caso che esista un flusso di calore ma non una corrente elettrica, che il campo (deducibile dalla accelerazione chiamata X da Lorentz) è dato da

$$X = \frac{m}{e}\frac{d\frac{1}{h}}{dx} + \frac{m}{2eh}\frac{d\log A}{dx}$$

e poichè

$$\frac{1}{h} = \frac{4}{3}\frac{\alpha T}{m} \quad , \quad A = N\sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}$$

si ottiene facilmente

$$X = \frac{1}{3}\frac{\alpha}{e}\frac{dT}{dx}\left(1 + 2T\frac{d\log N}{dT}\right) \tag{4}$$

mentre la formola (2) dà con gli stessi simboli

$$X = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{e}\frac{dT}{dx}\left(1 + T\frac{d\log N}{dT}\right). \tag{5}$$

È naturale che i due diversi valori di X conducano a risultati diversi per il coefficiente μ, e quindi a una legge di dipendenza diversa fra W e T.

Giova ricercare l'origine della differenza che manifestano le formole (4) e (5) ricavate entrambe con ragionamenti apparentemente inattaccabili, e che non dipende, come potrebbe sembrare a prima vista, dal fatto che Lorentz nella sua teoria completa si riferisce alla distribuzione maxwelliana delle velocità. Entra invece in giuoco un'altra delle ipotesi di Lorentz, quella cioè che presuppone gli elettroni distribuiti fra gli atomi metallici praticamente immobili, e considera solo gli urti fra gli elettroni e quegli atomi immobili.

Questa ipotesi equivale ad assimilare lo stato degli elettroni nel metallo non, come si dice comunemente, a quello delle molecole di un gas nella ordinaria teoria cinetica, ma a quell'altro che avrebbe il gas in un recipiente che contenga un corpo pulverulento, cosicchè siano da considerare solo gli urti delle molecole contro i grossi granuli, praticamente fissi, della polvere e non quelli delle molecole fra loro.

Ora per un gas in tali circostanze, se sottoposto a un gradiente termico, non è più vera la nota condizione di equilibrio, che cioè la pressione è eguale in tutti i punti; vale invece come condizione di equilibrio l'altra paradossale che la pressione è in ogni punto proporzionale alla radice qua-

(1) H. A. Lorentz, *Theory of electrons*, pag. 273.

drata della temperatura assoluta. Ne risulta che la formola (2) è per tal caso inesatta, poichè la forza elettrica $X n e dx$ deve equilibrare non la differenza di pressione fra le basi dello strato, ma l'eccesso di questa sulla differenza di pressione che si avrebbe naturalmente se i centri non fossero elettrizzati.

Questa differenza di pressione di equilibrio aneletttrico risulta dalle considerazioni di Knudsen; si ha invero

$$\frac{p+dp}{p} = \sqrt{\frac{T+dT}{T}}$$

e perciò

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

da cui

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}\frac{p}{T}\frac{dT}{dx} = \frac{1}{3}n\alpha\frac{dT}{dx}.$$

Questo gradiente naturale della pressione va sottratto da quello che si ha globalmente per la causa anzidetta e per lo stato elettrico dei centri: pertanto la (2) va modificata come segue

$$X e n = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{3}n\alpha\frac{dT}{dx} = \frac{dp}{dT}\frac{dT}{dx} - \frac{1}{3}n\alpha\frac{dT}{dx}.$$

Se ne deduce, poichè $p = \frac{2}{3}n\alpha T$,

$$X = \frac{\alpha}{3e}\left(1 + 2T\frac{d\log n}{dT}\right)\frac{dT}{dx} \qquad (4)$$

cioè la stessa formola cui perviene Lorentz. Inversamente si può verificare che se nelle formole di Lorentz si pone eguale a zero la carica elettrica dei centri mobili, con che si realizza il caso di un gas distribuito in una massa pulverulenta, a un gradiente termico corrisponde una naturale diseguaglianza di pressione conforme alla relazione di Knudsen.

L'uso della (4) invece della (5) per il calcolo di μ dà

$$\mu = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{e}\left(1 - T\frac{d\log n}{dT}\right)$$

e perciò se fosse μ piccolissimo rispetto al coefficiente $\frac{2}{3}\frac{\alpha}{e}$, si dovrebbe dedurne

$$T\frac{d\log n}{dT} = 1$$

e quindi un numero di elettroni proporzionale alla temperatura anzichè alla radice quadrata di questa. Ora è noto che questi criterî di deduzione della legge di variazione di n con T sono poco sicuri; è certo però che le notevoli variazioni, con la temperatura, del coefficiente di Hall, che è inversamente proporzionale a n secondo la teoria elettronica, non rendono improbabile un così rapido mutamento di n con T per i metalli a coefficiente Thomson molto piccolo.

Comunque premeva mettere in evidenza che la concezione del Lorentz conduce ad assimilare gli elettroni nel metallo a un gas in un corpo poroso, con tutti gli effetti anormali che ne dipendono, e dei quali bisogna tenere il debito conto.

Chimica applicata. — *Sulla presenza del manganese nella gomma greggia e sull'origine della peciosità* (1). Nota del Corrisp. G. Bruni e di C. Pelizzola (2).

È ben noto che nella gomma cruda si manifesta talvolta, durante la conservazione, un'alterazione per la quale essa si presenta molle, adesiva e in certi casi si trasforma addirittura in una massa vischiosa e quasi fluente.

Questa alterazione si presenta quasi esclusivamente nelle qualità inferiori di gomma, specialmente in quella che proviene dalle piantagioni sotto forma di *crêpe*, e particolarmente negli *scrap-crêpes* ed *earth crêpes*, ossia in quelli che sono preparati dalle porzioni di lattice che gocciolano sul tronco e per terra e i cui coaguli sono raccolti e lavorati a parte.

Questa alterazione viene chiamata dagli inglesi *tackiness* e dagli olandesi *pekkigheid*. Quest'ultima espressione indica la somiglianza esteriore colla pece; anche i francesi chiamano la gomma così alterata *caoutchouc poisseux*. Noi seguiremo questo esempio chiamando *peciosa* la gomma alterata e *peciosità* il fenomeno.

Sulla natura del fenomeno si è molto discusso ed il problema non è ancora chiarito. È certo che esso è accompagnato da una ossidazione e da una depolimerizzazione; ma quale di questi due fatti sia il primario e quale il conseguente non è deciso.

Quanto all'origine si sono invocate le più svariate cause: azione di microrganismi, presenza di diversi agenti chimici, azione della luce ecc. Si è oggi generalmente concordi nel ritenere probabile che vi siano diversi tipi di peciosità determinati da cause diverse.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli, Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1921.

Per una esposizione completa dello stato attuale della questione rimandiamo ai recenti e autorevoli libri di O. De Vries, *Estate Rubber*, Batavia, 1920, pag. 361; e di G. S. Whitby, *Plantation Rubber*, London, 1920, pag. 100.

Da qualche tempo noi abbiamo iniziato ricerche allo scopo di studiare intimamente la natura fisico-chimica dei cambiamenti causati dalla peciosità: questo lavoro non è ancora terminato e i risultati saranno pubblicati a suo tempo; esso ci ha condotto però alla scoperta di alcuni fatti sull'*origine* della peciosiià che noi crediamo non siano privi di interesse e che formano il soggetto della presente Nota.

Nel corso delle nostre esperienze noi cercammo di riprodurre artificialmente la peciosità. È ben noto che essa può essere provocata dalla presenza di composti di rame, ma altre sostanze possono essere usate con successo, così ad es. il biossido di manganese è un agente assai efficace a questo scopo. Thomson e Lewis (« Mem. Manchester Lit. and Phil. Soc., 1891, *4* [4] 266) hanno stabilito che il biossido di manganese mescolato alla gomma ne causa la totale deteriorazione se la mescolanza viene scaldata per 10 giorni a 140° F. (= 71° C.).

Noi abbiamo ottenuto i migliori risultati con biossido di manganese colloidale preparato precipitando una soluzione di permanganato potassico con tiosolfato sodico (vedi Newton Friend, *A Text book of inorganic Chemistry*, vol. VIII, M. Doncaster, London, 1915, pag. 285). Quando 1 °/₀ di questo biossido è mescolato con della gomma e la mescolanza è tenuta a temperatura ambiente (16°-20°), la peciosità si manifesta ben presto e dopo qualche settimana la gomma è molto appiccicaticcia, quasi fluente.

Avendo trovato che il biossido di manganese è un agente così energico nel provocare artificialmente la peciosità, si presentò alla nostra mente l'ipotesi che allo stesso agente si potesse in molti casi attribuire l'origine della peciosità naturale. Questa presunzione era confortata dal fatto della grande diffusione dei composti del manganese, sia nel suolo, sia negli organismi viventi e della ben conosciuta attività di minime quantità di questo elemento. Questo ultimo punto è stato illustrato da varii autori e particolarmente dalle classiche ricerche di G. Bertrand (per un riassunto su questo argomento vedi: D. Olaru, *Rôle du manganèse en agriculture*, Paris, Baillieres, 1920).

Circa la presenza normale del manganese nella gomma cruda assai poco è conosciuto: le poche osservazioni fatte dai primi autori sopra la sua influenza sulla peciosità avevano dato risultati negativi. Così De Vries (*Estate Rubber*, pag. 366) dice che traccie di manganese aggiunte in forma di *sali* di manganese al lattice o usate come permanganato potassico a lavare e disinfettare i fogli di gomma cruda non sono note come causa di peciosità.

Entro questi limiti noi non possiamo contraddire l'asserzione dell'autore ora citato. Il permanganato potassico sodico è invece attivissimo per causare la tackiness, come si può aspettare da un agente ossidante così potente.

K. Gorter, *Med. Rubber*, II, pag. 48; *Rubber Rec.*, 1914, pag. 388, dice di aver trovato la stessa piccolissima quantità di manganese nelle parti peciose e in quelle sane di uno stesso foglio. Noi non intendiamo contestare questo singolo caso, per quanto l'esperienza da noi fatta sulla grandissima maggioranza dei casi esaminati ci porti ad una conclusione opposta.

Il manganese può essere riconosciuto e determinato con sufficente accuratezza anche se presente in piccolissima quantità. Noi abbiamo seguìto il metodo indicato da G. Bertrand. *Recherches et dosage des petites quantités de manganèse, en particulier dans les substances organiques.* « Bull. Soc. Chim. de France, 4ª serie, vol. 9°, 1911, pag. 351. Il procedimento può essere brevemente riassunto così: i campioni di gomma sono inceneriti, le ceneri vengono fatte bollire con acido solforico diluito. La soluzione viene scaldata con persolfato potassico e nitrato d'argento. Il manganese è così ossidato ad acido permanganico. Questo metodo può facilmente condurre, se non ad una determinazione rigorosa, almeno ad una valutazione colorimetrica attendibile della quantità di manganese presente, confrontando con soluzioni di titolo noto.

I valori riportati più sotto sono il risultato di varie prove effettuate sullo stesso campione. Prove in bianco dimostrarono che i reagenti impiegati non contenevano traccie apprezzabili di manganese.

Abbiamo anzitutto analizzato undici campioni di gomma perfettamente sana scegliendoli fra qualità diverse: para brasiliana, fogli affumicati di piantagione (smoked sheets), crèpes, e slabs (coaguli di gomma maturati). I risultati sono riassunti nella tabella I. Si vede che il manganese è costantemente presente, ma in piccolissima quantità con una media di 0.16 mgr. ogni 100 gr.

TABELLA I.

Campioni di gomma sana.

	Mill. gr. Mn. in 100 gr.
1. Para Brasiliana Soft fine	0.1875
2. Smoked Sheet della nostra piantagione Ulu Tiram (Johore, Malesia Britannica)	0.125
3. Id. della piantagione Seafield (Stat. Malesi Fed.)	0.125
4. Id. della piantagione Koswana (Ceylon)	0.250
5. Id. della piantagione Kahawatte (Ceylon)	0.250
6. Id. della piantagione V. I. C. O. Langsar (Sumatra)	0.125
7. Id. di origine sconosciuta, acquistato a Singapore	0.125
8. Crèpe first latex comperato da Weise, Rotterdam (probabilmente proveniente dalle Indie Olandesi)	0.150
9. Crèpe almost first latex, comperato da Weise, Rotterdam (probabilmente proveniente dalle Indie Olandesi)	0,0625
10. Crèpe da slab della piantagione Kent Estate (S. M. F.)	0.125
11. Slab della nostra piantagione Ulu Tiram (Johore)	0.125
Media	0.16

Abbiamo quindi proceduto all'esame di dodici campioni di gomma peciosa, principalmente crèpes, presentanti diverse gradazioni di peciosità. Taluni di essi li trovammo nei nostri magazzini tra vecchi rimasugli di ori-

gine a noi ignota, altri tra crèpes ordinari recentemente ricevuti da Singapore e comperati su quel mercato, altri infine li dobbiamo alla cortesia del sig. Spoon della Centraal Rubber Station di Buitenzorg, del sig. Wierman del Laboratorio scientifico della S. I. P. E. F. di Kuala Lumpur (Stati Malesi fed.) e della Ditta Weise di Rotterdam. I risultati sono dati nelle tabelle 2 e 3 e possono essere riassunti così: dei sette esemplari presentanti una peciosità profonda e uniforme, sei contengono una quantità relativamente forte di manganese e precisamente dànno una media circa cento volte maggiore di quella trovata negli esemplari sani. L'unica eccezione è data dal n. 7, uno slab di gomma del Congo, che tuttavia ne ha ancora venti volte di più.

Tabella II.

Campioni che presentano una peciosità profonda e uniforme.

	Mill. gr. Mn. in 100 gr.
1. Smoked Sheet dalle Indie Olandesi, donato da Weise	20.00
2. Crèpe bruno dei nostri magazzini, origine ignota	20.00
3. id. id. id.	20.00
4. id. id. id.	20.00
5. Id. dalle Indie Olandesi, donato da Weise, Rotterdam	20.00
6. Crèpe da lavature, Giava, dalla Centraal Rubber Station Buitenzorg . . .	10.00
7. Slab di Congo, donato da Weise	3.75

I campioni di gomma presentanti una peciosità leggera ed irregolare contengono una quantità di manganese intermedia fra quella delle due serie di cui si è parlato sopra, ma che è sempre di otto volte la media di quella della gomma sana. Soltanto il n. 12, un crèpe bruno, che non può propriamente essere chiamato pecioso, e che mostra solo un leggero inizio di adesività, contiene una più bassa proporzione di manganese, che è tuttavia circa il quadruplo della media dei campioni di gomma buona e più del doppio della percentuale massima trovata in queste ultime.

Tabella III.

Campioni che presentano una peciosità leggera e non uniforme.

8. Crèpe chiaro dalle Indie Olandesi, donato da Weise, Rotterdam	2.50
9. id. id. id.	1.00
10. Id., dal sig. Wierman, Kuala Lumpur S. M. F.	1.25
11. Differenti campioni di una partita di crèpe scuro di origine sconosciuta, comperata a Singapore:	
a)	2.50
b)	3.75
c)	3.75
d)	2.50
12. Crèpe bruno di origine ignota, comperato a Singapore presentante solo un leggero inizio di peciosità	0.625

I risultati ci sembrano sufficientemente esaurienti. Naturalmente non intendiamo sostenere che la peciosità sia in ogni caso prodotta dal manga-

nese, ma crediamo di aver provato che la presenza di una sufficiente quantità di questo elemento è in molti, e probabilmente nella maggioranza dei casi, il fattore determinante. Le nostre esperienze proseguono e saremo grati a coloro che ci invieranno esemplari di gomma peciosa per la continuazione di dette esperienze.

Come queste quantità anormali di manganese pervengano alla gomma, se attraverso al lattice o per materiale contaminazione con terra, non è possibile stabilire con certezza. Forse ciò avviene in entrambi i modi: si è già detto che la peciosità è frequente principalmente nelle qualità scadenti di crèpes, come negli *earth-crèpes*, prodotti appunto da lattice che è venuto in contatto con terra. Ci sembra probabile che le minime quantità che si trovano nelle gomme sane derivino da sali manganosi normalmente presenti nel lattice, mentre le quantità più forti che si trovano nelle gomme peciose derivino da inquinamento.

Per quello che riguarda il meccanismo dell'azione degli ossidi di manganese ci riferiamo alla teoria di Bertraud. L'ossido manganoso MnO derivante dall'idrolisi dei sali manganosi agisce come le così dette sostanze auto-ossidanti, cioè reagisce con la molecola di ossigeno O_2 combinandosi con uno dei suoi atomi e lasciando l'altro allo stato libero.

$$Mn\,O + O_2 \rightarrow Mn\,O_2 + O$$

L'atomo di ossigeno allo stato nascente esercita una assai potente azione ossidante. Il $Mn\,O_2$ agisce poi esso pure come ossidante e si riduce a Mn O. Abbiamo quindi un processo ciclico che può continuare indefinitamente.

Accenneremo infine che noi abbiamo trattato taluni campioni di gomma peciosa con alcool al 40 % e sull'estratto ottenuto a freddo abbiamo provato le reazioni degli enzimi ossidanti (ossidasi e perossidasi), ma sempre con risultato negativo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle curve di Bertrand.* Nota di F. Sibirani, presentata dal Corrisp. G. Peano (1).

1. Ch. Bioche (2) ha dimostrato che:

a) *si possono costruire coppie di curve, di cui la prima a flessione costante, la seconda a torsione costante, riferite punto a punto in guisa che le tangenti in punti corrispondenti sono parallele*;

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921

(2) Ch. Bioche, *Sur les courbes de M. Bertrand.* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XVIII, pp. 199-112.

b) *se* $P_1 P_2$ *sono due punti corrispondenti, il luogo delle rette* $P_1 P_2$ *è una sviluppabile*;

c) *il luogo dei punti* P *che dividono il segmento* $P_1 P_2$ *in un rapporto costante è una curva di Bertrand.*

M. Tajima (1), trovando estremamente innaturale la dimostrazione di Bioche, dà una diretta dimostrazione della proprietà c), presupponendo dimostrata la a).

Dell'intero enunciato do qui una semplicissima dimostrazione.

2. Sia γ_1 una curva qualunque, γ_2 una curva riferita punto a punto a γ_1 in guisa che le tangenti in punti corrispondenti P_1, P_2 siano parallele: in altre parole, γ_2 è una trasformata di Combescure (2) della γ_1.

Il luogo dei punti che dividono il segmento $P_1 P_2$ *nel rapporto costante* $p : q$ *è una trasformata di Combescure.*

Codesto luogo è descritto dal punto P per cui:

$$p(P - P_1) + q(P - P_2) = 0. \tag{1}$$

Derivando rapporto ad s_1, arco di γ_1, e tenendo presente che per ipotesi è $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$, si ha:

$$(p+q)\frac{ds}{ds_1}\mathbf{t} = \left(p + q\frac{ds_2}{ds_1}\right)\mathbf{t}_1, \tag{2}$$

ciò che dimostra l'asserto.

3. Ricordiamo che se P_1 descrive una curva γ_1, il punto:

$$P_2 = O + \int \mathbf{t}_1 f(s_1)\, ds_1 \tag{3}$$

descrive una curva γ_2 che è trasformata di Combescure di γ_1 e sussistono le relazioni: $ds_2 = f(s_1)\, ds_1$, $\varrho_2 = f(s_1)\,\varrho_1$, $\tau_2 = f(s_1)\,\tau_1$.

Allora è chiaro che se γ_1 è una curva a flessione costante $1/\varrho_1 = 1/h$ e di torsione $1/\tau_1$, la curva γ_2 descritta da:

$$P_2 = O + k\int \frac{\mathbf{t}_1}{\tau_1}\, ds_1 \tag{4}$$

è una curva a torsione costante $1/\tau_2 = 1/k$.

Con ciò è dimostrata la parte a) dell'enunciato.

4. La rigata luogo delle rette $P_1 P_2$ è descritta dal punto:

$$Q = P_1 + u\,(P_2 - P_1), \tag{5}$$

u variabile numerica.

La condizione di sviluppabilità è (3):

(1) M. Tajima, *On Bertrand Curves.* The Tôhokn Mathematical Journal, vol 18, pp. 128-133,

(2) Bianchi L., *Lezioni di geometria differenziale*; 2ª ediz., Pisa, E. Spoerri, 1902, § 20.

(3) C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accademia Militare*; Torino, Petrini, 1912, § 167.

$$\frac{dP_1}{ds_1} \times (P_2 - P_1) \wedge \frac{d}{ds_1}(P_2 - P_1) = 0$$

che è manifestamente verificata, perchè il primo e terzo vettore sono paralleli.

Con ciò è dimostrata la parte b) dell'enunciato.

5. Sia γ il luogo del punto P che divide il segmento $P_1 P_2$ nel rapporto $p : q$. Sussiste la (2) in cui deve farsi

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{k}{\tau_1},$$

epperò dalla (2) stessa si trae:

$$(p+q)\frac{ds}{ds_1} = \pm\left(p + q\frac{k}{\tau_1}\right),$$

e quindi:

$$\frac{ds}{ds_1} = \pm\frac{p\tau_1 + qk}{\tau_1(p+q)}.$$

Allora:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \pm\frac{p\tau_1 + qk}{\tau_1(p+q)}, \quad \frac{\varrho}{h} = \pm\frac{p\tau_1 + qk}{\tau_1(p+q)},$$

ed eliminando τ_1:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{qk}{ph}\frac{1}{\tau} \pm \frac{p+q}{ph} = 0,$$

ciò che mostra che γ è una curva di Bertrand.

6. Per avere lo spigolo di regresso della rigata (5) bisogna determinare u in funzione di s_1 in modo che $\frac{dQ}{ds_1}$ sia parallelo a $P_2 - P_1$. Ora poichè

$$\frac{dQ}{ds_1} = \left\{1 + u\left(\frac{k}{\tau_1} - 1\right)\right\}\mathbf{t}_1 + \frac{du}{ds}(P_2 - P_1),$$

ne risulta:

$$u = \frac{\tau_1}{\tau_1 - k}$$

e lo spigolo di regresso è descritto dal punto:

$$Q = P_1 \pm \frac{\tau_1}{\tau_1 - k}(P_2 - P_1).$$

Matematica. — *Un'espressione nuova dei numeri bernoulliani.* — Nota di Alberto Tanturri, presentata dal Corrispondente G. Peano (1).

In questo scritto, servendomi dei risultati della mia Nota: *Determinazione della derivata n^{ma} di $tg\,x$ e di $cot\,x$*, che sarà tra breve pubblicata nel Bollettino di Mat. del Conti, giungo a una nuova espressione dei numeri bernoulliani, più semplice di quelle finora conosciute.

1. Se x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di $\pi/2$:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{1}^{n} \beta_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

dove $\beta_n = 2^{2n}(2^{2n}-1)\,B_n/2n$, con $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, ..., e, in generale, $B_n = n^{mo}$ numero bernoulliano, secondo la notazione del Binet, adottata, per es., dal *Formulario*, e, più recentemente, dal Dini, nelle sue *Lezioni di analisi ecc.* Lo sviluppo del Maclaurin dà poi che $\beta_n = (D^{2n-1}\operatorname{tg} x)_0$, cioè al valore nel punto zero della derivata $(2n-1)^{ma}$ di $\operatorname{tg} x$: che, per la Nota citata, scrivendo P_n al posto di $P_{n+1,n}$, =

$$P_n^0\, n^{2n-1} - P_n^1 (n-1)^{2n-1} + P_n^2 (n-2)^{2n-1} - \cdots + (-1)^{n-1} P_n^{n-1};$$

con $P_n^0 = 1$;

$$\text{e } P_n^{2\lambda-1} = \sum_{0}^{\lambda-1} {}_k (-1)^k 2^{2\lambda-2k-1} \binom{n-\lambda+k}{k} \binom{n+\lambda-k}{2\lambda-2k-1},$$

$$\text{e } P_n^{2\lambda} = \sum_{0}^{\lambda-1} {}_k (-1)^k \frac{2^{2\lambda-2k-1}}{\lambda-k} \binom{n-\lambda+k}{k} \binom{n+\lambda-k}{2\lambda-2k-1} (n+1) + (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda},$$

per $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. Si noti che le tre relazioni scritte posson servire a definire anche P_0^0 come uguale a 1; e $P_0^1, P_0^2, P_0^3, \ldots$, come tutti uguali a 2, perchè, in ogni caso, per $n = 0$, non resta nei secondi membri che il termine della sommatoria corrispondente a $k = \lambda - 1$, e cioè $(-1)^{\lambda-1} 2 \binom{-1}{\lambda-1}$, che $= 2$; e, finalmente, quando $n = 1, 2, 3, \ldots$, a definire P_n^h, non solo per h da zero a $n-1$, ma anche per tutti i valori superiori dell'intero h. Avrò, per es., che, per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$P_n^1 = 2(n+1);\ P_n^2 = 2(n+1)^2 - n;\ P_n^3 = 8\binom{n+2}{3} - 2(n^2-1);$$

$$P_n^4 = 4\binom{n+2}{3}(n+1) - 2(n^2-1)(n+1) + \binom{n}{2};\ \ldots;$$

e già queste prime espressioni non hanno, come si vede, veste molto semplice.

(1) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

2. Ma nella stessa Nota ho dimostrato che

$$P^h_{n+1} = P^{h-2}_n + 2P^{h-1}_n + P^h_n ,$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $h = 2, 3, 4, \ldots$. Si costruisca, dunque, quel che il Lucas (ved. *Théorie des nombres*, pag. 5) chiama una *tavola di somme*, con questa legge: « nella verticale d'indice zero, che conterrà $P^0_0, P^0_1, P^0_2, \ldots$, si scrivan tutti 1; nell'orizzontale d'indice zero, che conterrà $P^0_0, P^1_0, P^2_0, \ldots$, si scrivan, dopo l'1, tutti 2: nella verticale d'indice 1, che conterrà $P^1_0, P^1_1, P^1_2, \ldots$, si scrivan, dopo il 2, i numeri $4, 6, 8, \ldots$. Poi, se a, b e c son tre numeri consecutivi d'un'orizzontale, si scriva, sotto c, il numero $a + 2b + c$ ». E all'incrocicchio della verticale d'indice h con l'orizzontale d'indice $n + 1$ si troverà il numero P^h_{n+1}.

P	0	1	2	3	h
0	1	2	2	2	
1	1	4	7	8	
2	1	6	16	26	
3	1	8	29	64	
n					

3. Possiam ora osservare che $a + 2b + c = (a + b) + (b + c)$, e comprender quindi la tavola dei P in un'altra di numeri Q, costruita così: « nella prima verticale e nella prima orizzontale tutti 1: poi, se a e b son due numeri consecutivi d'un'orizzontale, scrivo, sotto b, il numero $a + b$ ». Si avrà che $P^h_n = Q^h_{2n+1}$, se così indico il Q che è all'incrocicchio della verticale d'indice h con l'orizzontale d'indice $2n + 1$.

Q	0	1	2	3	h
0	1	1	1	1	
1	1	2	2	2	
2	1	3	4	4	
3	1	4	7	8	
4	1	5	11	15	
5	1	6	16	26	
6	1	7	22	42	
7	1	8	29	64	
n					

4. Ma questa tavola dei Q si ottiene dal triangolo aritmetico, sostituendo a ogni numero di esso, compresi gli zeri, la somma del numero che si considera con tutti i precedenti nella stessa orizzontale. Sicchè Q^h_{2n+1}, e quindi anche P^h_n,

$$= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{h};$$

cioè alla somma dei primi $h + 1$ coefficienti dello sviluppo di $(1 + x)^{2n+1}$, per la quale, dice il Lucas, a pag. 62 del libro citato, « il n'existe pas de formule simple ».

5. Ed ecco dunque una semplicissima espressione per i coefficienti β_n. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\beta_n = & \binom{2n-1}{0} \times n^{2n-1} \\
& - \left[\quad " \quad + \binom{2n+1}{1} \right] \times (n-1)^{2n-1} \\
& + \left[\quad " \quad + \quad " \quad + \binom{2n+1}{2} \right] \times (n-2)^{2n-1} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{n-1} \left[\quad " \quad + \quad " \quad + \quad " + \ldots + \binom{2n+1}{n-1} \right] \times 1^{2n-1} \qquad (1).
\end{aligned}$$

E questa stessa espressione dà lo sviluppo d'un determinante, che si può chiamare di Haussner; e che si trova, per es., a pag. 177 dei *Determinanti* del Pascal, e anche (con però qualche errore di stampa) a pag. 489, vol. I, del *Repertorio ecc.* dello stesso Autore, e anche, trasformato in determinante di fattoriali, a principio della Nota: *I nuovi numeri pseudo-tangenziati* (nei Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, 28 aprile 1907), sempre dello stesso Pascal.

6. L'espressione di B_n, di cui parla il titolo di questo scritto, discende per l'appunto dalla (1), moltiplicando per $2n/2^{2n}(2^{2n}-1)$.

7. Possiam anche nella stessa (1) mettere in evidenza i fattori $\binom{2n+1}{0}$, $\binom{2n+1}{1}$, ...; ed esprimere poi le somme $1^{2n-1} - 2^{2n-1} + 3^{2n-1} - \cdots$ coi numeri del Genocchi, o con quelli del Bernoulli (ved. Lucas, libro citato, pag. 250): avremo così nuove relazioni tra quest'ultimi numeri, le quali qui non scrivo, perchè meno semplici delle molte già note. Per me, mi son fatto ardire d'esibir questo lavoro, con l'idea di richiamar l'attenzione sulla mia Nota citata in principio: non tanto sul suo risultato finale, quanto per le conseguenze che se ne posson trarre. Forse, sia i numeri bernoulliani che gli euleriani (: $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, ...) ammettono espressioni che ci sfuggono per loro stessa semplicità: osserverò solo che *se*, come in quella Nota, *pongo*

$$D^n \operatorname{tg} x = \sum_r \{(2^{r-1} B_{n,r})(2 \operatorname{tg} x)^{n+1-2r} [1 + (\operatorname{tg} x)^2]^r\};$$

cioè, se pongo: $B_{n,1} = 1$, e $B_{1,n+1} = 0$, per ogni numero naturale n,

e $B_{n,r} = (n+2-2r) B_{n-1,r-1} + r B_{n-1,r}$, per n e r interi maggiori di 1; *la somma*, $\sum_r B_{n,r}$, *di tutti i coefficienti* B (lì da me espressi esplicitamente), *relativi alla derivata* n^{ma}, $= \beta_{\frac{n+1}{2}}$ o ad $E_{\frac{n}{2}}$, *secondochè* n *è dispari o pari*. Ciò si dimostra subito, osservando che $\sec x + \operatorname{tg} x$, e cioè $1 + \beta_1 x + E_1 x^2/2! + \beta_2 x^3/3! + E_2 x^4/4! + \ldots$, $= \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)$: dimodochè $\beta_m = [D^{2m-1} \operatorname{tg}(x/2 - \pi/4)]_0$, ossia, in virtù della mia Nota, a $B_{2m-1,1} + B_{2m-1,2} + \cdots + B_{2m-1,m}$; ed $E_m = [D^{2m} \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)]_0$, ossia a $B_{2m,1} + B_{2m,2} + \cdots + B_{2m,m}$.

Astronomia. — *Sul confronto fra osservazioni visuali e fotografiche delle nebulose.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Corrisp. A. Di Legge (1).

L'uso sistematico della fotografia per lo studio delle nebulose offre oggi il modo di fare degli interessanti confronti con le osservazioni visuali fatte in epoche precedenti all'applicazione della stessa nelle ricerche astronomiche.

È noto che osservazioni e disegni molto apprezzati di nebulose sono stati eseguiti da G. Tempel coll'equatoriale di Amici all'Osservatorio di Arcetri negli anni 1876-79 (2). I disegni gli valsero nel 1879 il premio Reale di Astronomia conferito dall'Accademia dei Lincei e sono rimasti inediti, nonostante l'offerta dell'Accademia stessa di pubblicarli a proprie spese, non avendo mai potuto il Tempel essere soddisfatto dei sistemi di riproduzione allora tentati.

Fotografie di nebulose in modo sistematico sono state eseguite in questi ultimi anni specialmente da Keeler col riflettore Crossley dell'Osservatorio Lick (3) e da Pease col riflettore di 60 pollici dell'Osservatorio di Monte Wilson, e fra queste ultime si trova un certo numero di nebulose disegnate da Tempel.

Avendo io avuto la possibilità di avere dal sig. Pease alcune diapositive delle sue fotografie potei con esse e con le riproduzioni pubblicate nelle *Contributions* di Monte Wilson, nn. 132 e 186 confrontare i disegni originali di Tempel (4). Le scale usate generalmente da Tempel per i suoi disegni sono di $1^{mm} = 15''$ e di $1^{mm} = 10''$, quelle delle fotografie di Monte Wilson sono date volta per volta a seconda degli ingrandimenti dell'originale e sono all'incirca dello stesso ordine; accompagnano inoltre gli uni e le altre descrizioni che facilitano i confronti.

(1) Presentata alla seduta del 6 marzo 1921.

(2) Cfr. W. Tempel, *Ueber Nebelflecken.* Abhandl. der Kgl. Böhm. Gesell. der Wissen., VII, Folge, 1 Band; i volumi delle Astr. Nachr. da 90 a 113, e Schiaparelli, Astr. Nachr., vol. 121, pag. 95.

(3) Publications of the Lick Observatory, vol. VIII.

(4) Questi disegni, in lapis nero su cartoncino bianco, sono raccolti in 22 tavole di proprietà dell'Istituto di Studî Superiori in Firenze e si conservano nell'Archivio del Museo degli antichi strumenti di Fisica e Astronomia di cui è direttore il prof. A. Garbasso. Per sua cortesia l'Osservatorio di Arcetri potè ora avere a prestito la preziosa collezione.

N. G. C. 2245 (1). — Nebulosa di forma irregolare a ventaglio. Il disegno di Tempel è molto simile alla fotografia eseguita da Pease nel 1919 con una posa di 25m. Nel disegno all'estremità boreale della nebulosa è segnata una stella di 12ª gr. che nella fotografia appare come un nucleo molto luminoso lungo circa 30″. Le dimensioni della nebulosa sono pressochè uguali nel disegno e nella fotografia.

N. G. C. 2359. — Nebulosa di forma irregolare. Il disegno corrisponde bene alla fotografia eseguita nel 1917 con 210m di posa. Il braccio allungato verso sud-ovest si estende nel disegno per 6′ dalla stella lucente nell'interno della nebulosa, e 4′,5 nella fotografia. Delle quattro stelle di gr. 9ª in 10ª situate nella parte boreale la terza, che nella fotografia appare attorniata da una viva nebulosità, mostra, rispetto al disegno, uno spostamento in distanza di 18″.

N. G. C. 2976. — Nebulosa a spirale. Misura nel disegno 6′ × 4′, compreso anche un arco di nebulosa seguente boreale che si trova staccato dal complesso principale. Secondo le misure di Pease sulla fotografia eseguita nel 1912 con 180m di posa la nebulosa misura 3′,2 × 1′. Nel disegno la stella di gr. 11ª precedente australe, è a contatto con la nebulosità, mentre ne dista 17″ nella fotografia.

N. G. C. 4216. — Nebulosa a spirale. Nel disegno misura 15′ × 1′ nell'angolo di posizione p = 15°, nella fotografia, eseguita nel 1912 con 90m di posa, 6′ × 1′ in p = 21°. Tempel nota nella sua descrizione che nella parte australe della nebulosa, a 5′ sud del nucleo si vede un rigonfiamento più luminoso di cui non è traccia nella fotografia.

N. G. C. 4206. — Questa nebulosa seguente la 4216 è disegnata e descritta da Tempel come una debole nebulosa a spirale 5′ × 1′, p = 340°. Pease la misura di 4′ × 30′ in p = 1°.

N. G. C. 4567-8. — Due nebulose a spirale. Tempel nota che i due assi maggiori sono inclinati fra loro di 30° a 35°, sulla fotografia lo sono di 46°. Ma del resto quanto a forma e grandezza si riscontra molta somiglianza. Nel disegno la nebulosa che precede misura 3′,3 × 1′,5, la seguente 5′ × 1′,5, nella fotografia si trova rispettivamente 2′ × 1′,5 e 4′ × 1′,5.

N. G. C. 4594. — Nebulosa a spirale. Nel disegno misura 9′ × 4′, nella fotografia 7′ × 1′. Al nord la nebulosa si estende nel disegno molto più che nella fotografia; infatti nel primo la nebulosa comprende la stella boreale di gr. 11ª che ne è completamente staccata nella seconda.

N. G. C. 6818. — Nebulosa planetaria di forma leggermente ellittica. Tempel la disegna con un diametro di 14″, mentre nella fotografia misura 25″. Nel disegno l'angolo di posizione dell'asse maggiore è di circa 40°, mentre nella fotografia è di 9°. La stella che precede al sud la nebulosa è probabilmente variabile; ed infatti mentre nel disegno Tempel la segna di gr. 11ª, egli nota: « È sorprendente che J. Herschel non abbia osservato la stella che precede al sud »; ora nella fotografia essa è appena visibile.

N. G. C. 7008. — Nebulosa di forma ellittica irregolare. Nella fotografia eseguita nel 1914 con 180m di posa misura 95″ × 75″. Non si può fare la misura sul disegno perchè Tempel nota che lo schizzo non è in scala. Tuttavia data la perfetta somiglianza fra disegno e fotografia, è facile rilevare che la nebulosità nel primo si estende su di un'area maggiore che non nella seconda. Ciò si deduce principalmente dal fatto che la stella precedente il centro della nebulosa in angolo di posizione 175° è nel disegno compresa nella nebulosità, mentre nella fotografia ne è distante 7″. Dei tre

(1) J. L. E. Dreyer, *New General Catalogue of Nebulae* etc. Memoirs of the R. A. S., vol. XLIX; per le osservazioni di Tempel, cfr. pag. 11.

nuclei luminosi nell'interno della nebulosa, quello precedente appare molto più luminoso nella fotografia, mentre gli altri due si stimano di uguale intensità nel disegno e nella fotografia. Dal confronto si deduce anche che la posizione relativa fra i nuclei e le stelle comprese nella nebulosa, è mutata per effetto di moto proprio.

Dai confronti risulta prima di tutto la perfezione e fedeltà veramente notevoli dei disegni, quando si pensi che sono stati eseguiti con un equatoriale di 28 cm. di apertura e m. 5,29 di distanza focale, mentre le fotografie sono state eseguite con uno dei più potenti riflettori che esistano, di 152 cm. di apertura e m. 7,60 di distanza focale e con lunghe pose. Si nota inoltre che quasi tutte le nebulose qui confrontate sono state osservate da Tempel di dimensioni maggiori di quelle rappresentate nelle fotografie. Il fatto è interessante ricordando come è composto lo spettro delle nebulose e le ricerche sul loro colore che sono state eseguite con filtri di assorbimento e lastre di diversa sensibilità. Il risultato di queste ricerche è che l'intensità relativa delle righe spettrali varia da nebulosa a nebulosa, e mentre le due righe caratteristiche del così detto *nebulio*, λ 4959 e λ 5007, conservano fra loro un rapporto costante di intensità, variano invece rispetto alle altre righe principali λ 3727, λ 4686, $H\beta$ ed H_α. La nebulosa di Orione studiata in luci monocromatiche mostra una straordinaria intensità della riga λ 3727 in quasi tutte le sue parti fino alle regioni più lontane dal nucleo centrale, soltanto in alcune di esse, come in quella detta di Huygens, le radiazioni nelle righe λ 5007 e H_α sono più intense che nella riga ultravioletta. Fotografie di nebulose [1] fatte con lastre ordinarie, cioè sensibili alle radiazioni dal violetto al bleu-verde, con un massimo di sensibilità a λ 4500, e con lastre ortocromatiche con filtro giallo sensibili alle radiazioni gialle, con un massimo di sensibilità a λ 5500, mostrano che nelle nebulose a spirale, aventi spettri di assorbimento, i nuclei secondarî e le parti diffuse comprese fra i rami delle spirali sono notevolmente più deboli nelle radiazioni gialle che non in quelle bleu; invece i nuclei centrali sono della stessa intensità od anche maggiore nel giallo. Lo spettro delle regioni esterne deve dunque differire da quello centrale in questa classe di nebulose.

Per contrario nelle nebulose planetarie, aventi spettri di emissione, non si trovano notevoli differenze fra le pose bleu e gialle. Queste ricerche fotografiche comparative debbono essere ancora continuate ed estese, ed in unione allo studio spettrale porteranno alla classificazione delle nebulose in modo analogo a quanto si è fatto per le stelle [2]. Per intanto dal confronto fra

(1) F. H. Seares, *Preliminary results on the color of nebulae*. Proceed. of the Nat. Ac. of Sciences. October 1916, Washington.

(2) W. H. Wright, *Outlines of a proposed system of classification of the nebulae by means of their spectra*. Proceed. of the Nat. Ac. of Sciences. December 1915. Washington.

le osservazioni visuali di Tempel e quelle fotografiche è da notare, che le fotografie di Monte Wilson più sopra considerate sono state eseguite con lastre ordinarie la cui sensibilità cessa al bleu-verde. Poichè d'altra parte fotografie delle nebulose a spirale eseguite in luce gialla mostrano, come ha trovato Seares, che non esistono in questo colore radiazioni di notevole intensità per le regioni esterne, non si può invocare il fenomeno di Purkinje per spiegare la maggiore estensione dei disegni di Tempel in confronto alle fotografie, e si deve concludere che tali regioni debbono essere di fatto molto intense nelle radiazioni verdi, probabilmente dunque nelle righe λ 4959 e λ 5007. La sola nebulosa che nei precedenti confronti è stata trovata nel disegno di dimensioni minori è una planetaria, per la quale, come si è detto, l'intensità sembra uniforme in tutto lo spettro.

Notoriamente variazioni di forma delle nebulose nel limitato intervallo di tempo trascorso fra i disegni e le fotografie (in media 38 anni) sono molto improbabili e difficili da accertarsi, pure si è visto che esiste qualche spostamento relativo fra stelle e nuclei. Benchè Tempel non abbia eseguito misure micrometriche, tuttavia egli usò la scala adottata con tale precisione che è difficile poter dubitare della realtà degli spostamenti notati, sui quali si possono basare ulteriori ricerche per lo studio di probabili moti proprî relativi. Certamente è utile che confronti di questo genere vengano estesi a tutte le nebulose disegnate e osservate dal Tempel, e del pari sarebbe desiderabile la pubblicazione delle sue premiate tavole.

Geologia. — *Sulla costituzione geologica della Cirenaica.* II: *Terreni oligocenici, miocenici e postpliocenici.* Nota di G. Stefanini, presentata dal Socio Carlo De Stefani (1).

Oligocene. — I così detti « calcari di Slonta » del Gregory, liberati (come si è visto (2) in una precedente Nota) da quella parte di essi che contiene nummuliti eoceniche, costituiscono un complesso omogeneo, la cui età è oligocenica. Sono calcari nummulitici, brecciole conchigliacee, calcari grossolani bruni, gialli, biancastri o candidi, spesso colorati superficialmente in bruno per fenomeni d'alterazione.

La fauna che vi ho determinato è caratteristica: *Nummulites intermedius* D'Arch., *N. viscus* Ioly et Leym., *Discorbis* sp., *Triloculina* sp., *Echinolampas cherichirensis* Gauth., *Clypeaster biarritzensis* Cott., *Echinodiscus* sp., *Ostrea ventilabrum* Goldf., *O. gigantica* var. *oligoplana* Sacco, *Pecten arcuatus* Br., *Amussiopecten corneus* (Sow.), *Chlamys biarritzensis*

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Rendic. R. Acc. Lincei, vol. XXX, serie 5, 1° sem., fasc. 5, pag. 146.

D'Arch., *Chl. bellicostata* Wood., *Chl cyrenaica* (Newt.), *Cardita Arduinoi* (Brngt.), *C.* sp. aff. *Dunkeri* Phil., *Astarte* cfr. *Bosqueti* Nyst., *Cardium Pallasianum* Bast., *C. oligocenicum* Sacco, *Meretrix dubia* Micht., *Glycymeris oligofaujasi* Sacco, *Protoma ferruminata* Rov., *Xenophora subextensa* Orb., *Archaeolithothamnium* sp. In alto della serie si ha un banco coralligeno con *Antiguastrea alveolaris* (Cat.).

Questi depositi hanno i loro più stretti affini nell'Africa settentrionale stessa, nelle marne e arenarie di Cherichira (Tunisia), di Kef Ighoud, Bel Abbas, Mascara e Boghari (Algeria). La diversità di facies non basta a mascherare le reali affinità faunistiche. Gli strati dell'oasi di Arag' (deserto libico), che il Blanckenhorn includerebbe pure in questo piano, furono giudicati invece priaboniani dal Boussac. In Europa a questi strati corrispondono quelli di Sangonini, di Peonis e Osoppo, di Dego, di Biarritz, di Étampes.

L'Oligocene sormonta gli strati eocenici a Derna e nell'Uadi Buscemel sotto Cirene; forma il tavolato dell'altipiano nella regione di Ras el Hilal, a Labrag, Sidi Jaja, Borgù, Sidi el Homri, Zauia Feidia, Bir Gandula, estendendosi nell'interno fino alla regione ad est dell'Uadi Carruba e tra Msus e l'Uadi Sammelùs. In base a un esame critico del lavoro di Gregory si possono segnare questi terreni anche a Bir Hu, Gaafs a Mudi, Uadi Firya, e poi sopra a Messa, Gasr el Migdum e Uadi Garib.

Miocene inferiore e medio. — I terreni miocenici costituiscono lembi più o meno estesi sull'Oligocene, e si allargano poi a formare l'imbasamento delle pianure costiere di Bengasi verso la Sirtica e di Tobruc verso la Marmarica.

L'esistenza di depositi aquitaniani in questa serie è dimostrata da un dato del Gregory, che tra Birliba e Guba raccolse in un calcare granulare giallicio *Lepidocyclina elephantina* M. Ch. e *Pecten* cfr. *Pasinii* Mngh.

Allo stesso piano ascrive egli i calcari marnosi terrosi, grigi o giallognoli di Cirene, Safsaf, Gasr el Harib. La faunetta di questi depositi, da me esaminata, comprende: *Operculina complanata* Defr. colle var. *costata* D'Orb. e *granulosa* (Leym.), *Schizaster* sp., *Cellepora* sp., *Retepora* sp., *Schizoporella* sp., *Cribrilina radiata* Moll., *Micropora* cfr. *elegans* Canu, *Monopora ampulla* (D'Arch.), *Porella regularis* Reuss, *Terebratula* sp., *Ostrea crassicostata* Sow., *O. frondosa* Serr., *Anomia ephippium* L. var., *Pecten vezzanensis* Oppenh., *Chlamys Zitteli* (Fuchs), *Chl. submalvinae* (Blknh.), *Chl. praescabriuscula* (Font.), *Glycymeris* sp., *Turritella Desmarestina* Bast., *Chrysophrys cincta* Agass.

Il carattere di questa fauna mi pare nettamente langhiano, ove s'intenda questo termine come un equivalente di burdigaliano, includendovi quindi i depositi di *facies* calcarea (*calcaire moellon*, pietra da cantoni di Rosignano, pietra leccese, calcare a Globigerine di Malta).

I « calcari di Bengasi » del Gregory sarebbero un po' più recenti: « Vindoboniano ». Io non conosco, di quella località, che un grosso *Echinolampas* conoclipeiforme specificamente indeterminabile; ho però esaminato fossili di Guba, Druis's, Tert, Eluet Terchi, Gasr Mleis, Settaba, Ed Deflia, appartenenti, pare, allo stesso livello: *Operculina complanata* e var. *costata*, *Schizaster sardiniensis* Cott., *Opissaster* sp., *Membranipora Falloti* Canu, *Pecten* sp. div. ind., *Flabellipecten fraterculus* (Sow.), *Fl,* aff. *burdigalensis* (Lk.), *Lima squamosa* Lk. (juv.), *Xenophora* sp., *Strombus coronatus* Defr., *Balanus* sp. Ai calcari terrosi gialli contenenti questa fauna si associano banchi di gigantesche *Ostrea crassicostata* Sow. I calcari teneri bianco giallastri, fossiliferi, di Tobruc, studiati dal Migliorini, sarebbero pure elveziani.

Data la grande difficoltà di distinguere livelli diversi in depositi isopici del Miocene, mi limiterò a confrontare in blocco le formazioni mioceniche cirenaiche, da un lato con quelle dell'oasi di Siua, di Gebel Hemeimat e Marsa Matruh, del Gebel Geneffe, dall'altro con le arenarie a *Pecten praescabriusculus* della Tunisia e del Tell algerino, coi calcari a Litotamni di Miliana (Tell), con le arenarie a *Hypsoclypeus doma* della Cabilia e del Sahel, con le arenarie quarzose e i calcari arenacei ad *Amphiope* e *Scutella* del Mergheb e di Fonduc Ngasa nella Tripolitania orientale.

Miocene superiore. — Già il Della Cella segnalava l'esistenza di gessi nella Sirtica, fra Scegga e Iudia, dove i fianchi dei colli « veggonsi formati a strati di una pietra luccicante laminare, che riconobbi essere selenite ». Ora di questa roccia, un gesso impuro, sabbioso, cristallizzato, mi ha recato campioni il dott. Maugini da Gedabia; e il dott. Cortella mi avverte di aver osservato tale formazione estendersi largamente verso il sud nella Sirtica, dove è associata a giacimenti di zolfo, segnalati già anche dal Rohlfs.

Lenti di gesso nelle marne risultano presenti anche presso Er Règema sulla scarpata dell'altipiano (Marinelli), alla foce dell'uadi Engil a ovest di Derna, dove esisterebbe anche salgemma, e presso Marsa Bet Aghic' (Serra).

Sebbene il gesso abbondi, nell'Africa del nord, in terreni di ogni età, pure, in attesa di più sicuri elementi di giudizio, mi sembra logico attribuire provvisoriamente questa formazione al Miocene superiore o Pontico, e sincronizzarla coi gessi solfiferi di Ghelma nell'Algeria orientale, e con la formazione solfo-gesso-salifera italiana.

Postpliocene e Recente. — Il Marinelli ha segnalato nella pianura costiera varî livelli di terrazze marine, di cui il più elevato oscilla tra i 100 m. (Benina, Apollonia), gli 80 m. (Derna) e i 60 m. (Tolmetta). A questi più elevati livelli di terrazze potrebbe corrispondere la formazione marino-salmastra a *Cerastoderma edule*, indicata a Bengasi dallo Stacey e attribuita dal Gregory al Postpliocene antico.

Ancora presso Bengasi un livello francamente marino a *Chelyconus mediterraneus* e *Cerithium vulgatum*, meno antico del precedente e identificabile con quel « rivestimento di vario e irregolare spessore, simile alla panchina », segnalato quivi dal Marinelli, corrisponde probabilmente alla terrazza inferiore di Marsa Matruh (Marmarica), che, contenendo gli stessi fossili, va ascritto al livello a *Strombus bubonius* del Mediterraneo occidentale.

I calcari bianchi dovuti a cementazione delle sabbie calcaree eoliche, di cui tratta il Marinelli, e dei quali ho esaminato campioni di Derna e di Marsa Susa, contenenti *Helix melanostoma*, formano un cordone litorale sulla panchina, come le sabbie ad *Helix* di Marsa Matruh e di Alessandria e come le formazioni analoghe descritte per la Tripolitania.

Finalmente, in parte contemporanee in parte anche più recenti sono le alluvioni travertinose terrazzate degli Uadi (U. Derna, U. Marsa Susa), i travertini dell'altipiano (U. Beni Gadir), i depositi di sebca, le alluvioni di Merg e di Silene ecc.

Conclusioni. — La Cirenaica è dunque costituita da una serie di formazioni sedimentari uniformemente marine e calcaree del Terziario, che si inizia probabilmente con l'Eocene inferiore; certo vi è molto esteso l'Eocene medio, ambedue con *facies* identica a quella d'Egitto. Non si conoscono con sicurezza strati dell'Eocene superiore, ma tutto induce a credere che non vi siano lacune. L'Oligocene consta di depositi calcarei con fauna ad affinità mediterranee, specialmente algerine e tunisine; ma nel Miocene inferiore e medio le formazioni, sempre calcaree, tornano ad assumere somiglianze con le coeve egiziane, oltre che con quelle di Tripolitania, Tunisia, Malta, ecc. Finalmente il Miocene superiore chiuderebbe la serie con depositi a *facies* lagunare-salmastra, come quelli d'Italia e d'Algeria (p. p.).

Già dal Miocene data forse il primo sollevamento del massiccio del Barca e il primo spianamento dell'altipiano. Al Pliocene, del quale non conosciamo depositi marini, corrisponderebbe un secondo terrazzamento per abrasione marina, e finalmente al Postpliocene va attribuita la formazione della pianura litorale coi suoi terrazzi e i sedimenti a *Cerastoderma edule* e a *Conus mediterraneus*.

I ripiani d'abrasione, che col Marinelli supponiamo corrispondere a periodi di sosta nel sollevamento, troverebbero dunque una spiegazione ben diversa da quella sostenuta dal Gregory, che attribuì i gradini che li separano ad un sistema di faglie. Ora, senza insistere sulla forte inclinazione degli strati verso Tolmetta, che accenna ad un'anticlinale a ginocchio, e senza pur accennare ai dati interessanti, che il Marinelli desume dalla morfologia del fondo marino circostante, avvertirò che il mio studio dei fossili sembrerebbe escludere l'esistenza di lembi oligocenici, discesi per faglia nella zona litorale, esistenza che, affermata su basi insufficienti, rappresentava però l'unico argomento positivo in favore dell'ipotesi del Gregory.

Fisica. — *La misura delle differenze di potenziale vere al contatto, col metodo di Lippmann-Pellat* [1] [2]. Nota di ELIGIO PERUCCA, presentata dal Socio A. NACCARI [3].

Per interpretare i fenomeni elettrocapillari di Lippmann è stata fatta l'ipotesi che il massimo di tensione superficiale tra mercurio e acqua acidulata (per es.) corrisponde all'annullarsi della differenza di potenziale vera al contatto tra questi due liquidi.

In quest'ordine di idee, un appoggio fondamentale alla teoria del contatto risultava dalla deduzione elettrocapillare della differenza di potenziale al contatto del mercurio con l'amalgama di zinco (circa 0,5 *volt*) [2].

Sebbene sull'ipotesi su esposta si sia andato costruendo un imponente edificio sperimentale (metodo di misura delle f. e. m. vere al contatto, elettrodo a gocce), l'ipotesi stessa è andata perdendo sempre maggiormente di credito, sia per l'asimmetria della curva capillare e le eccezioni alla legge di Lippmann, sia per la complicata spiegazione del debole effetto Peltier [4]. sia, infine, perchè, seguendo il suo ordine di idee, Pellat aveva concluso [5] che fosse nulla (o quasi nulla) la differenza di potenziale tra un metallo e la soluzione di un suo sale a qualunque concentrazione. Ciò non sembra ammissibile, ed è in disaccordo assoluto con la teoria di Nernst.

Sembra dunque che le considerazioni svolte contengano qualche errore, ma non mi consta che finora sia stato detto quale esso possa essere [6].

Scopo di questa Nota è di indicare quella che, a mio parere, è la ragione delle discordanze accennate.

Le ragioni che si adducono a prova che il massimo della costante capillare corrisponde all'annullarsi della differenza di potenziale al contatto sono le seguenti:

1°) una differenza di potenziale è dovuta a un doppio strato, questo è costituito da due cariche elettrostatiche uguali e di segno opposto, distri-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico dell'Università di Torino.

(2) Jour. de Phys., *6*, pag. 374, a. 1887; Cours d'Élect., III, pag. 176, a. 1908.

(3) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(4) Jour. de Phys., *9*, pag. 122, a. 1880; *2*, pag. 120, a. 1883.

(5) Ann. de Chim. et de Phys., *19*, pag. 562, a. 1890.

(6) V. p. es. Bouasse, *Cours de Magn. et d'Électr.*, III, pag. 375 e segg., a. 1916. Sono recenti due lavori sull'elettrocapillarità (Gouy, Ann. de Phys., *8*, pag. 129, a. 1917; Frumkin, Phil. Mag., *40*, pp. 363, 375, a. 1920), ma non vi si tenta di accordare i fatti su indicati.

buite sulle due facce della superficie di separazione mercurio-acqua acidulata. Tali distribuzioni, per un fenomeno analogo alla tensione elettrostatica (repulsione tra le cariche di ciascuna distribuzione) producono una diminuzione della tensione superficiale e quindi della costante capillare. Se la differenza di potenziale è nulla, il doppio strato è nullo, e la costante capillare, non indebolita, presenta il suo valore massimo.

2°) a riprova di ciò, un'estensione della superficie mercurio-acqua acidulata è generalmente accompagnata da una variazione della potenza del doppio strato, perchè le cariche elettrostatiche preesistenti si distribuiscono su di una superficie più ampia. Ne consegue una variazione nella differenza di potenziale al contatto, e il circuito del Pellat (fig. 36 di pag. 146, *Cours d'Électr.*, III, 1908) non è più in equilibrio elettrico; questo è ristabilito da una corrente temporanea indicata dal galvanometro (1). Nelle stesse condizioni in cui il mercurio presenta il massimo di costante capillare, la variazione di superficie del mercurio non dà luogo a corrente. Si ha una conferma (secondo Pellat) che in tali condizioni non esistono cariche elettriche formanti doppio strato alla superficie del mercurio. Ora, l'esperienza di Pellat qui ricordata non riesce se l'elettrolito è un sale di mercurio, o, sostituendo al mercurio un'amalgama che si comporta come il metallo contenutovi, se l'elettrolito è un sale di questo metallo. Ne viene la conclusione del Pellat che non esiste differenza di potenziale tra metallo e soluzione di un suo sale.

Ora, io desidero far notare che le ragioni 1°) e 2°) non si applicano a un doppio strato che goda delle seguenti due proprietà:

1°) si formi in un tempo brevissimo (minore di quello necessario perchè una corrente venga lanciata nel circuito di Pellat);

2°) si formi sul posto, non sia cioè prodotto da correnti analoghe a quelle di carica di un condensatore, non attraversanti lo spessore del doppio strato e provenienti dal resto del circuito; ma il doppio strato sia prodotto da cariche elettriche che si spostano dall'una all'altra faccia del doppio strato stesso, attraverso il suo spessore.

È evidente che il doppio strato avente queste due proprietà non può cooperare alla creazione della corrente che si osserva nel circuito di Pellat, quando varia la superficie di uno dei due elettrodi.

Che un tale doppio strato non diminuisca la tensione superficiale, ma anzi cooperi al suo valore (2), si dimostra facilmente con considerazioni energetiche.

(1) È interessante rifare tale esperienza con un sensibile elettrometro capillare sostituito al galvanometro. Recipiente ed elettrometro siano ben isolati. L'equilibrio turbato si ristabilisce parzialmente non appena sia cessata la variazione di superficie del mercurio, ma pone un tempo sensibile (alcuni minuti) per ristabilirsi totalmente. Si deve concludere che la formazione del doppio strato di regime non è istantanea. È questo un risultato già noto.

(2) È probabile che ne costituisca la parte fondamentale, se non addirittura la totalità. V., pel caso part. del mercurio. J. Frenkel, Phil. Mag., *33*, pag. 311, a. 1917.

La tensione superficiale A è infatti definita dalla relazione:

$$A\,ds = dL$$

ove ds è l'aumento di superficie, dL è il lavoro che occorre eseguire durante l'estensione ds.

Il lavoro $A\,ds$ trovasi in energia superficiale, analoga a quella di posizione e viene restituita dalla superficie quando questa subisca una contrazione $-ds$. Ora, un doppio strato formantesi istantaneamente sul posto possiede l'energia potenziale

$$2\,.\,\pi\,.\,\delta\,.\,\sigma^2\,.\,ds$$

onde l'estensione ds richiederà un lavoro

$$A'\,.\,ds = dL' = 2\,.\,\pi\,.\,\delta\,.\,\sigma^2\,.\,ds$$

corrispondente all'apparizione di tale energia potenziale elettrostatica. Quindi un doppio strato avente le proprietà supposte e di potenza $\delta\,.\,\sigma$ coopera alla tensione superficiale, aumentandola del termine

$$A' = 2\pi\,.\,\delta\,.\,\sigma^2\,.$$

Se ne deduce la legittimità dell'ipotesi che il massimo di tensione superficiale corrisponde all'annullarsi della differenza di potenziale tra mercurio e acqua acidulata, soltanto nel caso della inesistenza di doppî strati aventi le due proprietà suddette.

Ora, non può escludersi, anzi a mio parere è probabile, l'esistenza di un doppio strato che potremmo dire *atomico* al contatto di due corpi eterogenei, doppio strato risultante dai doppi strati di Frenkel caratteristici di ciascuno dei due corpi (1). Questo doppio strato atomico risultante gode certamente delle due proprietà precedenti: è dunque causa di una differenza di potenziale anche quando la tensione superficiale presenta il valore massimo.

Se poi si ammette che il doppio strato di Nernst *tra un metallo e un suo sale* (dunque nel caso in cui manca la polarizzazione) abbia le due precedenti proprietà, sono anche spiegate le esperienze a risultato negativo del Pellat, qualora al mercurio si sostituisca un'amalgama, e all'acqua acidulata una soluzione di un sale del metallo contenuto nell'amalgama.

La seconda proprietà (cioè il formarsi del doppio strato senza correnti di carica provenienti dall'esterno) è parte fondamentale della teoria del doppio strato di Nernst.

Che la prima proprietà valga almeno per la massima parte del doppio strato di Nernst è cosa facilmente comprensibile quando si pensi al mecca-

(1) Le considerazioni che mi inducono ad estendere il concetto di Frenkel al caso del contatto tra due corpi, non possono trovare posto qui.

nismo molecolare che serve alla creazione di tal doppio strato, e si tenga conto delle condizioni nettamente favorevoli allo stabilirsi dell'equilibrio tra gli ioni positivi dalle due parti della superficie di contatto quando tali ioni siano identici.

Non ho qui la pretesa di discutere a fondo dei fenomeni elettrocapillari, ma a me pare che dell'elemento nuovo da me indicato, occorra tener conto nel negare la legge di Lippmann (la tensione superficiale è funzione soltanto della differenza di potenziale tra i due corpi in contatto), e di questo elemento sarà opportuno tener conto negli studî sull'asimmetria della curva capillare e sui diversi valori del massimo della tensione superficiale per i varii elettroliti.

Intanto resta fissata la probabile causa delle contraddizioni accennate a pag. 57, in particolare delle forti differenze di potenziale vere al contatto tra metalli, trovate dal Pellat.

Fisica. — *Conducibilità e potere termoelettrico nel campo magnetico, secondo la teoria elettronica.* Nota di M. La Rosa, presentata dal Corrisp. Macaluso (1).

In occasione di alcune mie ricerche (2) sul mutamento del potere termoelettrico (P) di una coppia *Cu Bi* per azione dal campo magnetico, ho cercato di portare questo mutamento, e quello della resistenza, sotto la cornice della ordinaria teoria elettronica dei metalli, ascrivendo i due fenomeni, essenzialmente al successivo mutare della concentrazione elettronica del bismuto al crescere del campo (3).

In una recente Nota di questi « Rendiconti », il prof. Corbino (4), dopo aver manifestato il dubbio che il metodo di verifica da me seguito, perchè molto indiretto, possa avermi occultato la verità, applica alle mie stesse misure un metodo semplice di verifica diretta, che lo conduce a concludere che l'accordo da me segnalato non esiste.

Partendo dalla relazione nota:

$$(1) \qquad P_{ab} = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{e}\log\frac{n_a}{n_b}$$

il prof. Corbino trova facilmente il rapporto n_0/n_H tra le concentrazioni elettroniche del bismuto a campo nullo ed a campo H per mezzo dei rapporti P_H/P_0 da me misurati.

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.
(2) N. Cim. s. VI, vol. XVIII, pag. 26, a. 1919.
(3) » » » » 39, a. 1919,
(4) Rend. R. Acc. Lincei, s. 5ª, vol. XXIX, 2° sem., pag. 282, a. 1920.

A tale fine dopo avere ricavato il rapporto $\frac{n_{Cu}}{n_o}$ fra le concentrazioni elettroniche del rame e del bismuto a campo nullo, col porre nella (1) al posto di $\frac{\alpha}{e}$ il valore noto $4,27 . 10^{-7}$ ed al posto di P_o il valore sperimentale che egli ritiene *conosciuto*, cioè

$$P_o = \frac{77 . 10^{-6}}{300}$$

calcola i rapporti $\frac{n_o}{n_H}$ in funzione dei valori sperimentali $\frac{P_H}{P_o}$.

I valori di $\frac{n_o}{n_H}$ che egli trova per tal via *risultano costantemente minori dei rapporti* $\frac{\sigma_o}{\sigma_H}$ fra la conducibilità del *Bi* a campo nullo e quella sotto il campo H, da me stesso misurati sullo stesso campione di questo metallo; e siccome, egli osserva, per effetto dell'altro elemento mutevole, nel mio lavoro segnalato — cioè il cammino libero tra due urti — σ_H dovrebbe crescere col campo, conclude negando l'accordo da me constatato. Questa conclusione evidentemente è legata, e fortemente, ai valori *ammessi* per le costanti $\frac{\alpha}{e}$ e P_o.

Intorno ai quali debbo dire che non posso consentire con il prof. Corbino nella determinazione della nostra P_o, per mezzo di una raccolta di costanti fisiche. Il valore assoluto del potere termoelettrico per un metallo come il bismuto — e gli altri corpi della categoria dei « conduttori variabili » — mi è parso sempre un elemento troppo incerto e difficile a misurare. Ed è stato per questo che invece di tentare la via piana della verifica diretta, ho preferito quella tortuosa e indiretta; malgrado la possibilità, che avevo in mano, della determinazione sperimentale di P_o *sulla stessa coppia* con cui avevo fatto tutte le misure.

Ed in proposito mi occorre di rilevare che il valore di $P_o = \frac{77 . 10^{-6}}{300}$, riportato nelle raccolte è tolto da un lavoro di Dewar e Fleming [1] sulle forze termoelettromotrici di alcune coppie di metalli, tra — 190° e 100°, il quale non può venire considerato come un lavoro di precisione diretto a stabilire *delle costanti in misura assoluta*, ma come un insieme di semplici esperienze di orientamento sul comportamento della materia a basse temperature.

Per convincerci del grado di incertezza di queste misure basta ricordare che appunto per il potere termoelettrico del bismuto era stata osservata una notevole discontinuità, a circa — 80°, che non è stata poi ritrovata

[1] Phil. Mag., serie V, vol. XL, pag. 95, a. 1895.

da altri (Lownds); e che doveva secondo gli A.A. corrispondere ad una analoga discontinuità nella resistenza di detto metallo, che in seguito gli autori medesimi hanno esclusa.

Condizioni assai meglio definite si hanno invece nelle misure di Perrot [1] ed in quelle di Lownds [2] nelle quali il potere termoelettrico del bismuto rispetto al rame è stato misurato tenendo anche conto dell'orientazione dell'asse cristallografico del campione rispetto alla congiungente i punti di contatto col rame: e sono stati trovati valori dipendenti dall'orientazione e variabili da campione a campione, e che raggiungono (per un'orientazione dell'asse parallela rispetto a quella congiungente) un valore di $130 . 10^{-6}/300$ u. e. s. Ora prendendo per P_o questo valore e ripetendo il calcolo in modo analogo a quello del prof. Corbino, si giunge a ben diversa conclusione.

I rapporti $\frac{n_o}{n_H}$ che così risultano sono, infatti, quelli trascritti nel seguente quadro:

H	$\frac{\Delta P}{P_o}$	$\frac{n_o}{n_H}$	$\frac{\sigma_o}{\sigma_H}$
2100	0,044	1,069	1,030
3150	0,067	1,107	1,061
3700	0,080	1,130	1,082
4500	0,102	1,168	1,114
5100	0,115	1,192	1,136
5900	0,127	1,212	1,172
6300	0,134	1,226	1,190
6600	0,137	1,232	1,207
7100	0,142	1,241	1,223
7600	0,149	1,254	1,253

Essi sono *tutti maggiori dei corrispondenti rapporti* $\frac{\sigma_o}{\sigma_H}$ sperimentalmente trovati, come è necessario perchè possa restare margine per l'intervento della variabilità del cammino libero; e ciò fino al campo di 7600 unità, cioè quello fino al quale era risultata soddisfacente la mia verifica indiretta.

Con ciò non voglio affatto sostenere che la verifica diretta dia ragione alla mia tesi quando sia corretto il valore di P_o; ma credo di essere riuscito a porre meglio in rilievo quanto sia incerto, in questo genere di fatti, ogni tentativo di verifica che si appoggi alla conoscenza dei valori assoluti delle grandezze in questione.

Intorno alla questione generale, sento di dovere manifestare più chiaramente il mio pensiero, che, a quanto mi sembra, rimane piuttosto oscuro nei miei lavori sopracitati.

Col mio tentativo di ricondurre nel quadro della forma monistica della teoria elettronica dei metalli il cambiamento di resistenza e del potere termoelettrico nel campo magnetico, non ho inteso togliere valore alle ricerche

(1) Arch. de Gen., p. IV, t. 6°, pp. 106-229, a. 1898.
(2) Drude Ann., F. IV, B. 6°, s. 146, a. 1901.

condotte dal punto di vista della teoria dualistica; ma solamente ho creduto di fare uno sforzo per cimentare ulteriormente le risorse nascoste che la teoria monistica può tuttavia offrire.

E l'ho fatto in vista dell'enorme importanza che avrebbe la definitiva sconfitta di questa ed a cagione della semplicità che essa reca nello sviluppo della teoria elettronica *generale dei fenomeni fisici*: semplicità che l'ha resa finora preferibile alla dualistica malgrado gl'insuccessi toccati nel ristretto campo della teoria dei metalli, fra cui principalissimo l'incapacità di rendere conto dell'esistenza di un effetto Hall di segno opposto a quello normale.

Le ricerche del prof. Corbino hanno via via portato un materiale imponente di fatti e di considerazioni in favore della forma dualistica della teoria dei metalli, il quale aggiunge certamente nuove difficoltà alla forma monistica, e rende più viva e più ricca d'interesse la lotta fra le due forme.

Però, a me sembra che il gruppo dei fenomeni che fanno capo all'effetto Hall, non sia un buon terreno per questa lotta, a causa della complessità di questi fenomeni, che dipendono in alto grado dalla struttura cristallina dei corpi in cui in modo più evidente essi si presentano.

Per questo non saprei ascrivere un peso eccessivo alle nuove discordanze che riguardano la variabilità della costante di Hall, o il suo valore assoluto; discordanze che restano assorbite nella questione più vasta del segno dell'effetto Hall, e che troveranno una giustificazione, nell'ambito della teoria monistica, probabilmente quando questa questione riuscirà a trovarvi la sua soluzione.

Fisica terrestre. — *I terremoti mondiali del 1916*. Nota I di Giovanni Agamennone, presentata dal Socio V. Cerulli (1).

È stato di recente pubblicato l'elenco dei grandi terremoti del 1916, che misero in vibrazione l'intera superficie del nostro globo, o una considerevole parte della stessa, e perciò denominati *mondiali* (2). Per 59 tra essi, è stato possibile conoscere la posizione e l'ora dell'epicentro, e ad ognuno è stato assegnato un quadro nel quale figurano gli Osservatorî disposti in ordine crescente di distanza e le ore delle principali fasi della perturbazione ivi prodotta. Altri 72 terremoti, per i quali non si potè raggiungere uguale esattezza nella determinazione dell'epicentro, si trovano accennati in apposita Appendice, in cui figurano le località, dove vennero registrati.

Era opportuno esaminare il contributo dell'Italia allo studio di questi sismi, che si prestano assai bene per estendere le nostre conoscenze sulla costituzione interna della Terra. Tra i 111 Osservatorî che figurano nel-

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(2) H. H. Turner, *The large Earthquakes of 1916. — Dates 'Times' Epicentres* etc.; Printed for the British Association Seismological Committee at the Isle of Wight County Presse, 1919.

l'elenco, ne troviamo soli 5 italiani e. cioè, *Moncalieri*, *Padova*, *Rocca di Papa*, *Montecassino* e *Valle di Pompei:* in verità troppi, se si consideri la piccola estensione dell'Italia in confronto dell'intera superficie terrestre, e troppo pochi rispetto al gran numero di Osservatorî italiani (più di una trentina) muniti di sismografi atti a registrare anche i telesismi. Ciò si spiega col fatto che le osservazioni sistematiche italiane vengono disgraziatamente pubblicate con notevolissimo ritardo dal R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, e per conseguenza nell'elenco dei terremoti mondiali non poterono trovar posto che i dati di quei pochi Osservatorî che pubblicano sollecitamente un bollettino proprio o che inviano manoscritte le loro osservazioni. Riporto nel seguente specchio la distribuzione mensile dei primi 59 più notevoli sismi mondiali in riscontro con quelli registrati nei 5 Osservatori italiani:

Mese	Numero dei terremoti mondiali	Terremoti mondiali registrati a				
		Rocca di P.	Moncalieri	Padova	M. Cassino	Valle di P
Gennaio . . .	6	4	5	5	4	5
Febbraio . . .	7	6	6	5	2	3
Marzo	3	3	3	1	1	—
Aprile	8	8	8	6	2	3
Maggio	1	1	1	—	—	—
Giugno	4	2	4	—	1	—
Luglio	3	3	3	1	—	1
Agosto	7	6	4	2	3	2
	39	33	34	20	13	14
Settembre . . .	5	5	2	—	2	—
Ottobre	7	6	6	—	1	—
Novembre . . .	3	2	3	—	—	—
Dicembre . . .	5	2	3	—	—	—
Totale . . .	59	48	48		16	

V'è da notare che il bollettino sismico di Valle di P. si arresta al 1° settembre, e quello di Padova al 1° ottobre, e questo spiega le lacune nel 3° quadrimestre; sicchè, per effettuare un confronto fra i 5 Osservatori, bisogna prendere in considerazione i primi 8 mesi. Ecco le percentuali risultanti dal confronto del numero dei terremoti, registrati in ogni località, con il totale (39) di quelli avvenuti nello stesso intervallo di tempo:

Moncalieri	N. 34	telesismi,	cioè	87 c. %
Rocca di Papa	» 33	»	»	85 c. »
Padova.	» 20	»	»	51 c. »
Valle di Pompei . . .	» 14	»	»	36 c. »
Montecassino	» 13	»	»	33 c. »

La misura della percentuale, per l'intero anno, è possibile solo per Moncalieri, Rocca di P. e M. Cassino, e risulta come appresso:

Moncalieri	N.	48	telesismi, cioè	81 c. %
Rocca di Papa	»	48	» »	81 c. »
Montecassino	»	16	» »	27 c. »

Nell'un caso e nell'altro le differenze non si possono spiegare che con la diversa sensibilità degli strumenti ed anche con la loro quantità e varietà; poichè se, ad es., un Osservatorio possiede un solo sismografo, ha senza dubbio minor probabilità di registrare terremoti, potendo il medesimo trovarsi eventualmente fuori di servizio, oppure in balìa di forte agitazione microsismica. Per spiegare poi il fatto che Moncalieri e Rocca di P., sebbene in possesso di varî e potenti strumenti, non sono stati in grado di registrare tutti i 59 terremoti mondiali, convien riflettere che talora i tenuissimi telesismogrammi restano addirittura mascherati dall'agitazione microsismica, soprattutto a Rocca di P. per i forti venti, oppure che le predette due località si sono trovate qualche volta a troppo forte distanza dall'origine dei terremoti. Comunque sia, è confortante il vedere che la percentuale è per esse elevatissima, specie per i due primi quadrimestri, e addirittura del 100 % per ben sette mesi!

Segue la distribuzione mensile degli altri 72 terremoti:

Mese	Numero dei terremoti mondiali	Terremoti mondiali registrati a				
		Rocca di P.	Moncalieri	Padova	M. Cassino	Valle di P.
Gennaio . . .	6	—	—	—	—	—
Febbraio . . .	6	2	—	1	1	1
Marzo	8	1	—	—	—	—
Aprile	10	2	3	1	1	1
Maggio	10	5	4	—	1	2
Giugno	7	4	4	—	—	—
Luglio	7	—	1	—	—	—
Agosto	5	2	1	1	1	1
	59	16	13	3	4	5
Settembre . . .	1	—	—	—	—	—
Ottobre	7	—	—	—	—	—
Novembre . . .	4	3	2	—	—	—
Dicembre . . .	1	—	—	—	—	—
Totale . . .	72	19	15		4	

Limitando il calcolo della percentuale ai primi 8 mesi, per le ragioni suesposte, troviamo le seguenti cifre per i primi 59 telesismi mondiali:

Rocca di Papa	N.	16	telesismi, cioè	27 c. %
Moncalieri.	»	13	»	» 22 c. »
Valle di Pompei . . .	»	5	»	» 0,8 c. »
Montecassino	»	4	»	» 0,7 c. »
Padova.	»	3	»	» 0,5 c. »

Anche qui spicca la notevole superiorità dei primi due Osservatorî per rispetto agli altri tre, spiegabile con la diversa sensibilità degli strumenti; ma salta agli occhi il forte abbassamento della percentuale per tutti, in confronto di quella sopra trovata per i più importanti terremoti mondiali. A mio parere, l'enorme differenza non può essere giustificata se non con la minore importanza dei 72 sismi ultimamente esaminati e forse anche con la troppa distanza dall'Italia, a cui vennero originati, sicchè la maggior parte dei medesimi non fu capace di perturbarne i sismografi.

Seguiranno in una prossima Nota alcune altre considerazioni su questi terremoti mondiali e su i nostri Osservatorî.

Botanica. — *Tylomyces gummiparus n. sp., prototipo di un nuovo genere di Ifomiceti. Caratteri morfologici* [1]. Nota I del dott. Jone Comanducci Cortini, presentata dal Socio R. Pirotta [2].

Avendo avuto qualche tempo fa occasione di occuparmi di alcuni esemplari di garofano attaccati da un *Fusarium*, la mia attenzione fu attratta da un fungillo, il quale, benchè apparisse evidentemente saprofilo, mi parve degno d'essere oggetto di studio per alcune sue curiose particolarità morfologiche.

I garofani affetti da *Fusariosi*, posti in camera umida su carta bibula, furono, dopo qualche tempo, invasi da alcuni micromiceti banali, quali l'*Acrostalagmus cinnabarinus*, la *Sporocybe byssoides*, ecc., fra i quali spiccavano chiazze rilevate, effuse, nero vellutate tendenti all'olivaceo che avevano invasa la parte legnosa dei rametti. All'esame microscopico esse dimostrarono trattarsi di un Ifomicete riferibile alla famiglia *Dematiaceae*, sezione *Phragmosporae*.

Le mie ricerche, che qui brevemente espongo, mi inducono a considerare tale fungillo non solo come una nuova specie, ma verosimilmente come tipo

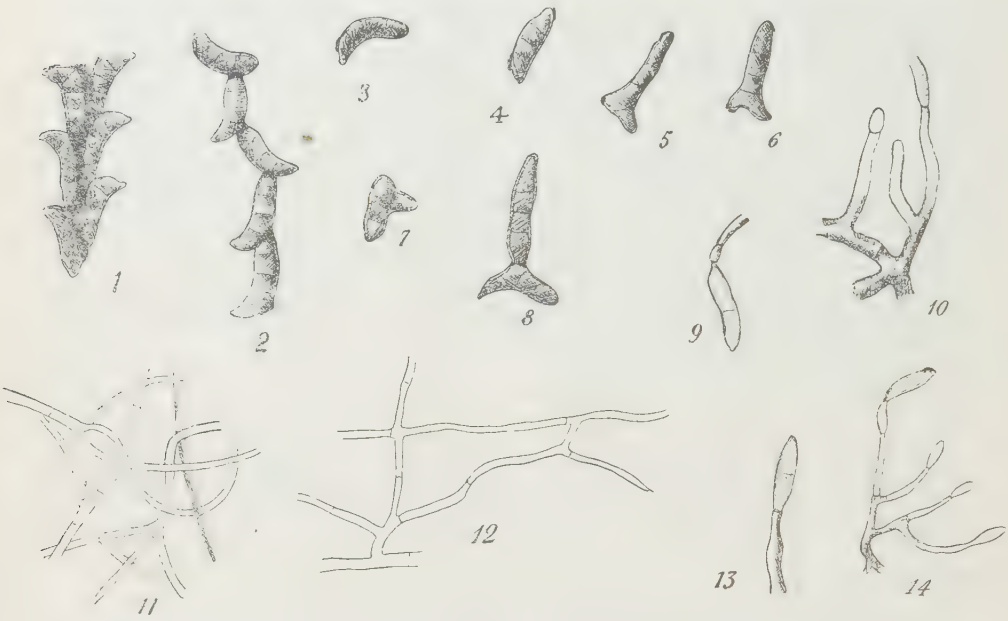
(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

di un nuovo genere e pertanto meritevole di un cenno illustrativo. Ad esso ho dato il nome di *Tylomyces gummiparus* col quale ho voluto ricordare i caratteri più salienti.

Caratteri microscopici.

1. *Micelio.* Il micelio del fungo si presenta con caratteri diversi a seconda che le ife si sono sviluppate superficialmente o in profondità. Le ife profonde (fig. 11, 12) sono jaline, molto rifrangenti, di calibro quasi costante,



SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. 1. — Conidi di *Tylomyces gummiparus* prodotti da due conidiofori molto vicini: i conidi sono saldati da abbondante callo.
» 2. — Conidi normalmente catenulati.
» 3, 4. — Conidi con tracce di callo ai due estremi.
» 5, 6, 7. — Conidi di forma anormale.
» 8. — Conidi saldati in modo anormale.
» 9, 13. — Estremità di conidiofori con conidi.
» 10, 14. — Conidiofori con conidi e ife superficiali con le placche incrostanti.
» 11, 12. — Micelio profondo.

misuranti in media μ 2,5, parcamente settate e anastomosate fra loro, mentre le ife superficiali (fig. 10) di sezione quasi doppia (possono raggiungere come massimo 6 μ), hanno protoplasma granuloso, presentano delle pareti più robuste e specialmente nelle curvature sono, ispessite da placche brune a contorni irregolari, formate da una sostanza non per ora bene identificata. Questa sostanza è un essudato del fungo (che ha proprio l'aspetto di una euforbiacea trasudante il suo lattice) direi quasi che rappresenta una reazione

del protoplasma a contatto con l'aria. Infatti il micelio profondo che si sviluppa nell'interno dei tessuti o, nel caso di colture, nel substrato, è perfettamente jalino e libero di queste placche che ricoprono il micelio superficiale.

2. *Conidiofori e conidi.* Dal micelio superficiale si elevano delle brevi ife che si ramificano quasi a formare un candelabro asimmetrico (fig. 14) le cui braccia sono i conidiofori. Questi sono jalini, lunghi da 30 a 35 μ, a contenuto finissimamente granulare, molto rifrangenti (fig. 10). Ad un dato momento all'estremità del conidioforo si vede apparire sotto forma di una goccia il protoplasma che si riveste prontamente di una sottile pellicola. La goccia si allunga, cresce, mentre si vede nettamente l'apertura del conidioforo, anzi in alcuni casi questa abbraccia in piccola parte la base del conidio in formazione, a mo' di imbuto, e tutto attorno forma un collare irregolare di mucillagine che ben presto imbrunisce e diventa solida. Il conidio è pertanto di origine prettamente mesendogena, analogamente a quanto fu osservato recentemente dal Peyronel (1) in altri Ifomiceti. Quando esso ha raggiunto un certo sviluppo, forma un setto mediano e si pigmenta (fig. 13). A questo punto all'estremità del conidioforo si viene formando un nuovo coniodio (fig. 9) nello stesso modo col quale si è formato il precedente, ma trovando esso avanti a sè l'ostacolo del primo, nell'accrescersi lo spinge avanti ed in questo sforzo la sua estremità che è ancora molle, si piega da un lato. I due conidi restano saldati fortemente da un abbondante callo e così accade per i successivi, di modo che si vengono a formare lunghe catene (fig. 2) le quali sono molto caratteristiche in quanto che i conidii non sono inseriti l'uno sull'altro apicalmente, ma lateralmente. Qualche volta accade perfino di trovare dei conidi saldati perpendicolarmente l'uno all'altro (fig. 8). In genere quando si inizia la formazione del terzo conidio, il primo è già del tutto formato, è divenuto olivaceo ed ha prodotto altri due setti. Cosicchè un conidio perfettamente maturo è di color bruno olivaceo, trisettato, con l'estremità superiore fusiforme ripiegata a mo' di falcetto e terminata da una piccola papilla, e l'inferiore piuttosto ottusa e talvolta arrotondata (figg. 3, 4), ma vi sono anche abbastanza frequenti dei conidi di forme aberranti (figg. 5, 6, 7). Tanto negli uni quanto negli altri si riscontrano nella grandissima maggioranza dei casi, i due calli d'attacco con gli altri elementi della catena. Di questi conidi misuranti $19 - 26 = 7 - 8\,\mu$ si possono ammirare catenelle spesso lunghissime composte di 12 a 15 conidi, rigide come se il callo che le salda fosse simile alla ceralacca e come questa fragile. Infatti si vedono catene di due o tre elementi con il callo spezzato

(1) Peyronel B., *Sul nerume o marciume nero delle castagne.* Le Staz. Sper. agrarie It., vol. LII, 1919; *Un Hyphomycète singulier: Eriomenella tortuosa (Corda) Peyronel.* Bull. de la Soc. Mycol. de France. Tome XXXV, 4° fasc. 1920; *Un Ifomicete dai conidi mesoendogeni: Menispora microspora n. sp.*

alle due estremità, presentante una frattura come quella che si ottiene spezzando una sostanza solida fragile. Nelle vecchie colture queste catene di conidi si addossano le une alle altre sostenendosi a vicenda e qualche volta accade che generandosi da conidiofori molto vicini, esse restano saldate tra loro da abbondantissimo callo, presentando il curioso aspetto della fig. 1. È facile capire come, per quanto si operi con la massima delicatezza, sia difficile poter osservare in un preparato una lunga catena di conidi attaccata al conidioforo. Basta infatti considerare il peso che debbono esercitare quattro o cinque conidi in catena, per capire che nelle diverse operazioni necessarie per fare il preparato, la catena facilmente si spezzi fra il penultimo e il terz'ultimo conidio, perchè questo è già formato del tutto e rigidamente saldato con gli altri, mentre quello è ancora molle e può piegarsi sotto lo sforzo senza disarticolarsi dall'ultimo giovanissimo conidio che si sta formando. Ed è perciò che attaccati al conidioforo si trovano in genere due soli conidi (fig. 14).

Quanto ai caratteri biologici del fungo ed alla sua diagnosi, sono in corso esperienze delle quali mi propongo di riferire in una prossima Nota.

Biologia. — *Dati citologici sul tetraploidismo dell'Artemia salina di Margherita di Savoia (Puglia)* [1]. Nota del dott. Cesare Artom, presentata dal Socio B. Grassi [2].

Risulta da un mio lavoro in corso di pubblicazione [3], di cui è già stata data notizia in questi Rendiconti [4], che, tenendo conto della diversa grandezza dei nuclei delle cellule dell'intestino medio, le Artemie provenienti da 18 diverse località, sono nettamente separabili in due gruppi.

Volendo precisare, risulta che sono a nuclei piccoli, cioè *micropireniche* le Artemie di Cagliari, Cadice, Cairo, Cipro, Damasco, Lago di Utah, Isola di Saint José e Golfo di California; sono viceversa *macropireniche*, cioè a nuclei grandi, le Artemie di Capodistria, Margherita di Savoia (Puglia), Augusta (Sicilia), Wintershall Werra (Germania), Lago Torda e Wirakna (Ungheria), Bocche del Rodano (Francia), Temacin e Ouargla (Algeria) e Tandya El Balia (Marocco).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(3) C. Artom, 1921. *Specie micropireniche e macropireniche del genere Artemia*, in *Ricerche di morfologia* dell'Istituto di Anatomia umana dell'Università di Roma.

(4) C. Artom, 1920. *Nuovi fatti e nuovi problemi sulla biologia e sulla sistematica del genere Artemia*. Rend. R. Accademia dei Lincei, Nota 1ª, 2ª e 3ª, vol. XXIX, 1° e 2° semestre 1920.

Risulta poi che, tra le Artemie *micropireniche*, i maschi sono sempre all'incirca nello stesso numero delle femmine; tra le Artemie *macropireniche*, i maschi invece sono completamente assenti.

Siccome risulta da mie antecedenti ricerche [1], che un'Artemia *micropirenica* (quella di Cagliari), è *diploide amfigonica*, mentre un'Artemia *macropirenica* (quella di Capodistria), è *tetraploide partenogenetica*, così pare legittimo dedurre, che tutte le Artemie appartenenti al gruppo delle *micropireniche* sieno *diploidi amfigoniche*; e che le Artemie appartenenti invece al gruppo delle *macropireniche* sieno *tetraploidi partenogenetiche*.

Non è a tacere però, che in seguito all'azione dell'alcool, i nuclei delle cellule dell'intestino medio delle Artemie delle varie collezioni da me esaminate, appaiono soventi più o meno coartati; di qui una forte oscillazione nella grandezza nucleare delle cellule delle Artemie appartenenti a ciascuno dei due gruppi. Non ostante però tale azione coartatrice, che può ridurre le aree nucleari sicuramente a metà della loro effettiva grandezza, risulta una distinzione netta tra le Artemie *micropireniche* e quelle *macropireniche*; in quanto che, le minime aree nucleari che si riscontrano tra queste, sono sempre notevolmente superiori alle massime aree nucleari che si riscontrano tra quelle.

Che l'azione coartatrice dell'alcool sia veramente notevole, lo dimostra il fatto, per esempio, che l'Artemia salina di Margherita di Savoia, studiata su materiale da collezione, conservato da oltre dieci anni in alcool, presenta una riduzione nelle aree nucleari di circa la metà, in confronto delle stesse aree nucleari dell'Artemia salina di Capodistria, quando tale materiale sia stato preventivamente fissato e poi conservato in alcool.

Ma viceversa, se il materiale di Margherita di Savoia è stato preventivamente fissato e poi conservato in modo analogo al materiale di Capodistria, allora si riscontra che le aree nucleari delle cellule dell'intestino medio delle Artemie delle due predette località, sono assolutamente identiche.

Data tale identità, posso già con quasi assoluta sicurezza dedurre, che l'Artemia salina di Margherita di Savoia (in cui tra migliaia di femmine non ho mai trovato neppure un sol maschio) sia un'Artemia *tetraploide partenogenetica*, come quella di Capodistria.

Il reperto citologico, di cui do qui sommaria notizia, convalida poi pienamente tale deduzione.

Nella fig. 1 è per l'appunto raffigurata una piastra equatoriale del primo fuso di maturazione di un uovo dell'Artemia di Margherita di Savoia. I cromosomi in procinto di dividersi per la formazione e l'emissione del primo ed unico globulo polare, sono all'incirca 84, e tutti contenuti in una sola sezione.

[1] C. Artom, *Le basi citologiche di una nuova sistematica del genere Artemia* (Archiv für Zellforschung, 9° Band, 1ª Heft, 1912).

Procedendo al conteggio dei cromosomi si riscontra ch'essi sono precisamente in numero di 88. Ciò è dovuto, io credo, al fatto che il taglio del rasoio deve avere separato in tale stadio qualche cromosoma doppio nei suoi due componenti, il che del resto è occorso di osservare anche al Brauer studiando lo stesso stadio dell'uovo dell'Artemia salina di Capodistria [1].

In conclusione l'Artemia salina di Margherita di Savoia è la stessa identica specie dell'Artemia salina di Capodistria; essa è cioè un'Artemia *tetraploide* a partenogenesi indefinita.

Per analogia poi con quanto è stato dedotto al riguardo di tale Artemia, appare sempre maggiormente probabile inferire che tutte le Artemie *macropireniche* sieno *tetraploidi partenogenetiche*, e che le Artemie *micropireniche* sieno invece *diploidi amfigoniche*. Nell'uovo di queste analogamente a quanto avviene sicuramente per l'Artemia di Cagliari (fig. 2) è da presumersi debbano normalmente contarsi 21 cromosomi a tetrade (numero aploide), venga emesso il 1° e il 2° globulo polare; e che il numero diploide di cromosomi (42) (che sarà poi quello caratteristico delle cellule somatiche) venga reintegrato col normale processo della fecondazione.

Fig. 1. — Ingrandimento circa 1800 diametri. Piastra equatoriale del 1° fuso di maturazione dell'uovo dell'Artemia salina di Margherita di Savoia (*tetraploide, macropirenica partenogenetica*).

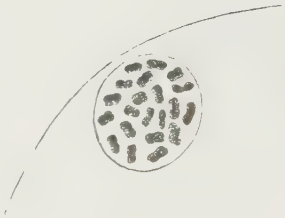


Fig. 2. — Ingrandimento circa 1800 diametri. Piastra equatoriale del 1° fuso di maturazione dell'uovo dell'Artemia salina di Cagliari (*diploide, micropirenica amfigonica*).

Nell'uovo invece delle Artemie *macropireniche* è da presumersi che nel 1° fuso di maturazione debbano contarsi 84 cromosomi a diade (numero tetraploide, come nell'uovo dell'Artemia di Capodistria, Odessa, Margherita di Savoia), venga emesso un solo globulo polare e che (dato lo sviluppo partenogenetico), 84 sia pure il numero dei cromosomi delle cellule somatiche.

Come già è stato ripetutamente detto, vi sono argomenti poi che legittimano l'ipotesi di una dipendenza genetica tra l'Artemia *diploide amfigo-*

[1] A. Brauer, *Zur Kenntniss der Reifung d. parth. sich entwich. Eies von Artemia salina*. Archiv. f. mikrosk. Anat. Bd. XLIII, 1894 (pag. 168).

nica e quella *tetraploide partenogenetica*. E precisamente il tetraploidismo potrebbe essere acquisito o mediante l'unione di due gameti dell'Artemia diploide a numero non ridotto di cromosomi, oppure dalla fusione del 1° globulo polare col pronucleo di un uovo in un'Artemia diploide in cui non sia avvenuta la riduzione del numero dei cromosomi. Un uovo di tal genere a 42 cromosomi nella fase di piastra equatoriale del 1° fuso di maturazione, è stato realmente da me osservato in un uovo dell'Artemia salina di Cagliari e descritto in un mio precedente lavoro (fig. 3) (1).

L'Artemia salina di Odessa (*macropirenica tetraploide*) e quella del lago salato di Utah (*micropirenica* presumibilmente *diploide*) in cui pare sieno insieme mescolate generazioni partenogenetiche e generazioni amfigoniche, sono poi da additare come materiale che dovrebbe prestarsi per risolvere definitivamente l'importante problema della dipendenza genetica tra i due gruppi di Artemie.

(1) C. Artom, 1911. *Analisi comparativa della sostanza cromatica* ecc. Archiv. für Zellforschung, 7 Band 2, Heft.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Fisica Matematica. — *Calcolo delle discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento d'equilibrio elastico.* Nota del Socio Gian Antonio Maggi (1).

La presente breve Nota si collega con alcune mie precedenti, concernenti, più o meno direttamente, la teoria delle distorsioni elastiche, comparse in questi Rendiconti (2), così da formarne quasi un complemento. I simboli conservano, di regola, il significato, del resto abbastanza chiaro per sè, che hanno in codeste Note. Oggetto della presente è un procedimento diretto, che permette di esprimere le indicate discontinuità, per derivate di qualsivoglia ordine, rispetto alle coordinate del punto considerato, riferite ad una terna qualsivoglia d'assi cartesiani ortogonali, in termini delle derivate, fino allo stesso ordine, delle discontinuità delle componenti dello spostamento del punto, da concepirsi come funzioni di coordinate curvilinee ortogonali, rispetto a queste coordinate.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1921.

(2) *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni*, vol. XXVI (5), 1° semestre 1917. — *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Ibid. — *Nuove applicazioni di una formula commutativa.* Ibid., 2° semestre. — Mi è grato ricordare che, nel tempo che mi occupavo di questi argomenti, il compianto Socio P. Pizzetti mi indicava un procedimento simile al presente, per dedurre le espressioni delle discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di superficie, trovate, per altra via, dal Somigliana (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI, 1916).

Simili espressioni per le discontinuità delle derivate prime, valendosi di « assi canonici », cioè formando l'asse delle z colla normale alla superficie di discontinuità, nel punto considerato, mostra come si trovano, in generale, e dà esplicitamente, pel caso di corpi isotropi, il Socio Somigliana, nella seconda delle sue Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, pure inserite in questi Rendiconti [1].

Con queste si formano subito le espressioni analoghe per assi cartesiani qualisivogliano. Distinguiamo perciò coll'apice gli elementi riferiti agli assi canonici, e indichiamo con $\alpha_i , \beta_i , \gamma_i$ $(i = 1 , 2 , 3)$ i coseni di direzione di questi assi, rispetto ai suddetti assi fissi. Le $\frac{\partial \xi}{\partial x} , \ldots , \frac{\partial \zeta}{\partial y} , \ldots$ si esprimono, nel noto modo, per funzioni omogenee, quadratiche delle $\alpha_i , \beta_i , \gamma_i$ $(i = 1 , 2 , 3)$, e lineari delle $\frac{\partial \xi'}{\partial x'} , \ldots , \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} , \ldots$: quindi anche le $D \frac{\partial \xi}{\partial x} , \ldots$ $D \frac{\partial \zeta}{\partial y} , \ldots$, per le stesse funzioni omogenee, quadratiche delle $\alpha_i , \beta_i , \gamma_i$ $(i = 1 , 2 , 3)$, e lineari delle $D \frac{\partial \xi'}{\partial x'} , \ldots D \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} , \ldots$, le quali si prestano alle espressioni del Somigliana.

Poniamo

$$(1) \qquad D\xi' = \xi'_\sigma \quad , \quad D\eta' = \eta'_\sigma \quad , \quad D\zeta' = \zeta'_\sigma ,$$

dove $\xi'_\sigma , \eta'_\sigma , \zeta'_\sigma$ rappresentano funzioni delle coordinate curvilinee u , v del punto considerato, (x , y , z) o $(x' , y' , z' = 0)$, della supposta superficie σ di discontinuità, e

$$(2) \qquad D \frac{\partial \xi}{\partial x} = f_1 \quad , \quad D \frac{\partial \xi}{\partial y} = f_2 \quad , \quad D \frac{\partial \xi}{\partial z} = f_3 .$$

Per quanto precede, le f_1 , f_2 , f_3 si potranno intendere funzioni note, omogenee, quadratiche rispetto a $\alpha_i , \beta_i , \gamma_i$ $(i = 1 , 2 , 3)$, e lineari rispetto alle $\frac{\partial \xi'_\sigma}{\partial s_u} , \frac{\partial \xi'_\sigma}{\partial s_v} , \frac{\partial \eta'_\sigma}{\partial s_u} , \frac{\partial \eta'_\sigma}{\partial s_v} , \frac{\partial \zeta'_\sigma}{\partial s_u} , \frac{\partial \zeta'_\sigma}{\partial s_v}$, dove s_u , s_v indicano le misure dell'arco sulla linea u e sulla linea v, tangenti all'asse delle x' e all'asse delle y' [2].

[1] Vol. XXIII, (5), 1914.

[2] Posto

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 ,$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial s_v} , \quad \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial s_u} ,$$

e concepito un proseguimento nello spazio delle $\xi'_\sigma , \eta'_\sigma , \zeta'_\sigma$, semplicemente,

$$\frac{\partial}{\partial s_u} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{\partial}{\partial y'} .$$

Ora, si ha

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_u} = \alpha_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 \dfrac{\partial}{\partial z}\,, \quad \dfrac{\partial}{\partial s_v} = \alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{D}\dfrac{\partial}{\partial s_u} = \alpha_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{D} + \beta_1 \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{D} + \gamma_1 \dfrac{\partial}{\partial z}\mathrm{D}\,, \; \mathrm{D}\dfrac{\partial}{\partial s_v} = \alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{D} + \beta_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{D} + \gamma_2 \dfrac{\partial}{\partial z}\mathrm{D}. \end{cases}$$

Applicando le quali relazioni alle (2), se ne ricavano le tre coppie di equazioni [1]:

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \beta_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \gamma_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} = \dfrac{\partial f_1}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \beta_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \gamma_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} = \dfrac{\partial f_1}{\partial s_v}\,, \\ \alpha_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \beta_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial f_2}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \beta_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial f_2}{\partial s_v}\,, \\ \alpha_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} + \beta_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \gamma_1 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial f_3}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} + \beta_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \gamma_2 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial f_3}{\partial s_v}\,. \end{cases}$$

Si ottengono così, per le sei discontinuità indicate, sei equazioni lineari non omogenee: delle quali però il determinante dei coefficienti si riconosce facilmente essere nullo.

Aggiungiamo alle tre coppie di equazioni, rispettivamente, le seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \beta_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \gamma_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} = \mathrm{X}_1\,, \\ \alpha_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \beta_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} = \mathrm{X}_2\,, \\ \alpha_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} + \beta_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \gamma_3 \mathrm{D}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \mathrm{X}_3\,, \end{cases}$$

dove le $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ rappresentano tre nuove incognite, deducendone così tre terne corrispondenti.

[1] Sulla ripetizione degli operatori $\dfrac{\partial}{\partial s_u}$, $\dfrac{\partial}{\partial s_v}$, in relazione colle derivate di ordine superiore, rispetto a u e a v, vedasi la mia Nota, precedentemente citata, *Nuove applicazioni di una formula commutativa.*

Dalla prima terna, moltiplicando per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e sommando, e dalla seconda, moltiplicando per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e sommando, si ricava, senz'altro,

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\,\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \alpha_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial s_u} + \alpha_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial s_v} + \alpha_3 \mathrm{X}_1, \\ \mathrm{D}\,\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\,\partial z} = \gamma_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial s_u} + \gamma_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial s_v} + \gamma_3 \mathrm{X}_2. \end{cases}$$

Ma dalla terza terna, moltiplicando per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e sommando, si ottiene

$$\mathrm{D}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\,\partial z} = \beta_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_u} + \beta_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_v} + \beta_3 \mathrm{X}_3.$$

Quindi, la prima delle tre equazioni seguenti, dove i secondi membri hanno il significato che risulta dalle precedenti:

$$(7)\qquad \gamma_3 \mathrm{X}_2 - \beta_3 \mathrm{X}_3 = \mathrm{F}_1\ ,\ \alpha_3 \mathrm{X}_3 - \gamma_3 \mathrm{X}_1 = \mathrm{F}_2\ ,\ \beta_3 \mathrm{X}_1 - \alpha_3 \mathrm{X}_2 = \mathrm{F}_3.$$

Moltiplicando, membro a membro, per $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ e sommando, dai primi membri si ha immediatamente 0. Dai secondi membri, si ha

$$-\alpha_2 \frac{\partial f_1}{\partial s_u} + \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial s_v} - \beta_2 \frac{\partial f_2}{\partial s_u} + \beta_1 \frac{\partial f_2}{\partial s_v} - \gamma_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_u} + \gamma_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_v},$$

che, per le (4), si riduce parimente a 0.

Le tre equazioni (7) si riducono a due indipendenti, che permettono di determinare due delle incognite $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$, in termini della rimanente.

Trattando ora allo stesso modo le equazioni conformi alle (4), relative a η e a ζ, si arriva al risultato che, per mezzo di formole come le (6), le discontinuità delle tre sestuple di derivate seconde si possono esprimere, oltre che in termini degli indicati elementi, come funzioni di tre parametri, che restano, fino a questo momento, incogniti.

Ma, applicando il D alle equazioni dell'equilibrio elastico (supposte nulle o note le discontinuità delle forze di massa), ed esprimendo poi nel suddetto modo le discontinuità di tutte le derivate seconde delle ξ, η, ζ, si otterranno tre equazioni lineari non omogenee, rispetto a quei parametri incogniti, di cui il determinante dei coefficienti, che involge le costanti di elasticità del corpo considerato, non sarà identicamente nullo, atte a determinarli. In seguito a che, per mezzo delle (6), si otterranno le espressioni cercate.

Infine, ottenute queste espressioni, formandone base per un trattamento analogo al precedente, e valendosi di equazioni dedotte dalle equazioni di equilibrio elastico, coll'ulteriore derivazione, membro a membro, se ne ricavano espressioni, composte cogli indicati elementi, per le discontinuità delle derivate terze, e così, di mano in mano, per le discontinuità delle derivate di ordine comunque elevato.

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota I del Corrisp. Quirino Majorana (1).

In alcune precedenti Note (2), dopo aver descritte delle esperienze tendenti a dimostrare la diminuzione di peso di un corpo circondato simmetricamente da un involucro materiale, manifestai il proposito di ripetere le stesse esperienze con mezzi più grandiosi. Ed ora, dopo due anni di nuove ricerche, è mia intenzione di riferire sui risultati recentemente ottenuti.

Ricordo anzitutto, che i ragionamenti ed i calcoli già svolti, mi portarono a stabilire il limite massimo del coefficiente di assorbimento gravitazionale per unità di densità materiale e di lunghezza, nella misura di $h = 7{,}65 \cdot 10^{-12}$; e ciò in base alla considerazione della massa solare, che presenta una certa densità apparente (1,41), diversa da zero. Quanto al limite minimo dello stesso coefficiente, feci la ipotesi, giustificata da alcuni ragionamenti che qui non ripeto, che la densità vera del sole possa essere alquanto superiore alla apparente; e ciò, in causa della enorme agglomerazione di materia che quell'astro rappresenta. Da quanto già dissi, risulta che, anche supponendo la densità vera del sole solo di un decimo superiore alla apparente, il valore di h è sempre dell'ordine di 10^{-12}. Cioè, qualunque sia l'ipotesi della densità solare vera, tra i limiti 1,5 (circa) ed infinito, l'ordine di grandezza di h è sempre lo stesso. Questo importante risultato teorico, basato su ipotesi relativamente semplici, mi servì di guida per realizzare le già descritte esperienze, aggiustando la sensibilità dei miei apparecchi, in guisa corrispondente alle fatte previsioni. E ricordo infine che il valore trovato per h era di $6{,}66 \cdot 10^{-12}$ (3), rimanendo così confortata la attendibilità delle previsioni stesse. Questo numero era stato dedotto dall'osservazione di una variazione di peso della sfera pesante 1274 gr., di 1/1000 di mg., ossia di un miliardesimo circa, del peso totale.

Nelle nuove esperienze, di cui dò notizia sommaria in questa prima Nota, a parte la maggior precisione relativa delle misure, dovuta alle maggiori dimensioni della massa schermante, mi sono accorto di una nuova causa di errore (dipendente da una certa inevitabile imperfezione costruttiva di qualunque bilancia, che di solito non viene considerata) che ora ho eliminato.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 agosto 1921.

(2) Vedi questi Rendiconti, volumi XXVIII e XXIX.

(3) Un errore di calcolo mi aveva fatto scrivere nelle dette Note $6{,}73 \cdot 10^{-12}$, cifra lievissimamente diversa.

Nelle prime esperienze, adoperavo una massa schermante di mercurio di 104 kg., disposta in un cilindro retto a base circolare, di diametro eguale all'incirca all'altezza. Il centro del cilindro coincideva esattamente col centro della sfera di piombo di 1274 gr. Nelle nuove esperienze, pur lasciando inalterate le già descritte disposizioni, per quanto riguarda la sfera di piombo e la bilancia, ho sostituito al mercurio il piombo, portandone la massa a 9603 kg., cioè a circa 100 volte il valore primitivo. Per ragioni costruttive tale massa è stata foggiata in forma cubica, anzichè cilindrica. Se le ipotesi e teorie a suo tempo formulate sono attendibili, e se tutte le cause di errore fossero state eliminate nella precedente determinazione di h, si può prevedere quale avrebbe dovuto essere la diminuzione assoluta di peso della sfera, soggetta alla nuova massa schermante. Essa dipende dal cammino dei raggi gravitazionali nell'interno di questa, ossia dallo *spessore medio* (inteso in un certo senso) del mantello schermante. Nelle prime esperienze, tale mantello era di cm. 8,40; nelle nuove, malgrado il notevole accrescimento della massa, il mantello è solo di 6,5 volte maggiore, con una densità materiale alquanto minore; cioè equivale ad uno spessore schermante di pari densità, di un valore $6{,}5 \cdot 11{,}34/13{,}60 = 5{,}4$ volte più grande. La variazione di peso da constatare sarebbe dunque stata di circa 5/1000 di mg.

La massa cubica di piombo, che viene ad avere, per il valore di 9603 kg., un lato di circa cm. 95, è costituita da 288 pani sovrapposti convenientemente e formanti due distinti prismi (ciascuno di 144 pani) a base rettangolare di cm. $95 \times 47{,}5$ e di cm. 95 di altezza. Questi prismi, sostenuti da apposite armature, girevoli ciascuna intorno ad un asse verticale distinto e discosto da ogni prisma per m. 1,50, possono venire a combaciare l'uno accanto all'altro con due loro facce quadrate verticali, in guisa da costituire il cubo suddetto, nel centro del quale viene ad allogarsi la sfera di piombo, sospesa alla bilancia, ed opportunamente circondata da un involucro capace di resistere al vuoto atmosferico; opportune e piccole cavità e scanalature nel piombo schermante, impediscono qualsiasi contatto di questo con l'involucro. Con ciò la massa di piombo di 9603 kg. può essere portata intorno alla sfera, od esserne allontanata (per rotazione dolce delle armature) a circa m. 3 di distanza; corrispondentemente si osservano gli spostamenti di un raggio luminoso riflesso sul giogo, alla distanza di m. 20 da questo.

Ma il movimento della considerevole massa di piombo, sostenuta in un locale sottostante a quello della bilancia, occasiona inevitabilmente delle deformazioni in tutto l'edificio in cui si sperimenta che, comunque apparentemente piccole, si riverberano sulle varie parti della bilancia. Così il piano di agata di appoggio del coltello centrale, subisce una rotazione di circa 10″, e uno spostamento assoluto rispetto ad altri punti fissi, dell'ordine di qualche centesimo di mm. Sulle letture della posizione di equilibrio della bilancia, ha influenza soltanto la rotazione suddetta, come farò vedere. Ma tale in-

fluenza è stata da me attentamente studiata, mediante un congegno speciale, capace di svelare sino ad 1/100 di minuto secondo d'arco. Con questa correzione, e con le altre di cui sarà diffusamente detto in seguito, ho potuto constatare che la diminuzione di peso della sfera di piombo, per la presenza della massa schermante di circa 10 tonnellate, anzichè essere di 5/1000 di mg., risulta solo di circa 2/1000. Da ciò si ricava che $h = 2{,}8 \cdot 10^{-12}$. Tale notevole discordanza col primitivo valore ($6{,}66 \cdot 10^{-12}$), può probabilmente essere attribuita alla detta rotazione del piano di agata, che forse già si manifestava nelle prime esperienze, senza che io me ne fossi reso conto. Ma non è da escludersi che essa dipenda da difetto della mia teoria, la quale potrebbe rappresentare il fenomeno, solo in prima approssimazione. La risposta definitiva a tale dubbio, potrà aversi quando le mie esperienze saranno state ripetute da altri, in condizioni diverse (1).

***

Se, come ritengo attendibile e come cercherò di dimostrare nelle prossime Note, tutte le possibili cause di errore sono state da me prese in considerazione, è a ritenersi che effettivamente vi ha sparizione del peso della materia, nelle descritte circostanze. Ora, tale fatto può dar luogo alla formulazione di teorie o modelli del fenomeno gravitazionale, fra cui voglio esaminarne due dei più attendibili; farò poi vedere come la descritta disposizione sperimentale permetta di decidere quale di tali due modelli sia accettabile.

Il *primo modello* è stato da me indicato nelle Note precedenti: emissione continua di particelle da parte della sostanza materiale; l'incontro di queste particelle, con altra materia, darebbe luogo alla formazione della forza attrattiva; inoltre le particelle che urtano la materia spariscono in tutto od in parte, donde l'assorbimento parziale di quella forza. Si tratta dunque di un modello che non sodisfa alla meccanica classica, inquantochè è contrario alla teoria dell'urto dei corpi; infatti ad un urto di una particella con la materia, corrisponderebbe un impulso su questa in direzione contraria. Ma occorre tener presente, che accettando tale *primo modello*, nessuna ipotesi concreta si fa sulla natura delle particelle; quello che si può solo dire di esse, è che le loro proprietà sono diverse da quelle della materia comune: in questo senso, il modello può essere logico ed ammissibile.

Un *secondo modello* deriva dalla vecchia concezione di Lesage delle cosidette particelle ultramondane. Sono note le difficoltà, dal punto di vista meccanico, a cui tale concezione dà luogo, e come non sia stato possibile,

(1) A. A. Michelson mi chiede cortesemente che io, pur continuando ad occuparmi di queste ricerche, consenta che tale ripetizione avvenga al più presto nell'Osservatorio Solare del Monte Wilson in Pasadena (California), per opera del Direttore di quest'Osservatorio, dott. G. E. Hale; assai di buon grado ho aderito a tale richiesta.

nemmeno con la modificazione di W. Thomson o con le discussioni di altri [1], di ricondurla ad un modello meccanico accettabile. Prescindendo da ciò, si può anche in tale modello supporre che l'assorbimento della forza gravitazionale sia dovuto alla sparizione di qualche particella.

Secondo il primo modello, si considerino due corpi A e B attirantisi; ponendo un terzo corpo C fra di essi, la primitiva forza attrattiva verrebbe ad essere alquanto diminuita, perchè alcune particelle viaggianti fra A e B vengono assorbite da C. Nel caso del secondo modello l'attrazione di A verso B si spiega con la reciproca difesa od azione di schermo di queste masse, contro gli urti di particelle energetiche provenienti dalle remote località dell'universo, in tutte le direzioni; se ora il terzo corpo C fosse costituito da un involucro *esterno* ad entrambe le masse A e B, si avrebbe a che fare con una diminuzione della forza attrattiva fra queste due masse, perchè qualche particella verrebbe trattenuta da C. Si comprende che anche se l'involucro non fosse chiuso, possa verificarsi, sia pure in misura ridotta, la diminuzione. Per cui, per l'ipotesi Lesage, anche ponendo i tre corpi nell'ordine A B C, si genererebbe una diminuzione della forza attrattiva fra A e B; mentre questa diminuzione si verificherebbe col primo modello, soltanto se i tre corpi fossero posti nell'ordine A C B.

Da queste considerazioni, deriva il controllo sperimentale di cui ora dirò sommariamente.

In una seconda serie di esperienze, ho spostato la sfera di piombo lungo la verticale passante per il centro del cubo, in guisa da portarla *immediatamente al disopra* (5 cm. più in alto) della sua faccia orizzontale superiore. Con ciò, si osserva una notevolissima differenza tra le posizioni di equilibrio della bilancia, tra il caso in cui la massa schermante è *sotto la sfera* e quello in cui essa ne è *allontanata a 3 metri*, dovuta alla attrazione di tutta la massa di piombo di 9603 kg. Tale attrazione è di circa 0,2 mg. (corrispondente, per la sensibilità media della bilancia, a circa 40 mm. di spostamento dell'indice luminoso sulla scala a 20 metri dal giogo). Se si conoscesse *a priori* e con tutta esattezza, il valore di tale attrazione (e ciò in base all'applicazione della legge di Newton), la differenza fra tale valore e quello osservato, darebbe l'assorbimento gravitazionale, se esiste. Ma, come mostrerò in seguito, non si può, per varie ragioni, prevedere con la necessaria precisione, il valore della detta attrazione, o più propriamente, la deviazione dell'indice luminoso della bilancia.

Per cui ho proceduto ad una terza serie di osservazioni, sperimentando con la sfera *immediatamente al disotto* (5 cm. più in basso) del cubo di piombo. Si comprende che in tal caso l'attrazione della sfera è volta in

[1] Vedi al riguardo il riassunto di P. Drude, *Ueber Fernwirkung*. Ann. d. Phys., B. 62, pp. I-XLIX.

senso contrario a quella della seconda serie, e, se non esistesse l'assorbimento, essa dovrebbe essere esattamente eguale alla precedente determinazione, in valore assoluto. Si trova invece che essa è alquanto superiore e più precisamente di 4,1000, circa, di mg. Si noti che questa variazione è all'incirca il doppio, di quella constatata quando la sfera si trova al centro del cubo.

Se ora, riferendoci ai due modelli del fenomeno gravitazionale già descritti, diciamo A la terra, B la sfera, C il cubo di piombo, si vede agevolmente che l'esperimento porta all'accettazione del primo modello (per il quale si ha assorbimento, se i tre corpi sono disposti nell'ordine A C B) ed al rigetto del secondo, ossia di quello di Lesage.

L'importanza di questo risultato appare grandissima. Esso ci dice anzitutto, che, accettato il modello primo, quello cioè delle particelle energetiche emesse dalla materia, le misure della prima serie di esperienze (sfera *nel centro* del cubo) sono d'accordo con quelle della seconda e terza serie (sfera, prima *sopra*, e poi *sotto* il cubo); infatti nella prima, i raggi gravitazionali traversano uno spessore di piombo corrispondente all'incirca a metà del lato del cubo; nella seconda serie essi traversano tutto il lato del cubo; nella terza serie non traversano alcuna massa schermante; in quest'ultima soltanto non vi ha dunque assorbimento, che si riscontra, per contro, al massimo grado nella seconda serie, e più propriamente in misura doppia di quel che si osserva nella prima.

Lo stesso risultato ci permette di localizzare la causa del fenomeno gravitazionale (quantunque nella sua essenza ultima non possiamo comprenderne bene la natura); tale fenomeno si manifesta e si svolge in conseguenza di una proprietà specifica della materia dove essa si trova, indipendentemente da una qualsiasi azione da parte di località esterne comunque discoste, rispetto ai corpi attraentisi.

Dal punto di vista filosofico, ritengo questo risultato sperimentale assai soddisfacente, giacchè è più logico attribuire la causa di un fenomeno solo a contingenze perfettamente controllabili (presenza dei due corpi materiali), piuttosto che all'ipotetico intervento delle azioni esteriori. Per cui, sino a prova od argomento inconfutabile contrario, supporrò basato il fenomeno gravitazionale sulla emissione di particelle energetiche da parte della materia ponderabile. Potrebbesi peraltro pensare all'intervento di un mezzo interposto (etere classico od altro), che con le sue deformazioni elastiche statiche, occasioni quel fenomeno: ma al riguardo mi riferisco alle considerazioni già svolte nelle Note precedenti: se il mezzo intervenisse, assai probabilmente si dovrebbero osservare variazioni nella intensità della forza gravitazionale anche se essa traversi piccoli spessori di sostanza materiale, il che, come è noto, non è vero. Concludo dunque, insistendo sulla attendibilità della mia ipotesi, la quale, pur non basandosi su di un modello interpretabile meccanicamente, ha il conforto del controllo sperimentale.

Mineralogia. — *Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto* (1). Nota I del Corrispondente Ferruccio Zambonini (2).

In un mio recente lavoro (3), ho avuto occasione di studiare le relazioni che passano fra la composizione chimica ed alcune proprietà ottiche nei cristalli misti della serie clinozoisite-epidoto. In modo speciale io ho richiamato l'attenzione sul fatto che l'asse ottico emergente dalla faccia (001) forma, con la normale alla faccia stessa, un angolo che cresce fortemente col contenuto in ferro-ferrico dei cristalli misti. Fondandomi su misure mie e di altri osservatori, io ho potuto stabilire che la variazione di quell'angolo (da me indicato con ω o con ω', a seconda che viene misurato nell'aria o nell'interno dei cristalli) in funzione della composizione è lineare negli epidoti con $2V_{n_p} \leq 90°$, mentre nelle clinozoisiti con $2V_{n_p} > 90°$ è molto più rapida e non rappresentabile con una linea retta (4). Lo stesso fatto si

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

(2) Presentata all'Accademia il 16 agosto 1921.

(3) *Sulla clinozoisite di Chiampernotto in val d'Ala.* Bollettino R. Comitato Geologico d'Italia, XLVII, fasc. 1-4. pag. 65. Il manoscritto fu completato nel giugno 1918, e la tipografia lo compose rapidamente, ma il fascicolo del Bollettino comparve con grande ritardo solo nel 1920. Causa lo stato di guerra, non mi fu possibile aver conoscenza in tempo di un lavoro di M. Goldschlag, *Ueber die optischen Eigenschaften der Epidote*, pubblicato nel 1917, nel vol. XXXIV delle Tschermak's min. petr. Mitth. pagine 23-60). Il Goldschlag ha ripreso le determinazioni ottiche nel materiale già studiato dal Kehldorfer (cfr. F. Becke, *über den Zusammenhang der physikalischen, besonders der optischen Eigenschaften mit der chemischen Zusammensetzung der Silicate.* Doelter's *Handbuch der Mineralchemie*, 1912, II, 24), ma i nuovi valori dati dal Goldschlag per 2 V non si differenziano che di pochissimo da quelli trovati dal Kehldorfer e da me utilizzati, dimodochè i miei risultati non vengono modificati dalle nuove determinazioni del Goldschlag. Per quel che riguarda l'originalità del mio lavoro, è da osservare che il Goldschlag non ha punto insistito sull'importanza delle lamine secondo {001} per la diagnosi dell'epidoto e della clinozoisite, importanza da me posta in luce ed espressa in formule quantitative. Quanto alla variazione di 2 V in funzione della composizione, è sfuggito al Goldschlag il fatto che detta variazione è lineare nei termini epidotici. Ciò dipende dall'avere egli espresso la composizione dei cristalli misti in *mole* per cento, anzichè, come ho fatto io, in per cento di ferriepidoto. Il Goldschlag non ha nemmeno dato formule che leghino 2 V alla composizione.

(4) Le formule da me stabilite sono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\omega &= -0°51,16'\,x + 41°53' \\ \omega' &= -0°28,32'\,x + 23°12'\end{aligned}\right\} \text{per gli epidoti con } 2V_{n_p} < 90°$$

$$\omega' = 43°24' - 6°26'\,x + 0°28\,x^2 \text{ per le clinozoisiti con } 2V_{n_p} > 90°.$$

Con x si indica il per cento in peso di ferriepidoto $HCa_2Fe_3Si_3O_{13}$. Basta dividere x per 2.26 per ottenere il contenuto in Fe_2O_3 dei cristalli misti.

osserva, naturalmente, per la variazione di $2V_{n_p}$ in funzione del contenuto in ferriepidoto (1).

Dal complesso delle ricerche risultava che doveva aversi sensibilmente $2V = 90°$ per un tenore in Fe_2O_3 uguale, all'incirca, a 3,4-3,5 %. Questo risultato andava perfettamente d'accordo con le osservazioni di Weinschenk (2), il quale, nell'epidoto del Rothenkopf con $2V_{n_p} = 89°16'$ (Na) aveva trovato 3,52 % Fe_2O_3, con quelle di Millosevich (3), che aveva riconosciuto come otticamente positivi i cristallini di St. Barthélemy con 3.25 % Fe_2O_3, e con le mie, in base alle quali dei cristalli di Monte Tovo con 3,01 % Fe_2O_3 presentavano $2V_{n_p} = 91°10'$, mentre i cristalli rosei di Chiampernotto con 3.18 % Fe_2O_3 appartenevano pure alla clinozoisite, con $2V_{n_p} > 90°$. È importante anche il notare, ad ulteriore conferma del notevole grado di esattezza delle mie formule, che, fondandosi su *sette* epidoti contenenti dal 39 al 19.6 % di ferriepidoto, si calcola, per quello del Rothenkopf con 8 % di ferriepidoto, $2V_{n_p} = 89°9'$, mentre, come si è visto, Weinschenk ha trovato 89° 16'. L'accordo non potrebbe davvero essere desiderato migliore.

Però, per quanto le mie formule si adattassero ad un buon numero di epidoti e di clinozoisiti, non mancai di osservare, nel mio lavoro, che nella letteratura da me consultata vi erano quattro epidoti o clinozoisiti in disaccordo assai netto con i miei risultati, come si scorge dalla tabella seguente:

Località	Autore	Ferriepidoto per cento	$2V_{n_p}$ (trovato) (luce del sodio)	$2V_{n_p}$ (calcol.) (4)
Huntington (Mass.)	Forbes (5)	12.8	90° 32'	85° 58'
Zillerthal (verde chiaro)	Forbes (5)	15.8	87 46	83 58
Camp-Ras (Ariège)	Ganbert (6)	13	93 31	85 50
Inverness-shire	H. H. Thomas (7)	15.4	89 35	84 14

(1) Le formule da me date sono le seguenti:

(1) $2V_{n_p} = 94°27' - 0°39{,}8'x$ per gli epidoti

(2) $2V_{n_p} = 114°40' - 5°22'x + 0°17x^2$ per le clinozoisiti.

Per $2V$ molto prossimo a 90°, la formula (1) dà per x dei valori un po' troppo bassi.

(2) *Ueber Epidot und Zoisit.* 1. *Der Epidot vom Rothenkopf.* Zeitsch. für Kryst., 1896, XXVI, 163.

(3) *Sopra gli epidoti poco ferriferi (clinozoisite-epidoto) di S. Barthélemy in Val d'Aosta.* Atti Società Ligustica di Scienze nat. e geogr., 1908, XIX, fasc. 3-4.

(4) Il calcolo si è eseguito con la formula $2V_{n_p} = 94°27' - 0°39.8'x$.

(5) *Ueber den Epidot von Huntington, Mass., und über die optischen Eigenschaften des Epidots.* Zeitsch. für Kryst. 1896, XXVI, 138.

(6) In A. Lacroix, *Minéralogie de la France et de ses Colonies*, 1910, IV (2e), 710.

(7) *On an epidote from Inverness-shire.* Min. Mag. 1905, XIV, 109.

Le differenze fra i valori calcolati e quelli misurati per $2V_{n_p}$ sono molto forti, tanto da giungere, nel caso della clinozoisite di Camp-Ras, a quasi 8° (7° 41′). Inoltre, mentre in base al contenuto in ferro-ferrico i cristalli di tutte e quattro le località dovrebbero appartenere a termini tipici della serie epidoto, con $2V_{n_p}$ nettamente inferiore a 90°, ciò si verifica soltanto per l'epidoto verde chiaro della valle di Ziller, mentre i cristalli dell'Inverness-shire sono negativi per la luce del sodio e positivi per quella del tallio, e quelli degli altri due giacimenti risultano positivi per tutto lo spettro visibile.

I cristalli in questione si differenziano nettamente dagli altri, ben più numerosi ed accuratamente studiati della serie clinozoisite-epidoto, che possiamo chiamare tipica, ed io mostrai, con ragioni plausibili, come fosse lecito il lasciarli provvisoriamente da parte nella discussione delle relazioni che passano fra le proprietà ottiche e la composizione chimica nella serie clinozoisite-epidoto. I cristalli dei quattro giacimenti ricordati non potevano, infatti, annullare quanto risultava evidente dallo studio accurato, eseguito su materiale assai adatto, di cristalli con composizione variabile entro limiti molto estesi. E che io ben mi apponessi, risulta chiaro dalle determinazioni ottiche che U. Grubenmann [1]) ha fatto conoscere degli epidoti della Val Maigels. T. Woyno, infatti, nella varietà grigia con 13.1 % di ferriepidoto, ha trovato $2V_{n_p} = 85°$, mentre dalla mia formula si calcola 85° 46′ [2]). Lo stesso Woyno, in un cristallo della varietà bruno-verdiccia contenente 16.6 % di ferriepidoto, ha trovato, con misure approssimative, $2V_{n_p} = 81° \pm 1\,^1/_2°$: ora, dalla mia formola si calcola $2V_{n_p} = 83° 26′$ e l'accordo si può considerare ancora come sufficiente, data l'incertezza delle misure e la variabilità di composizione, evidente già per la variazione del colore [3]), sicchè appare probabile che il cristallo nel quale fu determinato 2V non possedesse esattamente la composizione media risultante dall'analisi di altri cristalli.

Prescindendo da quest'ultimo epidoto più ferrifero, noi abbiamo che i cristalli grigi della val Maigels, quelli, pure grigi, di Huntington, e quelli di Camp-Ras possiedono, praticamente, la stessa quantità di Fe_2O_3 (5.79, 5.67 e 5.75 % rispettivamente), ma, ciò non ostante, dànno per $2V_{n_p}$ dei valori differentissimi (85°, 90° 32′ e 93° 31′). Si tratta di divergenze così forti, che si resta dubbiosi sulla possibilità di spiegarle con una differenza

[1]) *Der Granat aus dem Maigelstal im Bündneroberland und seine Begleitmineralien*. Festschrift Universität Zürich, 1914.

[2]) Dalla mia formula, in base al valore misurato di 2V, si calcola Fe_2O_3 6,3 % (trovato 5,8 %).

[3]) Grubenmann scrive che i cristalli sono « grünlichbrauñ von wechselnder Farbentiefe ».

di composizione fra il materiale analizzato e quello sottomesso ad indagini ottiche, con la presenza di lamelle di geminazione, ecc.

Ad ogni modo, fino a qualche tempo fa, pur essendomi apparsa degna di attenzione un'altra spiegazione del tutto nuova e più convincente, mi era sembrato prudente il non avanzarla, limitandomi a porre da lato gli epidoti « anomali » come bisognosi di un più attento esame. Continuando i miei studî sui minerali di Val d'Ala, ho incontrato dei termini della serie epidoto-clinozoisite che mi hanno permesso di stabilire, con tutta certezza, che *nella serie in questione è possibile riscontrare dei cristalli misti nei quali ad una identità quasi perfetta di composizione fa riscontro una differenza notevole nelle proprietà ottiche, ed altri, al contrario, nei quali le proprietà ottiche sono molto vicine, mentre diversa, invece, appare la composizione chimica.* Si tratta, sicuramente, di un risultato a prima vista paradossale, in contrasto con quanto di solito si pensa intorno alle relazioni fra composizione chimica e proprietà fisiche nei cristalli misti, ma, come vedremo, la spiegazione del fenomeno è semplice.

È da Monte Tovo in Val d'Ala che provengono i cristalli da me studiati. Nei giacimenti minerali di quella importante località, scoperta, si può dire, già da molti anni, dal Collega ed amico prof. G. Boeris, il quale con grande liberalità ha messo a mia disposizione una parte, assai interessante, del materiale da lui raccolto, si trovano varî termini della serie clinozoisite-epidoto. Alcuni di essi appartengono a termini tipici epidotici, e non è il caso di descriverli qui: il loro studio troverà posto adatto in una Memoria alla quale attendo da tempo intorno ai minerali di Val d'Ala. Altri cristalli, invece, meno frequenti, per $2V_{n_p} > 90°$, per la posizione di n_p nell'angolo ottuso β, per la debole birifrangenza, per i bassi valori degli indici di rifrazione, per il grande angolo che l'asse ottico emergente dalla base forma con la normale a detta faccia, non si esita a riferire alla clinozoisite, nel senso di Weinschenk (1). Procedendo alle analisi chimiche, si trovano, però, in alcuni casi, dei valori relativamente alti per il tenore in ferro-ferrico, in pieno contrasto con quelli che si dedurrebbero dalle proprietà ottiche.

Talune delle « clinozoisiti » studiate di Monte Tovo sono sensibilmente normali: le loro proprietà ottiche vanno d'accordo, cioè, con la composizione chimica, secondo quanto risulta dalle ricerche eseguite dal Weinschenk, dal Kehldorfer e dal Goldschlag intorno ad altre clinozoisiti tipiche od a termini epidotici ad esse assai prossimi. Si tratta di cristalli per lo più poveri di forme, tabulari secondo la base, di colore giallo molto chiaro, nei

(1) Weinschenk intende indicare con « clinozoisite » tutti i termini monoclini del gruppo zoisite-epidoto, che si avvicinano per la loro composizione chimica alla zoisite rombica, che sono otticamente positivi e possiedono una rifrangenza ed una birifrazione più deboli degli epidoti propriamente detti.

quali io ho trovato, per la luce del sodio, $2V_{n_p} = 91^\circ 10'$. La loro composizione chimica è risultata la seguente:

SiO_2 39.16 Al_2O_3 31.12 Fe_2O_3 3.01 FeO 0.64 MnO 0.02 CaO 24.28 MgO 0.10 $H_2O -$ 0.13 $H_2O +$ 2.00 Sa = 100.46.

I cristalli analizzati contengono 6,8 % di ferriepidoto, ed in base alla mia formula per le clinozoisiti si calcola $2V_{n_p} = 91^\circ 13'$. Si ha a che fare, perciò, con una clinozoisite normale, per quel che riguarda il valore dell'angolo degli assi ottici.

Molto più interessanti sono dei piccoli cristalli, di colore giallo pallidissimo, dotati di un vivissimo splendore quasi adamantino, caratterizzati dal fatto di essere pochissimo estesi nella direzione dell'asse b, sicchè appaiono, di solito, piuttosto tozzi. Nella zona [010] le forme dominanti sono $\{001\}$ e $\{100\}$, per lo più con grandezza poco diversa nei cristalli unici (1): tra le forme laterali, la più estesa è $\{\bar{1}11\}$. In complesso, i cristalli in questione sono poveri di forme: io ho osservato soltanto le seguenti: $M\{001\}$, $T\{100\}$, $e\{101\}$, $f\{\bar{3}01\}$, $l\{\bar{2}01\}$, $x\{\bar{3}02\}$, $r\{\bar{1}01\}$, $N\{\bar{3}04\}$, $i\{\bar{1}02\}$, $z\{110\}$, $\varepsilon\{113\}$, $d\{111\}$, $n\{\bar{1}11\}$, $o\{011\}$, $G\{\bar{3}44\}$, delle quali costantemente presenti sono $\{001\}$, $\{100\}$ e $\{\bar{1}11\}$, di rado mancano $\{110\}$ e $\{011\}$, e molto frequenti sono anche $\{\bar{2}01\}$ e $\{101\}$. Abbastanza comuni sono i geminati secondo la solita legge: asse di geminazione la normale a $\{100\}$: essi si presentano sempre tabulari parallelamente a $\{100\}$.

Per le ricerche ottiche, io ho adoperato esclusivamente i cristallini unici, tozzi, con i due pinacoidi $\{001\}$ e $\{100\}$ presso a poco ugualmente estesi, i quali all'esame microscopico risultano dotati di proprietà ottiche abbastanza uniformi (2), senza quelle strutture zonate pronunciate, a proprietà anche variabilissime, così frequenti nell'epidoto. Il pleocroismo è pressochè insensibile, anche in lamine dello spessore di 1,5 mm.

Le proprietà ottiche di questi cristalli sono quelle caratteristiche della clinozoisite. L'asse n_p dell'indicatrice ottica giace nell'angolo ottuso β: in una nitida sezione parallela a (010), io ho misurato, per la luce del sodio, $c : n_p = 6^\circ 32'$; in una plaga ristretta verso l'esterno si aveva $c : n_p = 3^\circ 37'$ soltanto, sempre nell'angolo ottuso β (3). È notevole, però, che, contrariamente a quanto si verifica nelle clinozoisiti tipiche, l'estinzione avviene perfettamente anche in luce bianca.

(1) Rari sono i cristalli unici tabulari secondo $\{100\}$.

(2) Come verrà mostrato nella Memoria sui minerali di val d'Ala, fra i cristalli unici tabulari secondo la base o $\{100\}$ non ne mancano di quelli le proprietà ottiche dei quali variano abbastanza notevolmente da un punto all'altro dello stesso cristallo.

(3) Valori vicini a 6° per $c : n_p$ si sono ottenuti anche in altre sezioni. Che n_p debba essere sensibilmente inclinato su c risulta senz'altro già dal fatto che la bisettrice emergente da (100) è nettamente inclinata sulla normale a quella faccia.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un'equazione funzionale.* Nota III di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera (1).

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *continue* nell'intervallo $(0\,,\,a)$, α una costante *positiva minore di* 1, $N(x\,,\,s)$ una funzione *continua* nel triangolo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq s \leq x$, $P(x\,,\,s)$ una funzione *continua* nel triangolo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq s \leq \alpha x$.

Faremo vedere che *se* $|g(0)| < 1$, *l'equazione*

$$(1)\quad u(x) = g(x)\,u(\alpha x) + \int_0^x N(x\,,\,s)\,u(s)\,ds + \int_0^{\alpha x} P(x\,,\,s)\,u(s)\,ds + f(x)$$

ammette una ed una sola soluzione finita e continua in $(0\,,\,a)$.

Si determini un intervallo $(0\,,\,b)$ $(b \leq a)$ tale che in esso sia $|g(x)| < \varrho < 1$.

Ponendo

$$f_0(x) = f(x)\,,$$

$$f_n(x) = g(x)\,f_{n-1}(\alpha x) + \int_0^x N(x\,,\,s)\,f_{n-1}(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^{\alpha x} P(x\,,\,s)\,f_{n-1}(s)\,ds \qquad (n = 1\,,\,2\,,\,\ldots)\,.$$

faremo vedere che *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente in* $(0\,,\,b)$ *e rappresenta quindi in questo intervallo una soluzione della* (1).

Trovata tale soluzione, nel secondo membro della (1) esprimiamo la $u(\alpha x)$ e la $u(s)$ del secondo integrale per mezzo della serie trovata, e facciamo poi variare x tra 0 e $\frac{b}{\alpha}$. Allora, nella nostra equazione la somma del primo, del terzo e del quarto termine del secondo membro diventa una funzione nota e l'equazione si riduce ad una di Volterra di seconda specie che risoluta ci dà la $u(x)$ nell'intervallo $\left(0\,,\,\frac{b}{\alpha}\right)$, ed essa nell'intervallo $(0\,,\,b)$ coincide con quella già trovata, cioè con la somma delle $f_n(x)$.

Procedendo analogamente, dopo avere calcolata la $u(x)$ in $\left(0\,,\,\frac{b}{\alpha}\right)$ la si può calcolare in $\left(0\,,\,\frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, si arriva a calcolarla in $(0\,,\,a)$. Ci

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

resta da far vedere la convergenza uniforme della serie delle $f_n(x)$ nell'intervallo $(0\,,b)$.

Siano K, H ed l tre costanti positive tali che sia

$$|N(x\,,s)|<K\ ,\ |P(x\,,s)|<H\ ,\ |f(x)|<l\,,$$

e formiamo la seguente equazione ausiliaria:

$$(2)\qquad v(x)=\lambda\left[\varrho v(\alpha x)+K\int_0^x v(s)\,ds+H\int_0^{\alpha x}v(s)\,ds\right]+l$$

dove λ è un parametro che faremo variare e ϱ è il numero avanti introdotto.

Per $|\lambda|<\dfrac{1}{\varrho}$ troviamo coi soliti metodi la seguente soluzione

$$v(x)=l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K+H\alpha)\,(K+H\alpha^2)\ldots(K+H\alpha^n)}{(1-\lambda\varrho)\,(1-\lambda\varrho\alpha)\ldots(1-\lambda\varrho\alpha^n)}\,\frac{\lambda^n}{n!}\,x^n$$

dove x può variare tra 0 ed ∞ — e potrebbe anzi prendere qualunque valore reale o complesso —.

Ora il secondo membro si può sviluppare in serie di potenze di λ all'interno del cerchio $|\lambda|\leq\dfrac{1}{\varrho}$, (entro cui cade il punto $\lambda=1$), cioè si ha

$$(3)\qquad v(x)=l\left[v_0(x)+\lambda v_1(x)+\lambda^2 v_2(x)+\cdots\right];$$

tenendo conto dell'equazione (2) a cui soddisfa $v(x)$ si trova

$$v_0(x)=1$$

$$v_n(x)=\varrho v_{n-1}(x)+K\int_0^x v_{n-1}(s)ds+H\int_0^{\alpha x}v_{n-1}(s)ds\quad(n=1\,,2\,,..)\,.$$

Le $v_n(x)$ sono quindi polinomî in x a coefficienti positivi, e perciò la serie $\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)$ — che è quella che figura al secondo membro della (3) per $\lambda=1$ — converge uniformemente in qualunque intervallo finito. D'altra parte, si verifica per ricorrenza che è $|f_n(x)|\leq lv_n(x)$ nell'intervallo $(0\,,b)$, e quindi resta ivi dimostrata la convergenza uniforme della serie delle $f_n(x)$.

Abbiamo così trovata una soluzione della (1) in $(0\,,a)$: *essa è l'unica soluzione finita*. Infatti, se vi sono due di tali soluzioni la loro differenza sarà una funzione $u(x)$ finita in $(0\,,a)$ e soddisfacente alla (1) con $f(x)=0$. Ma allora, ponendo

$$u_0(x)=u(x)$$

$$u_n(x)=g(x)\,u_{n-1}(\alpha x)+\int_0^x N(x\,,s)\,u_{n-1}(s)\,ds+\int_0^{\alpha x}P(x\,,s)\,u_{n-1}(s)\,ds$$

$$(n=1\,,2\,,\ldots)$$

si avrà sempre, in base alla (1) stessa, $u_n(x) = u(x)$. Ma se è $|u(x)| < k$ sarà in $(0, b)$ $|u_n(x)| < k v_n(x)$ cioè $|u(x)| < k v_n(x)$, e siccome $v_n(x)$ tende a zero al tendere di n ad ∞ si conclude che $u(x)$ è nulla in $(0, b)$, e perciò anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$, in $\left(0, \frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, e finalmente in $(0, a)$.

2. Introduciamo ora nella (1) un parametro λ e consideriamo l'equazione

$$u(x) = \lambda \left[g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^{x} \mathbf{N}(x, s)\, u(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} \mathbf{P}(x, s)\, u(s)\, ds \right] + f(x). \tag{4}$$

Toglieremo l'ipotesi che sia $|g(0)| < 1$ ma aggiungeremo l'altra che $f(x)$ *e* $g(x)$ *ammettano derivate di qualunque ordine rispetto ad* x *e che* $\mathbf{N}(x, s)$ *e* $\mathrm{P}(x, s)$ *ammettano derivate parziali di qualunque ordine rispetto ad* x *e ad* s, *continue nei triangoli dove le funzioni sono definite.*

Studieremo le soluzioni della (4) *che ammettono derivate di qualunque ordine in* $(0, a)$.

Supporremo $g(0) \neq 0$. Diremo in seguito brevemente del caso $g(0) = 0$, che è molto più semplice dell'altro.

Fissiamo un numero positivo $\lambda' < \frac{1}{|g(0)|}$ e si determini $b \leq a$ in modo che in $(0, b)$ sia $|g(x)| < \frac{1}{\lambda'}$, si faccia variare λ nel cerchio $|\lambda| \leq \lambda'$ e si definiscano in $(0, a)$ le $f_n(x)$ come al n. 1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ è l'unica soluzione della (4) in $(0, b)$. Se ora nella (4) si fa variare x in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ ed al posto di $u(\alpha x)$ ed $u(s)$ del secondo integrale si mettono le loro espressioni dedotte dalla serie soprascritta, vediamo che questa serie rappresenta la soluzione della (4) anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$, perchè in questo intervallo $\lambda \left[g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}(x, s)\, u(s)\, ds \right] - f(x)$ è una funzione nota che si sviluppa in serie di potenze di λ, e perciò la $u(x)$, che in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ si ottiene risolvendo l'equazione di Volterra di seconda specie a cui si riduce la (4), si sviluppa pure in serie di potenze di λ. Questa serie non può essere altro che quella già ottenuta, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$, come si vede subito eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di λ nei due membri della (4).

Dimostrato che la serie in discorso è soluzione della (4) in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ si dimostra che lo è anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, e finalmente in $(0, a)$, purchè sia $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$.

Quando si fissa per λ un valore soddisfacente a questa limitazione. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ converge uniformemente rispetto ad x in $(0, a)$. Infatti, ciò che abbiamo detto finora sussiste nella sola ipotesi che le funzioni note della (4) siano continue nei dominî dove sono definite — anche se non sono derivabili — sussiste perciò anche per l'equazione

$$v(x) = \lambda \left[|g(x)|\, v(\alpha x) + \int_0^x |N(x, s)|\, v(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} |P(x, s)|\, v(s)\, ds \right] + |f(x)|.$$

Quando $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$ si ha la soluzione $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n(x)$, che è l'analoga della serie che abbiamo formata per la (4); ora le $v_n(x)$ sono tutte positive e siccome quando si fissa λ, $v(x)$ è funzione continua di x, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n(x)$ converge uniformemente in $(0, a)$, lo stesso si potrà dunque dire della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$, perchè $|f_n(x)| \leq v_n(x)$.

3. Passeremo ora a studiare la soluzione della (4) per valori di λ il cui modulo non è minore di $\frac{1}{|g(0)|}$. Si vedrà nella trattazione che faremo che la soluzione $u(x)$ che abbiamo trovata, valida per i valori di λ di modulo minore di $\frac{1}{|g(0)|}$, è derivabile in $(0, a)$.

Ammesso che la (4) ammetta una soluzione $u(x)$ derivabile in $(0, a)$ si avrà per derivazione

$$u'(x) = \lambda \left[\alpha g(x)\, u'(\alpha x) + \int_0^x N_1(x, s)\, u'(s)\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} P_1(x, s)\, u'(s)\, ds + u(0)\, q_1(x) \right] + f'(x), \tag{5}$$

dove poniamo

$$N_1(x, s) = N(x, x) + \int_s^x \frac{\partial N(x, t)}{\partial x}\, dt$$

$$P_1(x, s) = g'(x) + \alpha P(x, \alpha x) + \int_s^x \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}\, dt,$$

$$q_1(x) = N_1(x, 0) + P_1(x, 0).$$

Il valore $u(0)$ si ricava dalla (4) ed è

$$u(0) = \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)} .$$

Per il risultato ottenuto al n. precedente possiamo dire che la (5) ammette una ed una sola soluzione per ogni valore di $\lambda \neq \frac{1}{g(0)}$ e di modulo minore di $\frac{1}{\alpha |g(0)|}$. La soluzione è la seguente

$$u'(x) = u_{1,1}(x) + \frac{\lambda f(0)}{1 - \lambda g(0)} u_{1,2}(x) ,$$

dove $u_{1,1}(x)$ ed $u_{1,2}(x)$ sono le soluzioni delle due equazioni

$$u_{1,i}(x) = \lambda \left[\alpha g(x) u_{1,i}(\alpha x) + \int_0^x N_1(x , s) u_{1,i}(s) ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} P_1(x , s) u_{1,i}(s) ds \right] + l_{1,i}(x) \qquad (i = 1 , 2)$$

con $l_{1,1}(x) = f'(x)$ e $l_{1,2}(x) = g_1(x)$. Le $u_{1,i}(x)$ si sviluppano in serie di potenze di λ all'interno del cerchio con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{\alpha |g(0)|}$, e quando si fissa λ tali serie convergono uniformemente rispetto ad x nell'intervallo $(0 , a)$. Avremo dunque che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha |g(0)|}$ e per $\lambda \neq \frac{1}{g(0)}$ la (4) ammette l'unica soluzione derivabile

$$(6) \qquad u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x) dx + \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)} \left[1 + \lambda \int_0^x u_{1,2}(x) dx \right]$$

e questa soluzione quando $\lambda < \frac{1}{|g(0)|}$ coincide con quella già trovata, perchè si è visto che se $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$ la soluzione della (4) è unica sotto la sola condizione che sia finita. Per $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{g(0)}$ la (4) ammette soluzione finita quando e solo quando è $f(0) = 0$. La necessità di questa condizione discende immediatamente dalla (4) e la sufficienza dalla (6).

Se $f(0) = 0$ e $\lambda = \lambda_0$ una soluzione della (4) sarà

$$u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x)/_0 dx$$

dove con $u_{1,1}(x)/_0$ intendiamo che in $u_{1,1}(x)$, la quale dipende anche da λ, bisogna porre $\lambda = \lambda_0$. La soluzione non è unica, perchè la funzione

$$\varphi_0(x) = 1 + \lambda_0 \int_0^x u_{1,2}(x)/_0 \, dx \tag{7}$$

soddisfa all'equazione omogenea che si ottiene dalla (4) ponendo $\lambda = \lambda_0$ ed $f(x) = 0$. Per $\lambda = \lambda_0$, se $f(0) = 0$, la più generale soluzione della (4) che sia derivabile in $(0, a)$ è

$$u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x)/_0 \, dx + c\varphi_0(x)$$

con c costante arbitraria.

Matematica. — *Sulla equazione integrale di Fredholm a nucleo non limitato.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrispondente Guido Fubini [1].

Data l'equazione integrale di Fredholm:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y) dy + f(x), \tag{1}$$

anche se il nucleo K non è limitato, supposto, *in particolare*, che esistano due numeri α e A, il primo *minore dell'unità* ed il secondo positivo, tali che in tutto il quadrato Q limitato dalle rette $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, sia sempre

$$|K(x, y)|\,|x - y|^{\alpha} \leq A, \tag{2}$$

si sa che alla risoluzione dell'equazione si può sostituire quella della seguente

$$\varphi(x) = \lambda^{\nu} \int_0^1 K_{\nu}(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f_{\nu}(x), \tag{3}$$

ove $K_{\nu}(x, y)$ è il ν^{mo} nucleo iterato, e si ha $K_0(x, y) = K(x, y)$,

$$K_1(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, y) ds \;,\; K_2(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, K_1(s, y), \ldots$$

$$f_{\nu}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K_0(x, s)\, f(s) ds + \cdots + \lambda^{\nu-1} \int_0^1 K_{\nu-1}(x, s)\, f(s) ds.$$

È noto pure che esiste un numero intiero e positivo n, tale che, per $\nu \geq n$, il nucleo K_{ν} riesce limitato in Q. Posto $\nu = n$ si può dunque sostituire all'equazione (I) un'equazione di nucleo limitato K_n.

[1] Pres. nella seduta del 6 febbraio 1921.

Nelle applicazioni è utile conoscere, in funzione di α, di A e di n, un numero positivo M che non sia superato, in tutto Q, dal valore assoluto del nucleo limitato K_n. Determinato riescirebbe l'estremo superiore di $|K_n|$, ma ci si può accontentare di avere dei numeri M che, per quanto maggiori di tale estremo, siano di facile calcolo. In questa Nota do appunto, in funzione di α, di A e di n, di questi numeri M.

1. Per la funzione $L(x, y)$, pur essa definitiva nel quadrato Q, sia sempre ivi

$$|L(x, y)|\,|x - y|^{\beta} \leq B,$$

essendo B un numero positivo e β un numero minore dell'unità. Si ponga

$$F(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, L(s, y)\, ds,$$

orbene, è facile dimostrare che:

se $\alpha + \beta < 1$, è ovunque

$$|F(x, y)| < \frac{4AB}{1 - \alpha - \beta},$$

se $\alpha + \beta > 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|\,|x - y|^{\alpha+\beta-1} < 4AB\left(\frac{1}{\alpha + \beta - 1} + \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta}\right),$$

se $\alpha + \beta = 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|\,|x - y|^{\varepsilon} < 4AB\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1 - \alpha - \varepsilon} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

dove ε è un qualunque numero positivo minore di $1 - \alpha$. Conviene prendere per ε il valore $(1 - \alpha)/2$ che minimizza il quarto fattore del secondo membro dell'ultima diseguaglianza scritta, e si ha allora:

se $\alpha + \beta = 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|^{\frac{1-\alpha}{2}} < 4AB\,\frac{3\alpha + 1}{\alpha(1 - \alpha)}.$$

2. La ripetuta applicazione, ai successivi nuclei iterati, delle diseguaglianze trovate, fatta però talvolta con qualche accorgimento per semplificare il risultato finale, dà quanto segue.

Se μ è un qualunque numero positivo, ed è sempre in Q:

$$|K(x, y)| \leq A\,|\log|x - y||^{\mu},$$

si trova

$$n = 1\ ,\ M = 4A^2\,\frac{(2\mu + 1)^{2\mu+1}}{e^{2\mu}}.$$

Valga ora la (2). Se $\alpha < 1/2$, si trova

$$n = 1 \ , \ M = \frac{4A^2}{1 - 2\alpha} .$$

Sia ora $\alpha \geq 1/2$. Se, essendo p un numero intiero e positivo è $\alpha = p/(p+1)$, si trova:

$$n = p + 1 \ , \ M = (n-1)(4n-3)2^{2n+1} n^n A^{n+1} ,$$

in particolare, per $\alpha = 1/2$, si ha:

$$n = 2 \ , \ M = 640A^3 .$$

Se è invece $(p-1)/p < \alpha < p/(p+1)$, si trova:

$$n = p \ , \ M = \frac{4^n A^{n+1}}{(n-1)!(1-\alpha)^{n-1}} \frac{\prod_1^{n-1}[(i^2+i+1)\alpha - i^2]}{\prod_1^{n-1}[(i+1)\alpha - i]} \frac{1}{n-(n+1)\alpha} ,$$

ed ingrandendo

$$M = \frac{4^n A^{n+1}[n(n-1)]^{n-2}}{(n-2)!\left(\alpha - \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1} - \alpha\right)} .$$

Matematica. — *Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali.* Nota I di Carlo Severini, presentata dal Corrispondente O. Tedone (1).

Se un sistema di funzioni ortogonali in un intervallo (a, b) (2) non è chiuso, esiste, come è noto (3), un sistema di funzioni, detto *sistema complementare* del sistema dato, che, aggiunto a questo, dà luogo ad un sistema chiuso di funzioni ortogonali. Di sistemi complementari ne esistono anzi infiniti, ma essi possano facilmente dedursi l'uno dall'altro (4); in particolare, se uno è finito, gli altri sono anche finiti e composti tutti dello stesso numero di funzioni (5).

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) Intenderemo di riferirci costantemente a funzioni sommabili insieme coi loro quadrati in (a, b).

(3) Cfr. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXI, serie 5ª (1912), pp. 675-685].

(4) Cfr. Lauricella, loc. cit. (3), pag. 677.

(5) Cfr. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXIII, serie 5ª (1914). pp. 219-225; 315-321].

In questa Nota mi propongo di esporre alcune ricerche intorno al modo di costruire un sistema complementare.

1. Ricordiamo che dicesi *equazione di chiusura* di un sistema di funzioni ortogonali e normali

$$V_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

l'equazione

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_0^n{}_k A_k V_k(x) \right]^2 dx = 0 \ , \ A_k = \int_a^b f(x) V_k(x)\, dx, \tag{2}$$

la quale può anche porsi sotto una delle seguenti forme:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_0^\infty{}_k A_k^2 \tag{2'}$$

$$\int_a^x f(x)\, dx = \sum_0^\infty{}_k A_k \int_a^x V_k(x)\, dx \ (6) \qquad (a \leqq x \leqq b). \tag{2''}$$

Dalla (2'') risulta immediatamente, che se più funzioni soddisfano all'equazione di chiusura del sistema (1), altrettanto può dirsi di ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti.

2. Scelto comunque un sistema di funzioni

$$\varphi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

tale che non esistano per le equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

soluzioni *effettive*, ossia diverse da zero in punti di (a, b) costituenti insiemi di misura non nulla (7), e posto

$$A_k^{(i)} = \int_a^b \varphi_i(x)\, V_k(x)\, dx \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

si indichi con

$$\Phi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

(6) Cfr. Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI (1913), § 2].

(7) Si può in particolare assumere:

$$\varphi_i(x) = x^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots].$$

Cfr. Severini, *Sulle equazioni integrali* $\int_a^b \theta(x)\, x^n dx = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXIX, serie 5ª (1920)].

la funzione, alla quale converge in media ([8]) la successione

$$S_n^{(i)}(x) = \sum_0^n{}_k A_k^{(i)} V_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

rappresentata quasi dappertutto in (a, b), eccettuati cioè al più i punti di un insieme di misura nulla, dalla serie

$$U_0^{(i)}(x) + \sum_1^\infty{}_\nu [U_\nu^{(i)}(x) - U_{\nu-1}^{(i)}(x)] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove

$$U_\nu^{(i)}(x) = \sum_0^\infty{}_k A_k^{(i)} \cdot \frac{1}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} V_k(x)\, dx \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ed h_ν indica il termine generale di una successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero ([9]). Questa funzione ha, rispetto al sistema dato (1), gli stessi coefficienti di Fourier della $\varphi_i(x)$, cioè

$$\int_a^b \Phi_i(x)\, V_k(x)\, dx = A_k^{(i)} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Se, come noi supponiamo, il sistema (1) non è chiuso, la differenza

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) - \Phi_i(x) \tag{8}$$

non può, per ogni i, essere quasi dappertutto uguale a zero in (a, b) ([10]).

Siano

$$\psi_{i_\nu}(x) = \varphi_{i_\nu}(x) - \Phi_{i_\nu}(x) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ i_\nu < i_{\nu+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

quelle funzioni (8) che non risultano quasi dappertutto nulle, per le quali si ha, a causa della (5) e della (7)

$$\int_a^b \psi_{i_\nu}(x)\, V_k(x)\, dx = 0 \qquad (\nu, k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

3. Nell'ipotesi che le (9) siano in numero > 1, dimostriamo ora il seguente teorema:

([8]) Cfr. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), T. CXLIV (1907), pp. 1022-1024]. — Riesz, *Ueber orthogonale Funktionen systeme* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse (1907), pp. 116-122]. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245]. — Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXX (1910), pp. 289-335].

([9]) Cfr. Severini, loc. cit. (5), § 5.

([10]) Cfr. Lauricella, loc. cit. (3), § 3. — Severini, loc. cit. (6), § 9.

Affinchè quantesivogliano funzioni (9) *siano quasi dappertutto in* (a, b) *linearmente indipendenti, è necessario e sufficiente che nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli delle corrispondenti funzioni* (3) *soddisfi all'equazione* (2).

Se infatti si ha quasi dappertutto

$$\sum_1^m{}_\nu \, C_\nu \, \psi_{i_\nu}(x) = 0 \,,$$

poichè le (6) soddisfano alla (2), alla stessa equazione deve soddisfare (§ 1) la

$$g(x) = \sum_1^m{}_\nu \, C_\nu \, \varphi_{i_\nu}(x) \,.$$

Viceversa si abbia

$$\int_a^b [g(x)]^2 \, dx = \sum_0^\infty{}_k \, B_k^2 \quad , \quad B_k = \int_a^b g(x) \, V_k(x) \, dx \,.$$

Essendo

$$\int_a^b [G(x)]^2 \, dx = \sum_0^\infty{}_\mu \, B_k^2$$

ove si è posto

$$G(x) = \sum_1^m{}_\nu \, C_\nu \, \Phi_{i_\nu}(x) \,,$$

se ne deduce

$$\int_a^b [g(x) - G(x)]^2 \, dx = 0 \,,$$

e quindi quasi dappertutto in (a, b)

$$g(x) = G(x) \,.$$

Con ciò il teorema è dimostrato.

Matematica. — *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre.* Nota di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre (1).

Chiamiamo, collo Scorza (2), *varietà di Segre* una varietà V che rappresenti, nel modo considerato per la prima volta dal prof. Segre, le s^{ple} di punti appartenenti rispettivamente a s spazi lineari ($s \geq 1$). Se questi spazi, siano rispettivamente $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(s)}$, hanno ordinatamente dimensione

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) *Sulle varietà di Segre*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLV (1909-10); si trovano in questo lavoro anche altre citazioni. Intorno alle stesse varietà cfr. anche Bordiga: *Sul modello minimo delle varietà delle n^{ple} non ordinate dei punti di un piano*, Annali di Matematica, serie III, vol. XXVII (1918).

$p_1, p_2, \dots, p_s$ (con $p_i > 0$; $i = 1, 2, \dots, s$), e in ciascuno di essi si assume un sistema di coordinate proiettive omogenee di punto $\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{ip_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$), la V, che sta in uno spazio S_N di dimensione $N = (p_1 + 1)(p_2 + 1)\dots(p_s + 1) - 1$, è definita parametricamente ponendo le singole coordinate proiettive omogenee x_t ($t = 0, 1, \dots N$) di un punto dello S_N proporzionali ai varî prodotti che si possono formare assumendo come fattori s fra le ξ, coi primi indici tutti diversi fra loro.

Data una tale varietà, ci proponiamo di costruire una base per il modulo delle forme dello S_N che la contengono, vale a dire un sistema di forme $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_g$, tale che ogni forma dello S_N contenente la V si possa esprimere come combinazione lineare delle Φ (i coefficienti essendo forme di grado conveniente nelle coordinate x). Ci porremo anzi da un punto di vista più ampio, considerando una *varietà di Segre generalizzata*, V_d, ottenuta nel modo seguente. Mantenute le notazioni di prima, siano $n_1, n_2, \dots, n_s$ degli interi positivi ≥ 1; formiamo i varî prodotti di $n_1 + n_2 + \dots + n_s$ fra le ξ, in modo che, dei primi indici, n_1 siano uguali a 1, n_2 siano uguali a $2, \dots, n_s$ siano uguali a s, e definiamo in uno S_N, con

$$(1) \qquad N = \binom{p_1 + n_1}{p_1}\binom{p_2 + n_2}{p_2} \dots \binom{p_s + n_s}{p_s} - 1,$$

una V_d (con $d = p_1 + p_2 + \dots + p_s$) ponendo le singole coordinate proiettive omogenee x_t ($t = 0, 1, \dots, N$), di un punto dello S_N proporzionali a quei prodotti [1].

È chiaro che basta fare ciascuna delle n uguale all'unità per ritrovare le varietà di Segre di cui si è detto in principio. Invece per $s = 1$, $p_1 = p$, $n_1 = n$, si ottiene una V_p rappresentabile su uno spazio S_p in modo che le sezioni iperpiane della V_p sono rappresentate su quello spazio lineare dalla totalità delle forme di ordine n. In quest'ultimo caso particolare, il problema cui abbiamo più sopra accennato è stato risolto recentemente dallo Hurwitz [2] con un procedimento che si può estendere molto facilmente al caso più generale che qui abbiamo in vista [3].

Indichiamo con

$$(2) \qquad [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p_1}; \dots; \alpha_{s0}, \alpha_{s1} \dots, \alpha_{sp_s}]$$

[1] Alcune indicazioni su queste varietà si trovano, al n. 44, nell'articolo *Mehrdimensionale Räume* (del prof. Segre) della Enzyklop. der Math. Wiss. (III C7).

Si tenga presente, per il seguito, che *la* V_d *non ha punti multipli*; giacchè dalle formole di definizione segue subito che essa è trasformata in sè dalle omografie di un gruppo che opera transitivamente sui suoi punti.

[2] *Ueber die algebraische Darstellung der Normgebilde.* Math. Ann., Band. 79 (1919).

[3] Escludiamo dal seguito il caso banale di $s = 1$, $n_1 = 1$.

quella coordinata x dello S_N che, nella definizione parametrica della V_d, si è posta uguale a

$$(3) \qquad \xi_{10}^{\alpha_{10}} \xi_{11}^{\alpha_{11}} \dots \xi_{1p_1}^{\alpha_{1p_1}} \dots\dots \xi_{s0}^{\alpha_{s0}} \xi_{s1}^{\alpha_{s1}} \dots \xi_{sp_s}^{\alpha_{sp_s}},$$

(essendo

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} + \dots + \alpha_{1p_1} = n_1 ; \dots ; \alpha_{s0} + \alpha_{s1} + \dots + \alpha_{sp_s} = n_s).$$

Allora, siano u e v due prodotti (3) che divengono identici fra loro, quando si dividono rispettivamente l'uno per una certa ξ, sia ξ', e l'altro per un'altra ξ, sia ξ''; w e z due altri prodotti (3) che si comportano nello stesso modo, ancora rispetto a ξ' e ξ''; e siano infine U, V, W, Z le coordinate (2) corrispondenti ai prodotti u, v, w, z. Ovviamente, la forma quadratica (nelle x)

$$(4) \qquad UZ - VW$$

è nulla identicamente sulla V_d. Ebbene, si formino tutte le (4), e di esse si ritenga solo un sistema di forme linearmente indipendenti, siano Φ_1, $\Phi_2, \dots, \Phi_g$, il quale sia una base per il sistema lineare di tutte le forme quadratiche (4) (il valore di g si troverà indicato più avanti): *le Φ costituiscono anche una base per il modulo delle forme contenenti* V_d.

Il concetto della dimostrazione, la quale si può svolgere, come abbiamo detto, parallelamente a quella dello Hurwitz, è il seguente. Sia H un prodotto di m fra le (2), non tutte necessariamente distinte, ($m > 1$), e $\overline{H}$ la espressione (nelle ξ), in cui esso si sviluppa quando a ogni (2) si sostituisca la corrispondente (3); $\overline{H}$ sarà un prodotto di m ($n_1 + n_2 + \dots + n_s$) fra le ξ, delle quali mn_1 avranno il primo indice 1, ecc. Anzi, dato comunque un prodotto di tal fatta, esso si può considerare come ottenuto, nel modo indicato da un prodotto H (o anche da varî prodotti H). Allora si stabilisce (v. più avanti) che *due di quei prodotti di grado m, siano* H *e* H′, *sono certo congrui rispetto al modulo (delle) Φ, qualora sia* $\overline{H} = \overline{H'}$ *(identicamente rispetto alle ξ)*. Perciò, formati tutti i possibili prodotti $\overline{H}$, se si sceglie comunque, per ciascuno di essi, uno dei prodotti H che ad esso corrispondono, secondo quanto sopra si è detto, ottenendo così i prodotti $H_1, H_2, \dots, H_\mu$, ogni forma di grado m nelle (2), sia F, risulta congrua, rispetto al modulo Φ, a una loro combinazione a coefficienti costanti, sia $c_1 H_1 + c_2 H_2 + \dots + c_\mu H_\mu$; perciò, se F si annulla identicamente su V_d, sarà identicamente (rispetto alle ξ) $c_1 \overline{H}_1 + c_2 \overline{H}_2 + \dots + c_\mu \overline{H}_\mu = 0$, da cui segue subito che le c sono nulle e perciò $F \equiv 0 \pmod{\Phi}$, c. d. d.

In un solo punto occorre aggiungere qualche cosa alla dimostrazione dello Hurwitz, e precisamente nella dimostrazione del risultato scritto in

corsivo (che corrisponde al Teorema II dello Hurwitz). Ad esso si può giungere colle seguenti considerazioni. Sia

$$H = [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p_1}; \dots; \alpha_{s0}, \alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sp_s}][\beta_{10} \dots] \dots$$
$$\dots [\lambda_{10}, \dots, \lambda_{1p_1}; \dots; \lambda_{s0}, \dots, \lambda_{sp_s}],$$

e H′ costruita in modo analogo sostituendo ad $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ordinatamente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$, così che sia

$$\alpha_{10} + \beta_{10} + \dots + \lambda_{10} = \alpha'_{10} + \beta'_{10} + \dots + \lambda'_{10}, \text{ ecc.}$$

Si prova anzitutto che il prodotto di grado m nelle (2), sia $H^{(1)}$, ottenuto da H sostituendo a ciascuna delle $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ col primo indice 1 la corrispondente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ che compare in H′, e lasciando tutto il rimanente invariato, è $\equiv H \pmod{\Phi}$ [1] (a questo scopo basta ripetere la dimostrazione del citato Teorema II dello Hurwitz, con pure varianti formali) [2]. Allora, analogamente, $H^{(1)}$ e quindi anche H, sarà congruo, rispetto al modulo Φ, a un altro prodotto di grado m, sia $H^{(2)}$, ottenuto da esso sostituendo a ciascuna delle $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ col primo indice 2 la corrispondente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ col primo indice 2 che compare in H′ e lasciando tutto il resto invariato. Così continuando, si arriverà a un prodotto $H^{(s-1)} \equiv H \pmod{\Phi}$, il quale, in virtù della prima parte della dimostrazione, sarà altresì $\equiv H' \pmod{\Phi}$.

Dalle considerazioni svolte emerge anche che la funzione caratteristica di Hilbert del modulo definito dalla varietà di Segre generalizzata V_d, di cui si è detto, è

$$(5) \qquad \mu = \chi(m) = \binom{mn_1 + p_1}{p_1}\binom{mn_2 + p_2}{p_2} \dots \binom{mn_s + p_s}{p_s},$$

cosicchè, in particolare, per il numero g delle forme quadratiche linearmente indipendenti che costituiscono la base del modulo Φ, si ha

$$(6) \qquad g = \tfrac{1}{2}(N+1)(N+2) - \binom{2n_1 + p_1}{p_1}\binom{2n_2 + p_2}{p_2} \dots \binom{2n_s + p_s}{p_s}.$$

La (5), che esprime la postulazione della V_d per le forme di ordine m, permette dunque di scrivere [3]

[1] Naturalmente, un risultato analogo si otterrebbe se si mutassero analogamente le $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ con un altro primo indice.

[2] Si osservi che essa sussiste anche se $n_1 = 1$ (sebbene lo Hurwitz escluda, per ovvie ragioni, questa ipotesi dalle sue considerazioni).

[3] Cfr. Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXVIII, 1909 (ved. il n. 4).

$$(7) \qquad \binom{mn_1+p_1}{p_1}\binom{mn_2+p_2}{p_2}\cdots\binom{mn_s+p_s}{p_s} =$$

$$= \binom{m+d-1}{d-1} - (\pi_0+1)\binom{m+d-1}{d} - \pi_1\binom{m+d-2}{d-1} +$$

$$- \pi_2\binom{m-d-3}{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}\pi_{d-1}\binom{m}{1}.$$

dove $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{d-s}$ sono i generi aritmetici delle sezioni della V_d rispettivamente con spazi di dimensione $N-d, N-d+1, \ldots, N-1$ (dimodochè π_0+1 è l'ordine della V_d [1]). I valori di questi generi si possono ricavare dalla (7). Facendo $m=-1$, si trova

$$\pi_{d-1} = \binom{n_1-1}{p_1}\binom{n_2-1}{p_2}\cdots\binom{n_s-1}{p_s}.$$

Successivamente, facendo $m=-2$, si ha π_{d-2}, e così via fino a π_0. Del resto, il valore di π_0 si può ricavare direttamente paragonando nei due membri delle (7) i coefficienti di m^d, e si ottiene, per l'ordine della V_d,

$$\pi_0+1 = n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_s^{p_s} \frac{(p_1+p_2+\cdots+p_s)!}{p_1!\,p_2!\ldots p_s!}.$$

E i coefficienti di m^{d-1} dànno, per le curve sezioni spaziali,

$$\pi_1 = 1 + \tfrac{1}{2}(d-1)!\,\frac{n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_s^{p_s}}{p_1!\,p_2!\ldots p_s!}\left[d(d-1) - \sum_{i=1}^{s}\frac{p_i(p_i+1)}{n_i}\right].$$

Si osservi ancora che il procedimento ricorrente di cui sopra prova che, se h è il massimo intero non maggiore di uno almeno fra i numeri

$$\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}, \ldots, \frac{p_s}{n_s},$$

sono nulle tutte le π, ordinate per indice decrescente, fino a π_{d-h} incluso, mentre la prima π non nulla è

[1] Non occorre avvertire che si è trascurato, per scrivere la (7), un ultimo termine contenente a fattore il genere della V_d, in quanto questa è razionale.

$$\pi_{d-h-1} = \binom{(h+1)\,n_1 - 1}{p_1} \binom{(h+1)\,n_2 - 1}{p_2} \cdots \binom{(h+1)\,n_s - 1}{p_s}.$$

Per es., per la varietà di Segre da cui abbiamo preso le mosse, supposto $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$, si ha $\pi_{d-1} = \cdots = \pi_{d-p_s} = 0$ (del resto le varietà sezioni della V_d cui corrispondono questi generi sono razionali, poichè i loro punti sono rappresentati da quelle s^{ple} di punti appartenenti agli spazi $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(s)}$, tali che il punto dell'ultimo spazio appartenga a un dato spazio in esso contenuto), e

$$\pi_{d-p_s} - 1 = \binom{p_s}{p_1} \binom{p_s}{p_2} \cdots \binom{p_s}{p_{s-1}}.$$

Geologia. — *La serie paleozoica delle Alpi Carniche*. Nota di Michele Gortani, presentata dal Socio T. Taramelli [1].

Dopo mezzo secolo di ricerche, dovute in minor parte a studiosi italiani (Pirona, Taramelli, Marinoni, Tommasi, Parona, Bozzi, Artini, De Angelis, Marinelli, Vigo), in maggior parte a stranieri (Foetterle, Stur, Hauer, Hoefer, Hoernes, Stache, Suess, Tietze, Harada, Toula, Frech, Milch, Geyer, Rosiwal, Schellwien), il Paleozoico delle Alpi Carniche pareva ormai esattamente e sufficientemente noto quando, nel 1902, il sen. prof. Capellini presentò a cotesta R. Accademia la mia prima comunicazione sul Permocarbonifero di Forni Avoltri [2]. Insieme all'amico prof. Vinassa de Regny, che due anni dopo si era associato a me per intraprendere *ex novo* lo studio complessivo delle formazioni paleozoiche delle Alpi Carniche, presentai alla XI sessione del Congresso geologico internazionale [3] un quadro generale dei terreni costituenti quella importantissima serie. Il quadro, che si discostava notevolmente dai precedenti, diede luogo a discussioni durante il Congresso medesimo e dopo; discussioni che, mentre non riuscirono a disarmare il più tenace degli avversarî [4], si chiusero con la leale accettazione dei nostri criterî da parte dell'Ufficio geologico austriaco [5].

Durante questo periodo e, dopo la lunga pausa dovuta alla guerra, nelle escursioni compiute anche sul versante settentrionale della catena (a noi,

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

[2] Vedi Rend. R. Acc. Lincei, ser. 5ª, XI, 2° sem., 1902, pp. 316-318.

[3] Vinassa e Gortani, *Le paléozoïque des Alpes Carniques*. C. R. XI Congr. géol. intern., Stockholm (1910) 1911, pp. 1005-1012.

[4] Vedi Frech in C. R. XI Congr. géol. intern., pag. 1012; e in N. Jb. f. Min. ecc., 1915, II, pp. 255-256.

[5] Alludo in modo speciale a cortesi comunicazioni epistolari del dott. Geyer, attuale Direttore dell'Ufficio, ed al risultato delle escursioni recentemente compiute coi suoi rilevatori dott. Furlani e dott. Spengler.

prima, pressochè inaccessibile), nuove ricerche ci condussero a migliorare e completare i precedenti risultati. Ond'è che mi sembra opportuno di ritentare, sulla base di questi dati maggiori e migliori, la costruzione della tabella dei terreni costituenti il nucleo paleozoico delle Alpi Carniche a sud della Gaila (vedi pag. 100 e 101).

La nuove osservazioni in parte furono già pubblicate, per esteso o in via preliminare, in parte sono in corso di stampa (1). Sarebbe quindi fuor di luogo, in questa Nota di carattere riassuntivo, dare ragione anche per sommi capi dei nuovi dati inseriti nella tabella, delle più minute suddivisioni e delle correzioni e modificazioni di vario genere che ho ritenuto di dovervi apportare.

Credo utile, piuttosto, di completare il quadro schematico con poche osservazioni atte a meglio chiarirlo.

La riconosciuta età carbonifera di filladi già attribuite al Cambriano, rimette in discussione l'età di tutte le formazioni cristalline della val Gaila e del Comelico, che devono essere ristudiate a nuovo; per adesso, i terreni più antichi, la cui età sia accertata, sono gli ordoviciani, dei quali in nessun punto si è potuto osservare l'imbasamento.

Dall'Ordoviciano la serie è completa, con formazioni di mare generalmente poco profondo, e senza discontinuità, fino a tutto il Devoniano superiore.

Eocarbonica è la prima piegatura, con energico sollevamento e formazione della catena paleocarnica. L'erosione durò a lungo e fu assai potente e profonda (fino ad oltre un migliaio di metri), così da mettere a nudo il nocciolo ordoviciano delle anticlinali allungate ed ellissoidi costituenti quei primi rilievi.

Il ritorno del mare fu certamente graduale. Nella maggior parte della regione la trasgressione è neocarbonifera; in certi punti può essere stata mesocarbonifera; in altri fu addirittura eopermica.

I depositi carbonici ed eopermici hanno carattere di formazioni littoranee; al disfacimento delle rocce eruttive porfiriche, porfiritiche e diabasiche — venute a giorno alla fine del Carbonifero e al principio del Permiano — sembra dovuta la colorazione caratteristica delle arenarie di Val Gardena.

Il Permiano superiore ha carattere di deposito lagunare alla base, di mare basso alla sommità; sfuma con transizione graduale nei terreni eotriassici a *facies* littoranea, che lo ricoprono in concordanza sempre perfetta.

(1) Vedine l'elenco nel mio lavoro: *Progressi nella conoscenza geologica delle Alpi Carniche Principali*, in corso di pubblicazione nelle Memorie della Società Toscana di sc. nat., vol. XXXIV.

Tabella dei terreni paleozoici delle Alpi Carniche Principali.

	Facies calcareo-dolomitica	Facies scistoso-arenacea	Rocce metamorfiche	Rocce eruttive
Neopermico	Calcari bituminosi e scistosi con *Avicula striato-costata*. Calcari bituminosi con *Productus, Athyris vultur, A. Janiceps, Pecten comelicanus, Bellerophon sextensis, B. Ianus*. Calcari nerastri con *Gymnocodium bellerophontis*. Dolomie cavernose; dolomie brecciate; gessi saccaroidi.	—	—	—
Eopermico	Breccia del Trogkofel, a elementi di calcare a *Fusulina* e *Schwagerina*. Calcari chiari o rossastri, talora brecciati, con *Fusulina alpina communis, Schwagerina, Scacchinella, Endothyra, Endothyra, Popanoceras, Pseudophillipsia*.	Arenarie di Val Gardena rosso vinate, con intercalazioni grigio argentine; talora scistose; talora nodulose; rare traccie di vegetali. Conglomerato o breccia di Val Gardena (elementi spec. quarzosi, cemento rosso vinato).	Porfiriti, spiliti e tufi passanti a arenarie di Val Gardena.	Porfidi e porfiriti quarziferi, porfiriti, diabasi.
Neocarbonico	Calcari neri con *Fusulina carnica* e *Tetrataxis maxima*. | Calcari grigi o scuri con *Fusulina alpina communis, Schwagerina princeps, S. fusulinoides, Brachiopodi*. | Calcari chiari dolomitici. Calcari neri con *Fusulina alpina, F. regularis, F. multiseptata, Tetrataxis maxima*. Calcari neri a Coralli; calcari neri scistosi con *Fusulina alpina antiqua, Conocardium Taramellii, Tuberculopleura anomala, Productus lineatus, Spirifer fasciger, S. bisulcatus, Archaeocidaris pizzulana*.	Scisti e arenarie con *Orthothetes expansus, Productus lineatus, Derbyia grandis, Spirifer carnicus, Phillipsia*. Scisti e arenarie con *Alethopteris Grandini, Pecopteris polymorpha, Nevrodontopteris, Annularia, Calamites, Sigillaria*. Scisti e arenarie con *Calamites, Sphenophyllum, Nevrodontopteris*; alla base con *Asterocalamites scrobiculatus?* Brecce e brecciolini silicee. Conglomerati quarzosi.	Filladi e scisti filladici. Porfiriti, spiliti e tufi passanti a scisti.	Spiliti e tufi.

Breccia di trasgressione.

Neosiluriico	Calcari reticolati con *Orthoceras altricola, O. Richteri, O. potens, O. firmum, O. dulce, Tornoceras, Cyrtoceras. Cardiola interrupta, Manmica, Arethusina, Enerinurus.*	Calcari con *Rhynch. Megaera, Rh. Zeba, Rh. Sappho, Orthis umbra.*	Calcari a Crinoidi.	Calcari con coralli silicizzati (*Heliolithes Barrandei, Cyathoph. Taramelli, Actinostroma intertextum, Clathrodictyon regulare*).	Calcari neri e grigi con *Merista hercula, Tremanotus fortis alpinus, Pleurotomaria evoluta, Euomphalus Kokeni. Loxonema inops, Hercynella bohemica.*
	Calcari neri reticolati con *Orthoceras* sp.				
Eodevonico	Calcari chiari con *Karpinskya Consuelo.*				
	Calcari chiari con *Karpinskya conjugula, K. Cernajewi, Rhynchonella princeps, Spirifer pseudo-viator.*				
	Calcari neri e grigi con *Merista hercula, Tremanotus fortis alpinus, Pleurotomaria evoluta, Euomphalus Kokeni. Loxonema inops, Hercynella bohemica.*				
Mesodevonico	Calcari con *Stringoc. Burtini, Atrypa Juli, A. flabellata, A. Arimaspus, Rhynchonella proeuboides, Pentamerus galeatus, Kophinoceras.*	Calcari con *Cyathoph. caespitosum, Pachypora cervicornis, Alveolites suborbicularis, Actinostroma clathratum.* Calcari con *Syringopora.*			
	Calcari con *Pentamerus* af. *baskiricus, P.* cf. *Petersi, Pleurotomaria trochoides, Murchisonia Vinassai.*	Calcari con *Cyathoph. helianthoides phillocinum, Alveolites suborbicularis minor, Actinostroma clathratum italicum. Stromatopora columnaris.*			
Neo	Calcari con *Producta forojulensis, Rhynchonella Roemeri, Rh. pugnus, Rh. acuminata, Atheris collinensis.*	Calcari chiari di scoglio grigio scuri. Calcari stratificati			
	Calcari e se				

Eosiluriico	Seisti filladici.	Seisti nodulosi con Cistoidi (*Corycrinus*). Seisti con *Orthis Actoniae, O. calligramma, Porambonites, Prasopora, Hallopora, Monotrypa.*	—	—
	Calcari marmorei scistosi o reticolati.	Seisti con *Tentaculites* (rarissimi). Seisti con *Monograptus colonus.* Seisti con *Rastrites peregrinus, Monogr. convolutus, Diplograptus, Desmograptus, Dendrograptus.*	Seisti selciosi.	—
	Calcari marmorei compatti bianchi o grigi. Calcescisti, calcari cristallini con velature micacee.	—	—	—

Geomorfologia. — *Lo svolgimento dei fenomeni carsici.* Nota di Gaetano Rovereto, presentata dal Socio Arturo Issel (1).

Conformemente a quanto ho esposto in due mie Note precedenti, inserite in questi Rendiconti, tratto ora dello svolgimento regionale del fenomeno carsico.

Il Penck ha applicato nel 1904, e forse per la prima volta, il concetto del ciclo davisiano allo svolgimento dei fenomeni carsici (2). Raccolse quattro anni dopo questo pensiero il Sawicki, trattando del carso slovacco, e in seguito delle *Causses* francesi, e soprattutto del carso tipico (3). Non persuasero le sue conclusioni il Krebs (4), il quale ebbe a criticarlo in una Nota bibliografica; ciò che richiamò una risposta del Sawicki, in cui questi ritornò a voler restringere, nel chiuso sempre più fitto di un inaccessibile reticolato spinoso, il curioso e così aberrante fenomeno del carso nelle sue più caratteristiche conseguenze (5) Il nostro valente e compianto De Gasperi ebbe a parlare di un ciclo di sviluppo delle grotte, di gioventù, di maturità, di vecchiaia, di decrepitezza, di morte delle stesse, ciclo che in realtà, riferendosi solo al regime idrografico, non è relazionato con l'età della grotta, ma con le mutazioni nelle condizioni della circolazione sotterranea regionale (6).

Ora a noi pare, che volendo studiare in modo semplice, come è nato e si è svolto il fenomeno del carso, si debba rifuggire da un metodo il quale non comprende a sufficienza, nelle loro rispettive influenze, le varie cause concomitanti che hanno accompagnato l'origine, lo sviluppo, l'arresto del fenomeno, o hanno protetto e conservato produzioni non sue.

Il carsico, come è noto, è uno dei fenomeni che nel quaternario fu concomitante con lo svolgimento dei cicli climatici di tale periodo, senza che rispetto ad esso l'alternanza di questi cicli abbia lasciato traccie determinate. La sua più antica conseguenza sono, a nostro credere, per la regione italiana, quelle depressioni chiuse della Sabina, già ampie *uvale*, nelle quali si son depositati, insieme a strati a *Melanopsis*, parecchi metri in altezza di ligniti terrose e xiloidi: siamo con ciò nel villafranchiano, alla fine del

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Penck A., *Das Karstphaenomen.* Schrift. d. Ver. zur Verbreit. Naturwiss. Kenntn. in Wien, 1904.

(3) Sawicki L., *Beiträge zum geograph. Zyklus im Karste.* Geogr. Zeit., vol. XV, 1909.

(4) Mitt. Geogr. Gesell., pag. 402, 1902.

(5) Mitt. l. cit., pag. 600, 1909.

(6) De Gasperi G. B., *Grotte e voragini del Friuli.* Mondo Sotterraneo, vol. XI, pag. 163, 1910.

pliocene superiore, o sui principî del quaternario (1). Ebbene queste antichissime uvale svelano un'azione carsica uguale a quella del quaternario superiore e medio, e quando sono ricolme sventrate distrutte ciò è dovuto agli effetti della continuata erosione regressiva, che in vero fu molto notevole, avendo affondato per più di duecento metri di altezza le locali diramazioni idrografiche.

Difatti nella stessa regione della Sabina alcune di queste antichissime uvale e doline, situate al di fuori dei rami idrografici, sono perfettamente conservate: e in una di esse, quella di Catino presso Poggio Mirteto, alcuni commentatori vi videro l'*umbilicus Italiae* di Plinio (2).

Un'altra protezione contro il carso, nella stessa regione e altrove, fu dovuta ai depositi argillosi impermeabili formatisi in fondo a tali conche carsiche; ma dove protezioni non esistevano, la dissoluzione operata dalle acque straordinariamente carbonicate del quaternario inferiore e medio — secondo la nostra classificazione (3) — raggiunse in breve grandi proporzioni, e quando fiorì la ricca fauna eurasiatica della terza infraglaciale, essa trovò rifugio, per molte delle sue specie, in numerose caverne di già morte, perfettamente asciutte, non per il fenomeno in sè, ma lo ripetiamo, per il grande approfondimento dei solchi vallivi. Nel contempo si erano ferrettizzate le morene antiche.

Come in tutti i fenomeni collegati con le condizioni atmosferiche, abbiamo in quello carsico uno svolgimento di variabile intensità e acceleramento a seconda dei tempi, e per di più un processo poco regolato dalle condizioni del medio in cui si esercita, ma molto influenzato da agenti di origine estranea. Da questo uno spiccato carattere di accidentalità, di mancanza di regola, di discontinuità, che non obbedisce a nessuno svolgimento ciclico.

Espongo come ho immaginato i processi per alcune delle condizioni carsiche più note, e ciò per sottoporli alla critica.

Il Timavo è un tipo di fiume sotterraneo, che si può dire ad *autosotterramento*. Esso aveva un corso superficiale, all'incirca secondo la direzione che oggi intercede fra le sue bocche e la Grotta di San Cansiano. Le sue acque hanno cominciato a sparire sotterra, così suppongo, per un inghiottitoio situato in un tratto presso la foce; in seguito sono a mano a mano passate per altri inghiottitoi, apertisi sempre più verso le origini, dei quali due sono ancor oggi ben evidenti, quello dei Serpenti e l'altro di Trebicciano;

(1) Mi riferisco soprattutto alle uvale lignitifere della valle dell'Aja; i fossili furono da me raccolti in quella della Madonna di Colafonte presso Cottanello.

(2) È rappresentata da un'incisione in rame che accompagna la traduzione di Virgilio curata dal padre Ambrogi, e pubblicata nel 1765; sarebbe quindi questa la prima rappresentazione figurata di una dolina. Dello stesso secolo, il Ximenes pubblicava, nel 1747, un rame del carsico Arco della Pania nelle Apuane, e il Botti, nel 1766, rappresentava il ponte naturale, pure carsico, di Veia nel Veneto.

(3) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXXVIII (1919), pag. 11.

in fine sono mancate dove si aprono le voragini di San Cansiano. E il pendìo dell'ultimo tratto è tale da rendere possibile un ulteriore spostamento a spese di ciò che rimane di superficiale, ossia a spese del Recca; ed è anche evidente che un tale allungamento sotterraneo può avvenire solo in questo modo.

Nella valle dalmata della Cettina abbiamo il tipo della *idrografia sotterranea* che noi chiamiamo *a cefalovrisie*, e di cui nel nostro lavoro su quella valle abbiamo dato una spiegazione, che per brevità qui non ripetiamo; però insistiamo ancora su di essa, benchè non sia stata presa in considerazione (1).

Per comprendere come si è svolta la determinazione di una caverna, la quale rappresenta uno dei fenomeni carsici più usuali, bisogna soprattutto stabilire la provenienza delle acque sotterranee che l'hanno vuotata. Si possono, partendo da questo principio, introdurre varie distinzioni di gruppi. Uno dei principali è quello in cui correnti sotterranee furono provenienti dall'interno della massa montuosa nella quale la caverna si apre, e in questo entrano le *caverne di sbocco* e le *assorbenti* del De Gasperi, e anche molte delle *inattive* dello stesso (es. Caverna delle Vene in Val Tanaro, una delle più grandi nei Monti Liguri). Altro è quello in cui le correnti sotterranee provenivano da dove è ora il vuoto vallivo, supposto respinto dal Martel, ma che è l'unico applicabile, ad esempio, alla Caverna delle Fate nel Finalese, tutta estinta, con grande camera di entrata e cunicoli diramati verso l'interno sempre più ristretti. Un terzo comprende le caverne in parte dovute a correnti del vuoto vallivo, e in parte a correnti esistenti nell'interno della massa montuosa presistente, come ne è esempio la Caverna della Pollera nel Finalese, che ha un androne di entrata estinto, anteriore all'approfondimento della valle, e cunicoli interni tuttora attivi. Un quarto gruppo, e non ultimo, è quello dovuto a correnti con perdite laterali, o con autosotterramento per un tratto del letto (es. Caverna delle Fascette in Val Tanaro); e così via.

Il nostro metodo di studio delle regioni carsiche richiede inoltre, che con le *funzioni distruttive*, si esaminino le *funzioni costruttive*, le quali sono di secondaria importanza, e le *funzioni protettrici*, che sono più notevoli di quanto non si ammetta, e sulle quali bisogna insistere.

Noi le abbiamo invocate, senza essere seguìti, per spiegare la conservazione del polje dalmato, dopo aver detto come questo polje non sia altro che una conca pseudotettonica, simile alle conche lacustri villafranchiane dell'Appennino, mantenuta intatta nelle sue forme per la sospensione dell'azione regressiva delle correnti. Anche la *vallona* dalmata si conserva per la stessa influenza protettrice e indiretta del carso (2), ossia per la mancanza di alluvioni di riempimento.

(1) Rovereto G., *Studî di geomorfologia*, pag. 195.
(2) Rovereto G., *Studî di geomorfologia*, pp. 170 e 180.

Biologia. — *Intorno al ciclo biologico dell'Aploneura lentisci Pass.* (*Hemiptera-Homoptera-Aphidoidea*). Nota preventiva di Guido Grandi, presentata dal Socio F. Silvestri (1).

L'*Aploneura lentisci* Pass. è un *Eriosomatino* (2) policiclico polimorfo (esamorfo) dioico, la cui legione epigea (gallecola) si sviluppa sul Lentisco (*Pistacia lentiscus* L.) e quella ipogea (radicicola) su Graminacee (io l'ho osservata sulla *Dactylis glomerata* e su di una specie indeterminata di *Anthoxantum*). — Le forme che essa comprende sono le seguenti: 1) Fondatrice (attera e virginopara); 2) Virginopara attera gallecola; 3) Virginopara alata migrante; 4) Virginopara attera radicicola; 5) Sessupara alata reimmigrante; 6) Maschio e femmina amfigonica (sessuali).

Le prime larve della *fondatrice* sono caratteristiche per i sei lunghi peli a bottoncino terminale inseriti all'estremo distale del 2° articolo del tarso (una coppia dorsale ed una mediana o submediana) ed al pretarso e per i due lunghi peli semplici ventrali del 1° articolo del tarso di tutte tre le paia di zampe (3); esse si trovano a Portici vaganti sulle giovani foglie del Lentisco intorno alla terza decade di Aprile. Durante quasi tutto il mese di Maggio le galle da me osservate ospitavano la sola fondatrice. Le più grandi che io ho trovate contenere una prima larva di fondatrice misuravano 7 mm. di lunghezza per 3 mm. di larghezza; quelle contenenti una larva della seconda età (la fondatrice più un esuvia) 12 mm. per 6 o 11 mm. per 7; quelle contenenti una larva della terza età (la fondatrice più due esuvie) 13 mm. per 7; quelle contenenti una forma della quarta età (la fondatrice più tre esuvie) 21 mm. per 8. Queste dimensioni non hanno alcun valore assoluto, ma dimostrano come la fondatrice da sola possa condurre il cecidio ad un punto notevole di sviluppo. Alla fine di Maggio essa ha raggiunto generalmente la maturità e si distingue facilmente dalle altre gallecole adulte anche a debole ingrandimento, per il numero degli articoli delle antenne che è di 4 anzichè di 5. La sua attività prolificatrice si prolunga da Giugno a Settembre per quanto, in riguardo al numero degli indi-

(1) Presentata alla seduta del 6 marzo 1921.

(2) La posizione sistematica del gen. *Aploneura* Pass. secondo l'ultima classificazione del Baker (cfr. Baker, A. C., Generic Classification of the Hemipterous Family Aphididae, U. S. Departm. Agr., Bull. 826, 10 agosto 1920, 93 pp., 16 tav.) è la seguente: Superfam. *Aphidoidea*, Fam. *Aphididae*, Subfam. *Eriosomatinae*, Trib. *Melaphini*.

(3) Questi peli sono sostituiti dopo la prima muta (nella larva della seconda età cioè) da peli semplici e brevi. Anche nelle altre forme del ciclo, i peli capitati, quando esistono, sono proprî delle larve della prima età.

vidui partoriti, sia molto modesta e inferiore a quello delle virginopare attere gallecole. Dalle mie osservazioni resulta che ciascuna fondatrice depone circa una ventina di larve (o poco più), le quali diverranno virginopare attere gallecole. Alle fine di Settembre io ho isolato parecchie fondatrici trovate nelle galle ancora in buone condizioni e tutte mi hanno partorito ancora qualche neogallecola. La loro vita è, relativamente, molto lunga ed in Novembre, quando si è già iniziata la sciamatura delle virginopare migranti, esse si rinvengono ancora e facilmente nei cecidî, raggrinzite, colorate intensamente di ferrugineo, quasi prive di secrezioni cerose, poco agili, ma ancora vitali.

Le prime larve di *virginopare attere gallecole* si distinguono subito dalle prime larve della fondatrice per possedere uno o due peli capitati lunghetti all'estremo distale del margine dorsale del secondo articolo dei tarsi delle zampe medie e posteriori; gli altri peli e tutti quelli delle zampe anteriori sono semplici e brevi.

Le larve deposte per prime raggiungono la maturità verso la fine di Giugno attraverso quattro mute. Nel mese di Luglio infatti si rinvengono nelle galle oltre la fondatrice e le attere virginopare, anche le larve partorite da queste, in via di sviluppo. Le ultime virginopare attere deposte dalla fondatrice in Settembre non possono evidentemente cominciare a prolificare che alla fine di Ottobre o nei primi di Novembre e ciò spiega come sia possibile in questo mese, in piena sciamatura di migranti, e pure in Dicembre, rinvenire nelle galle delle larve di alate ancora indietro nello sviluppo e come si possano trovare cecidî contenenti un discreto numero di alati e di ninfe anche in una stagione molto inoltrata: in Gennaio, in Febbraio, perfino in Marzo. — Contrariamente alle apparenze fra Maggio e Novembre io ho ragioni di credere probabile [1] che si svolga nelle galle una sola generazione di virginopare attere che nascono dalla fondatrice durante questo periodo di tempo e che è facile rinvenire adulte, insieme con la vecchia madre, a Dicembre inoltrato. La prole della fondatrice (neogallecole gallecole) e, come vedremo, quella delle virginopare attere (neogallecole migranti) sarebbero pertanto monomorfiche unipotenti e si evolverebbero esclusivamente e rispettivamente in attere gallecole e in alate migranti.

Ciascuna virginopara attera gallecola partorisce dalla fine di Giugno in avanti un discreto numero (30-40) di larve che, se è conforme al vero la mia supposizione, dovrebbero divenire tutte indistintamente alate, destinate

[1] Questa supposizione è stata doterminata dalle osservazioni fatte, durante i mesi di Maggio-Novembre, su di un grandissimo numero di galle; osservazioni che comprendevano l'esame *completo* e accuratissimo del contenuto dei diversi cecidî. I resultati ottenuti sono stati in parte controllati con allevamenti sperimentali (io sono riuscito a coltivare in vaso il lentisco); non credo però al riguardo di poter ancora venire ad affermazioni definitive.

a migrare ed a iniziare sulle Graminacee il ciclo radicicolo (legione ipogea). Queste larve (neogallecole migranti) hanno, come le neonate da fondatrice (neogallecole gallecole), 1 o 2 peli capitati lunghetti all'estremo distale del margine dorsale del secondo articolo dei tarsi delle zampe medie e posteriori e gli altri peli, e tutti quelli delle zampe anteriori, semplici e brevi.

Già alla fine di Agosto la gran maggioranza delle galle è abitata da una popolazione numerosissima che comprende la fondatrice, 15-20 virginopare attere adulte e diverse centinaia di larve, di preninfe e di ninfe di alati; alla fine di Settembre io ho contato in molte galle, oltre alla fondatrice e alle madri attere virginopare, sette od otto centinaia di larve, preninfe e ninfe di alati. Intorno alla metà di questo mese si rinvengono anche le prime migranti adulte le quali compaiono però in gran numero solo verso la fine di Ottobre, per iniziare la sciamatura nella prima o nella seconda decade del mese successivo. La fondatrice vive sette mesi ed anche più ed egualmente, o poco meno, le attere virginopare monoiche.

Le *virginopare alate migranti* si portano ai piedi delle Graminacee nominate e depongono delle larve che si evolveranno in attere radicicole. Queste forme migranti si adattano con grande facilità alle piante che si mettono sperimentalmente a loro disposizione e depongono facilmente le larve anche in capsule Petri, sulla carta bibula o sul vetro, dopo essere state tolte direttamente dalle galle. Il numero dei nati da ciascuna di esse è molto piccolo; le mie note non lo registrano superiore ad 8 ed inferiore a 6. Si sviluppano attraverso quattro mute e divengono adulti in 30–32 giorni, costituendo le *virginopare attere* della legione ipogea (*Virginogenia* di Börner). Le neoradicicole si distinguono dalle neonate di tutte le altre forme del ciclo perchè sono fornite alle antenne e alle zampe di peli molto lunghi, ma semplici. Le mie osservazioni non sono complete in riguardo al numero delle generazioni delle attere radicicole, ma se ne argomento dal fatto che nei primi giorni di Marzo mi fu possibile isolare alcune madri prolificanti ed ottenerne neoradicicole che divennero adulte il 26-27 dello stesso mese e che cominciarono a partorire il 30-31 Marzo e l'1-2 Aprile, debbo concludere che il ciclo radicicolo delle virginopare attere comprende *almeno* 3 generazioni.

I primi *alati sessupari reimmigranti* (pistaceotassici) appaiono in Aprile; essi sono morfologicamente molto simili agli alati *migranti* virginopari, volano sul Lentisco e depongono gli individui amfigonici. Se si portano direttamente su detta pianta, si rifiutano di adattarvisi. Ciò sembrerebbe in relazione coi fatti messi in luce dal Marchal (1913) per i *Chermes:* in questi Afidi la migrazione che eseguiscono i sessupari pare costituisca un atto necessario alla loro maturazione e, probabilmente, alla differenziazione della sessuparità; maturazione e differenziazione che si constaterebbero attenuate prima della migrazione od a migrazione impedita. Le sessupare che io ho

obbligato a rimanere in cattività, rinunziando alla migrazione a cui sono spinte da tassie determinate, mi hanno deposte larve di amfigonici dei quali le ♀♀ si sono evolute più o meno regolarmente, mentre i ♂♂ sono tutti morti prima di raggiungere la maturità. — La fecondità delle sessupare è ancor più debole di quella degli alati virginopari; esse depongono 4-6 larve di amfigonici; in ogni deposizione si riscontrano sempre individui di ambo i sessi. I ♂♂ e le ♀♀ neonate hanno antenne di 4 articoli e 4 peli capitati in tutte le zampe; due all'estremo distale del margine dorsale del secondo articolo del tarso e due al pretarso.

Un capitolo interessante della biologia dell'Aploneura del lentisco e quello che riguarda la possibilità di una continuazione del ciclo ipogeo (radicicolo) durante l'estate (possibilità dipendente da una bipotenza delle radicicole delle generazioni primaverili (dimorfismo indotto di Grassi)) e della conseguente esistenza di un ciclo partenogenetico radicicolo che si svolga parallelamente a quello amfigonico dioico. Mi porta a credere questo fatto ammissibile il rinvenimento, avvenuto il 4 Agosto 1920, di una virginopara attera radicicola e di tre larve neonate.

Nella Memoria in esteso sarà trattata minutamente la morfologia delle singole forme e, inoltre, la morfologia esterna e l'anatomia degli stati postembrionali dei simbionti dell'*Aploneura* fra i quali i due più economicamente importanti nei riguardi dell'Afide sono, a Portici, la *Pipizella Heringi* Zett. e la *Leucopis Palumbii* Rond.

Biologia. — *Ricerche morfologiche sul preparato centrale di rospo.* Nota di E. Sereni, presentata dal Corrisp. S. Baglioni [1].

In relazione ad alcune ricerche di ordine fisiologico, che ho avuto campo di eseguire sul preparato dell'asse cerebro-spinale di Bufo ideato dal Baglioni, ed i cui risultati ho riferiti nella Nota precedente, ho voluto ricercare le eventuali alterazioni istologiche delle cellule dei centri nervosi in esame.

Le mie ricerche si sono, di massima, rivolte solo allo studio delle cellule del midollo; e, fra queste, più specialmente alle grosse cellule delle corna anteriori. Solo di queste riferirò.

I midolli studiati sono stati venti; di ciascuno ho fatto sezioni in serie complete. Per la fissazione ho usato il liquido consigliato dal Lugaro (alcool assoluto con 5 % di acido nitrico); per la colorazione ho adoperato la tionina, il bleu di toluidina, la fucsina, il metodo di Held, una doppia colorazione di bleu di toluidina ed eritrosina.

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

Per quel che riguarda le condizioni del midollo sopravvivente dopo l'isolamento dell'asse cerebro-spinale, rimando alla Nota precedente.

Prima di ogni altro studio, data la discordia fra i varî autori, tentai di stabilire come si presentano le cellule delle corna anteriori del midollo, quando sia fissato appena estratto dallo speco vertebrale, in condizioni cioè presumibilmente più vicino alle normali. Mi risultò che, nel Bufo, esse si presentano come cellule fusate e triangolari, con grossi prolungamenti: le zolle, ben distinguibili, non sono molto fitte nè colorate, più grandi ed irregolari verso il centro della cellula, allungate alla periferia e nei dendriti; spesso accennano ad addensarsi intorno alla parete del nucleo. Questo è grande e chiaro; bene si distinguono (specie col bleu di toluidina) il reticolo di linina e la membrana; è costantemente sferico, di solito centrale, raramente eccentrico (nel 12,5 % delle cellule), (media di varie centinaia). Il nucleolo, che è costante ed appariscente, è normalmente centrale, e, se è spostato verso la parete del nucleo, non lo è di troppo; i colori basici lo colorano incompletamente; alla sua periferia appaiono spesso delle grosse zolle semianulari (2-3) che sono invece da essi intensamente tinte.

Questi miei risultati concordano perfettamente con quelli del Levi [1].

Nei midolli usati per le esperienze, è opportuno rîferire separatamente i risultati delle cellule della *intumescentia anterior* e di quelle della *posterior*; dato che mentre le seconde erano connesse ai loro apparecchi periferici, ed erano sede frequente di riflessi durante il corso della esperienza, le prime erano isolate per il taglio dei loro nervi.

Il primo fatto capitale e generale, è l'assenza completa della cromatolisi in tutte le cellule, se se ne eccettua una certa percentuale con colorazione più o meno diffusa (circa 30 % delle sezioni del rigonfiamento posteriore; 20 % di quelle dell'anteriore). Questo contrariamente ad ogni legittima aspettativa.

Nessuna altra alterazione potei notare a carico delle zolle; solo, in circa 40 % delle sezioni del rigonfiamento anteriore, notai interi gruppi di cellule più piccole e più colorate che di norma, con zolle non bene individuate. Piuttosto ingrandite invece parevano le cellule del rigonfiamento posteriore.

Varie alterazioni si possono invece riscontrare a carico del nucleo e del nucleolo. Il nucleo, raramente granuloso, frequentemente ingrandito nel rigonfiamento posteriore, è spesso più o meno eccentrico, con frequenza assai diversa nelle due *intumescentiae*; nel 23,4 % delle cellule del rigonfiamento anteriore; nel 46,5 % di quelle del posteriore; differenza evidentissima, del doppio, quasi. Anche il nucleolo è assai spesso eccentrico; lievemente nel rigonfiamento anteriore, fortemente, fino a spingersi contro la pa-

(1) Levi Giuseppe, *Rivista di Patologia nervosa e mentale*, I, 1896, pag. 141; Id. id., II, 1896, pp. 193-244.

rete del nucleo, nel posteriore; esso appare anche ingrandito, assai più spesso nella *intumescentia posterior* che nella *anterior*.

Poche differenze ebbi a notare fra i varî preparati, nonostante la assai diversa durata della loro sopravvivenza. Nessun speciale aspetto ebbi a notare nei preparati che erano stati stricninizzati.

Da quanto ho detto, appare come i miei risultati non concordino con quelli di precedenti autori che hanno lavorato su materiale e in condizioni analoghe alle mie [per esempio il Gordon Holmes (1)], se non in parte. Mentre, quanto io ho notato rispetto al nucleo ed al nucleolo, combina abbastanza bene con i risultati di questo autore, completamente in antitesi sono le osservazioni rispetto al comportamento delle zolle; che mentre persistono nei miei preparati, scompaiono completamente per cromatolisi in quelli del Gordon Holmes.

Varie ipotesi ci si presentano a spiegare questo fatto, a prima vista enigmatico (per esempio, l'aver io lavorato sul rospo ed il Gordon Holmes sulla rana, la insufficiente durata della sopravvivenza dei miei preparati, ecc.), ma tutte mi sembrano poco soddisfacenti, fuori che una. Le rane, i midolli delle quali furono studiati dal predetto autore inglese, erano state sottoposte alle esperienze del Verworn (2) con circolazione artificiale di soluzione fisiologica; nei miei preparati invece, il circolo era mancato completamente. È, questa, l'unica, ma capitale, differenza sostanziale fra le condizioni di esperimento del Gordon e le mie; è a questo fattore che credo ci si debba richiamare per spiegare l'assenza della cromatolisi nelle mie sezioni. Nel preparato del Baglioni, per quanto il catabolismo sia attivo (quale deve essere sotto l'azione della stricnina) e la sopravvivenza senza apporto di materiali prolungata (fino a 64^{h}), la cromatolisi non compare, perchè manca il circolo ad asportare i materiali di rifiuto della cellula. Nel preparato del Verworn e nelle sezioni del Gordon Holmes, la cromatolisi è invece tanto più intensa, in quanto, persistendo il circolo, esso non apporta nuovi materiali costruttivi, ma solo può lavare la cellula di quelli catabolici.

Spiegando in questo modo l'assenza di cromatolisi nei miei preparati, mi sembra si debba necessariamente ammettere che le loro zolle cromatofile siano, almeno in parte, costituite di sostanze chimiche diverse dalle normali.

Una constatazione che si può avvicinare a questa mia, sulla necessità della integrità del circolo perchè appaia la cromatolisi, è contenuta in un'antica osservazione del Righetti (3) sull'assenza di cromatolisi nelle cellule del midollo, dopo l'occlusione permanente dell'aorta addominale.

(1) Gordon Holmes, Zeitschrift f. allgemeine Physiologie, II Bd, 1903, pag. 502.

(2) Verworn Max, Archiv. f. (Anatomie und) Physiologie, 1900, pag. 385; Id. id., Archiv. f. (Anat. u.) Physiologie, Supplement, Band 1900, pag. 152.

(3) Righetti R., Rivista di Patologia nervosa e mentale, IV, 1899, pag. 153.

Botanica. — *Tylomyces gummiparus. n. sp., prototipo di un nuovo genere di Ifomiceti. Caratteri biologici e sistematica del fungo* (1). Nota II del dott. Jone Comanducci Cortini, presentata dal Socio R. Pirotta (2).

Proseguite le ricerche sul *Tylomyces gummiparus*, delle cui caratteristiche morfologiche mi sono occupata in una precedente Nota, sono oggi in grado di riferire alcune notizie sul suo comportamento biologico e comincerò col parlare dei risultati ottenuti dallo studio del fungo in colture pure.

Germinazione dei conidi. — In coltura in goccia pendente, i conidi del nostro fungo si rigonfiano rapidamente, sì da mostrarsi ristretti ai setti ed assumere l'aspetto di una coroncina di quattro articoli. Essi iniziano rapidamente la germinazione, che, a temperatura ambiente di 10-13°, si verifica per lo più entro le 24 ore (fig. 15). Questa nella grande maggioranza dei casi avviene dapprima ad un estremo; quivi il protoplasma rompe la membrana, fa screpolare il callo e fuoriesce sotto forma di una goccia jalina rifrangentissima che si riveste di sottilissima membrana; poi si allunga formando un filamento che ramifica molto parcamente conservandosi ialino e che poi produce dei setti trasversali Intanto la germinazione è avvenuta anche all'altro estremo o nelle cellule mediane, sì che si possono vedere i conidi germinati o in una qualunque delle quattro cellule che li compongono, o in due o in tre o in tutte e quattro (figg. 16, 17, 18, 19 e 20).

Qualche giorno dall'inizio della germinazione i conidi cambiano aspetto, perchè le singole cellule si sono talmente rigonfiate da apparire sferiche (figg. 24, 26) e qualche volta avviene che esse si disarticolano assumendo l'aspetto della fig. 28.

I conidi che germinano con molto ritardo producono un'ernia rotondeggiante (figg. 21, 22) che si prolunga in un filamento micelico che presenta prestissimo qualche setto, mentre nei conidi a rapida germinazione ciò avviene molto più tardi quando le ife si sono già variamente ramificate.

Non è necessario che un conidio sia maturo per essere atto alla germinazione; infatti ne ho trovato spesso di quelli ancora formati di due sole cellule che avevano germinato in ambedue dando un promicelio che si setta prestissimo (fig. 23).

Nelle colture a goccia pendente tra il secondo ed il quarto giorno dall'inizio della germinazione si osservano alle estremità delle ife (fig. 29) o

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

su piccoli diverticoli laterali del micelio, dei punti rifrangentissimi che sono la bozza del conidio che si formerà su queste parti che rappresentano dei conidiofori pochissimo differenziati. Seguendo con cura questi abbozzi si nota che essi si rigonfiano leggermente ed in breve si differenziano in conidi che di lì a poco si distaccano dall'ifa restando liberi nel liquido. Essi sono ialini, bacilliformi, con le estremità arrotondate, biguttulati, misuranti 3,5–6 × 1,5–2. Si può ritenere che ogni conidioforo in ventiquattro ore ne possa formare sei o sette, perchè tanti se ne osservano nelle immediate vicinanze di un'ifa fertile. Questi conidi (fig. 32), rappresentano la forma conidica secondaria, o forma microconidica del nostro fungo. Essi germinano con grande facilità dando un esile filamento micelico, generalmente breve, al cui estremo non di rado si differenzia un conidio in tutto simile a quello dal quale proviene, ma più piccolo della metà (fig. 33). Non ho osservato queste successive generazioni di conidi che nelle colture in goccia pendente, quasi che, non trovando il micelio che proviene dal microconidio, un terreno adatto al suo sviluppo (perchè osservato in acqua sterile) produca altri conidi attendendo che le condizioni si facciano più propizie.

Un fatto molto comune in queste colture in goccia pendente, è di trovare dei conidi disposti parallelamente, nei quali la germinazione è avvenuta dalla parte in cui le cellule si fronteggiano: i tubi di germinazione si sono incontrati e si sono fusi due a due in modo da simulare un vero e proprio atto sessuale. È da supporsi che si tratti di un semplice fenomeno di tassia, perchè germinano ugualmente bene anche i conidi che non si accoppiano. In ogni modo il fenomeno si presenta così frequente e il materiale in questione si presta tanto bene allo scopo, che merita la pena di uno studio più accurato, cosa che mi propongo di fare in seguito.

Ho trovato anche qualche caso di germinazione perforante (fig. 27): nella figura è rappresentato un conidio il cui tubo di germinazione partente dalla seconda cellula, ha perforato la pareti delle altre due, vuote di contenuto, attraversandole ed uscendo dall'estremità opposta del conidio.

Caratteri colturali del fungo. — Esso si coltiva benissimo in substrati magri; dopo due o tre giorni dall'inoculazione si eleva dal substrato un fitto feltro bianco candido di micelio che invade anche in parte le pareti di vetro del tubo; entro una dozzina di giorni al massimo, il feltro imbrunisce, riproducendo l'efflorescenza vellutata nero olivacea che si riscontra in natura. In coltura il fungo non perde le sue caratteristiche essenziali e si trovano i conidi olivacei riuniti da abbondante callo in lunghe catene.

Ho tentato indagini sulla natura di questa sostanza saldatrice dei conidi ed essudata dalle ife superficiali del micelio del fungo, ma fino ad ora non ho ottenuto che risultati negativi. Ho provato a discioglierla con gli acidi cloridrico e solforico, con potassa in soluzione concentrata, con acqua di Javel, sempre inutilmente. La potassa sola decolorava un po' il

fungo rendendolo di un bel colore sangue di drago. Hanno fallito anche le colorazioni con il bleu di anilina e con il Sudan III restando perciò escluso che si tratti rispettivamente di sostanza analoga alla callosi che tiene uniti i conidi del *Cystopus candidus* e di sostanze grasse.

Sistematica. — La posizione sistematica del fungo in questione è certamente molto vicina a quella della *Fusariella* Sacc., di cui Saccardo (1) dà questa diagnosi:

« Hyphae fertiles simplices v. varie ramosae, breves v. brevissimae e mycelio repente oriundae, subhyalinae. Conidia acrogena fusiformia, curva, 2 pluriseptata, olivacea v. fusca. Ob formam conidiorum ad Fusarium quodammodo accedit, habitus vero toruloideus ».

La forma dei conidi è su per giù la stessa, ma quelli del nostro genere sono catenulati nel modo sopradescritto, carattere importantissimo che ci permette di differenziarlo da *Fusariella*, dove i conidi non sono catenulati. Fra le pochissime specie di *Fusariella* descritte, quella che più si avvicina al nostro fungo è la *F. viridi-atra* Sacc. (*Fusisporium atrovirens* Berk.), della quale il Saccardo dà la seguente diagnosi:

« Atrovirens, effusa, pulverea; conidiis fusoideis, curvulis 3 septatis ad septa leniter constrictis $25-30 \lesssim 6-8$, olivaceo fuscis utrinque acutiusculis, sporophoris saepius furcatis subhyalinis, filiformibus suffultis. *Habitat:* in foliis caulibusque Alliorum putrescentibus. Vittorio Ital. bor.; in charta bibula putri Newfield, New Jersey, Amer. bor. (J. B. Ellis).

Sarebbe stato mio desiderio poter confrontare il fungillo da me trovato con esemplari di *Fusariella* per meglio sincerarmi dei caratteri differenziali, ma fino ad ora ciò non mi è stato possibile. Comunque, allo stato attuale delle nostre conoscenze, mi sembra di poter concludere che il modo caratteristico di catenulazione dei conidi nel nostro fungo, lo stacca nettamente da quel genere e da tutti gli altri della stessa sezione, ed induce a considerarlo come il prototipo d'un genere nuovo per il quale, riferendomi all'abbondante callosità che unisce i conidi gli uni agli altri e che ricopre di placche le ife superficiali, propongo il nome di *Tylomyces* (da τύλος, callo e μύκης, fungo) denominando la specie *T. gummiparus*. La descrizione dei caratteri si può compendiare nella seguente diagnosi:

Tylomyces. (Etym. τύλος, callus, et μύκης, fungus). Hyphae mycelicae septatae, ramosae, hyalinae, vel atro-crustulosae: conidiophora simplicia vel ramosa, hyalina, conidia acrogena, mesendogena (seu e protoplasmate per porum apicalem conidiophori exilienti efformata), transverse pluriseptata, fusca, curvula, callo glutinoso atro, fragile inter se lateraliter conjuncta et catenulas sinuosas efformantia.

T. gummiparus. Hyphis mycelicis ramosis, septatis, aliis tenuioribus in substrato penetrantibus, 2-5 μ crassis, hyalinis; aliis superficialibus,

(1) Saccardo P. A., *Sylloge fungorum*, vol. IV, pag. 395.

crassioribus 6 μ usque attingentibus, verrucis atro-olivaceis irregularibus crustaeformibus conspersis; conidiophoris simplicibus, vel saepius furcato-ramosis, septatis sub-cylindricis, sursum attenuatis, in catenulas conidiorum abeuntibus, hyalinis; conidis mesendogenis, initio ellipsoideis, hyalinis demum varie incurvatis, falculiformibus, vel navicularibus, triseptatis ad septa non vel vix constrictis, atro-olivaceis, 19-26 $\times$ 7-7 μ, superioribus cellulae apicali inferiorum lateraliter hacrentibus ibique substantia gummosa fragili aterrima agglutinatis et catenulas longiusculas efformantibus.

Hab. In caulibus marcescentibus loco humido asservatis *Dianthi Caryophylli*. Romae.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 15. — Conidio maturo al primo accenno di germinazione.
» 16, 17, 18, 19, 20. — Conidi in diversi stadi di germinazione.
» 21, 22. — Conidi germinati in ritardo presentanti le ernie.
» 23. — Giovane conidio germinante.
» 24, 26. — Conidi germinanti con le cellule rigonfiate fino a divenire sterile.
» 25. — Conidi presentanti fusione dei tubi di germinazione.
» 27. — Conidio a germinazione perforante.
» 28. — Conidio con le quattro cellule disarticolate.
» 29. — Estremità di un conidioforo con l'abbozzo di un microconidio apicale.
» 30, 31. — Microconidi laterali.
» 32. — Microconidio.
» 33. — Microconidio germinato.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Mineralogia. — *Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto* (1). Nota II del Corrispondente Februccio Zambonini (2).

L'asse ottico emergente da (001) si scorge, adoperando un microscopio Leitz con l'obiettivo 7, all'orlo o addirittura appena fuori del campo, proprietà, anche questa, tipica per le clinozoisiti, come è detto nel mio lavoro citato. Da misure eseguite in varî cristallini risulta che l'asse ottico emergente da (001) forma con la normale alla base un angolo vero ω' di 30° 37′ (apparente nell'aria di 60° 45′) per la luce del sodio (3). In base alla tabella data a pag. 95 del mio lavoro, si dedurrebbe, per questi cristalli di Monte Tovo, un tenore in ferriepidoto di appena il 2,4 % circa, ossia un contenuto in Fe_2O_3 uguale a 1 % circa: si avrebbe, perciò, a che fare con una clinozoisite notevolmente meno ferrifera di quella classica della Goslerwand, studiata da Weinschenk.

Questo risultato viene perfettamente confermato dalla determinazione dell'indice medio di rifrazione n_m. In un bellissimo cristallo, che ha permesso misure di rara esattezza, io ho trovato, adoperando come prismi rifrangenti quelli formati dalle due coppie di faccie (001)-($\bar{1}$00) e (00$\bar{1}$)-(100),

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

(2) Presentata all'Accademia il 16 agosto 1921.

(3) Da $c : n_p = 6° 32'$ e $2V = 99° 35'$ si calcola un valore di 30° 50′ per ω'.

e servendomi del monocromatore di Voigt, come pure delle righe del litio e del talio:

	Li	C	D	Tl	E
$n_m =$	1.7091	1.7098	1.7135	1.7183	1.7191

Valori praticamente identici, o, anche, addirittura leggermente inferiori, ho ottenuto in altri cristallini. Ora, è da notare che il Kehldorfer ha trovato, per la luce del sodio, $n_m = 1.7138$ nella clinozoisite, ritenuta pressochè priva di ferro, dell'Alpe Schwarzenstein, sicchè i cristalli studiati di Monte Tovo dovrebbero anche loro essere poverissimi in ferro (1). Ma, se così fosse, si dovrebbe avere, per $2V_{n_p}$, un valore prossimo a quello osservato dal Kehldorfer, e, cioè, 114° 40′ (2) (luce del sodio).

In realtà, però, non è così. In un cristallo assai bello, io ho trovato

$2V_C = 101° 53'$ $2V_{Na} = 99° 35'$ $2V_{Tl} = 97° 32'$ (intorno a n_p).

La misura fu eseguita servendosi della coppia di faccie parallele data dal pinacoide $\{100\}$: il cristallo fu immerso in uno joduro di metilene di indice di rifrazione (per la luce del sodio), molto vicino a quello n_m del minerale, sicchè l'errore dovuto al fatto che l'asse n_g dell'indicatrice non è esattamente normale a $\{100\}$, diventa trascurabile.

Come si vede, il valore di $2V_{Na}$ è assai diverso da quelli trovati dal Kehldorfer e dal Goldschlag nei loro cristalli senza ferro, ed è, invece, molto prossimo a quello dato da Weinschenk (98° 20′ per la luce del sodio) per i cristalli della Goslerwand, nei quali, però, $n_m = 1.7195$ e l'angolo che l'asse ottico visibile su (001) forma con la normale alla base è, nell'aria, soltanto di 48° circa.

Si ha, perciò, fra le varie determinazioni ottiche eseguite, un disaccordo notevole, rispetto a quanto è stato osservato in altre clinozoisiti. Ad ogni modo, dal complesso delle indagini riferite sembrerebbe logico il dedurre che i cristalli di Monte Tovo dei quali ci occupiamo devono contenere una quantità di Fe_2O_3 inferiore a quella trovata da Weinschenk nei cristalli della Goslerwand (1.68 %). Se non che, i saggi analitici danno la smentita la più completa a tale previsione. Io ho scelto uno ad uno gr. 0.1109 di cristalli limpidi, trasparenti, omogenei: per ciascuno di essi constatai la posizione dell'asse ottico emergente dalla base. Sono, perciò, sicuro, che quei cristalli avevano tutti, almeno sensibilmente, le stesse proprietà. Il ferro totale risultò uguale a 5.77 % Fe_2O_3. Su altri gr. 0.127 fu eseguita una determinazione di ferro ferroso, la quale dette $FeO = 0.61$ %. Si ha, perciò,

(1) Goldschlag dà, per i cristalli dell'Alpe Schwarzenstein, $n_m = 1,7172$, ossia un valore sensibilmente più alto di quello trovato da Kehldorfer, sicchè i cristalli di Monte Tovo dovrebbero contenere una quantità negativa di ferro ferrico, essendone già pressochè privi quelli tirolesi.

(2) 113° 47′ secondo Goldschlag.

un tenore in Fe_2O_3 uguale a 5.1 %, ossia il *triplo* della quantità contenuta nei cristalli della Goslerwand (1). Nei cristalli analizzati di Monte Tovo il ferriepidoto è presente, perciò, nella notevole quantità di 11.5 %: in base alle formule che sono indubbiamente valide per molti epidoti e clinozoisiti, si dovrebbe avere $2V_{n_p} = 86°49'$, mentre si è, in realtà, osservato $2V_{n_p} = 99°35'$. La differenza è troppo forte per poterla spiegare con cause dipendenti dalle esperienze. È da notare, ancora, che i cristalli di Monte Tovo sono vicini, per la loro composizione chimica, a quelli di Huntington e di Val Maigels con 12.8 e 13.1 % rispettivamente di ferriepidoto: or bene, in essi, come si è già riferito, sono stati trovati, per $2V_{n_p}$, i valori di 90°32′ e di 85°, differentissimi da quelli da me osservati nei cristalli di Monte Tovo.

In una lamina parallela a (010) ho misurato la birifrangenza col compensatore di Babinet, ed ho trovato $n_g - n_p = 0{,}012$ per la luce del sodio. Questa birifrangenza è dello stesso ordine di grandezza di quella osservata nei cristalli « anomali » di Huntington, della valle di Ziller, ecc.

Nè è da credere che il comportamento di questi cristalli sia eccezionale. Sempre a Monte Tovo, io ho trovato un grande cristallo, che misurava un centimetro e mezzo nella direzione dell'asse b, schiacciato secondo la base. Presentava la combinazione semplicissima $\{001\}\ \{100\}\ \{\bar{1}11\}$. Per una piccola porzione, nettamente distinta dal resto, che è di colore giallo chiaro, era giallo verdastro. La porzione più estesa aveva la polvere perfettamente bianca, e la composizione chimica è risultata la seguente:

SiO_2 38.64 Al_2O_3 29.35 Fe_2O_3 5.42 FeO 0.40 MnO 0.09 MgO 0.15 CaO 24.02 H_2O+ 1.98 Sa = 100.05.

Nell'ossido di calcio si ricercò lo stronzio, che sembrò essere completamente assente; se vi è, non può trovarsi che in una quantità indeterminabile con la sostanza impiegata (0,5 gr. di minerale).

Le parti giallo-chiare di questo cristallo hanno una composizione molto vicina a quella dei piccoli cristalli tozzi già descritti, dei quali, però, non possiedono il vivo splendore caratteristico. Una sezione parallela a (010) presenta struttura perfettamente uniforme ed estingue contemporaneamente in tutte le sue parti, anche in luce bianca. Una direzione di massima estinzione forma, per la luce del sodio, un angolo di 3°30′ con [001] nell'an-

(1) È inutile che io dica come il valore da me trovato per Fe_2O_3 nei cristalli di Monte Tovo sia, per quanto è possibile, esatto. La determinazione fu fatta prima volumetricamente col permanganato di potassio, poi gravimetricamente, separando il ferro dall'alluminio, precipitati insieme, mediante il solfuro d'ammonio in presenza di acido tartarico. Del resto, una seconda determinazione, eseguita su materiale un po' meno perfetto del primo, ha condotto allo stesso risultato, che è confermato, inoltre, dall'esame del grande cristallo, del quale è parola in seguito.

golo *ottuso* β. La struttura uniforme in luce parallela non è, però, che un'apparenza: in realtà, le proprietà ottiche variano sensibilmente nelle diverse plaghe. Così, per $2V_{n_\beta}$ io ho trovato, per la luce del sodio, valori variabili fra 101° 30′ e 98° 30′: come valore medio, si può prendere $2V_{n_\beta} = 100° 20'$. In una plaga di una lamina parallela a (100) io ho misurato:

$$2V_{Li} = 77° 22' \qquad 2V_{Na} = 79° \qquad 2V_{Tl} = 81° 20'.$$

Il valore medio di $2V_{n_\beta}$ è vicino a quello trovato nei cristallini già descritti, ed anche per la dispersione si ha pieno accordo: nei cristallini si ha, infatti, intorno alla bisettrice positiva, $2V_{Tl} - 2V_{Li} = 4° 21'$, mentre nel grande cristallo si è trovato $2V_{Tl} - 2V_{Li} = 3° 58'$. È notevole il fatto che la dispersione dell'angolo degli assi ottici è, in questi cristalli di Monte Tovo, assai più forte di quella osservata da Weinschenk nella clinozoisite della Goslerwand, che al minerale di Monte Tovo è molto vicina per il valore di $2V_{Na}$, ma che presenta $2V_{Tl} - 2V_{Li} = 2° 10'$ ca soltanto. Nella varietà di Huntington, che contiene una quantità di Fe_2O_3 quasi uguale a quella dei cristalli di Monte Tovo la dispersione è molto debole: la differenza $2Ha_{Tl} - 2Ha_{Li}$ non è che di 0° 41′ secondo Forbes.

Abbiamo, così, veduto nel giacimento di Monte Tovo, coesistere clinozoisiti « normali » per il valore di $2V$ ed altre, invece, con proprietà ottiche in netto contrasto con la composizione chimica Il fatto non è isolato, anzi, al contrario, esso si verifica in altri giacimenti, compreso quello classico e tipico della Goslerwand. Le analisi e le ricerche ottiche sono state eseguite dal Weinschenk sui cristallini limpidi, di colore roseo chiaro. Oltre questi cristalli, se ne trovano, in quella località, anche degli altri che, per gradazioni, si può dire, infinite, passano agli epidoti. Generalmente, vengono considerate come clinozoisite anche le masserelle lamellari, tra le quali, talvolta, compaiono cristalli mal conformati, di colore roseo-carnicino chiaro, poco splendenti ed imperfettamente trasparenti. Queste masserelle sono uno dei costituenti della roccia nella quale si rinviene la clinozoisite tipica, e somigliano molto, per aspetto, ad alcune varietà di Chiampernotto, in val d'Ala. Al microscopio appaiono del tutto inalterate, ad onta del loro scarso splendore. La composizione chimica delle masserelle in questione della Goslerwand è la seguente:

SiO_2 38.92 Al_2O_3 29.34 Fe_2O_3 5.16 FeO 0.27 Mn 0.07 MgO 0.09
CaO 23.94 $H_2O + 2.05$ Sa = 99.84.

Come si vede, questa composizione è assai diversa da quella dei cristalli analizzati da Weinschenk (1), ed è molto vicina, invece, a quella dei

(1) L'analisi di Weinschenk è la seguente: SiO_2 39.06 Al_2O_3 32.47 Fe_2O_3 1.68 FeO 0.29 MnO tr. CaO 24.53 H_2O 2.01 Sa = 100.14.

cristalli di Monte Tovo già descritti. Anche per le proprietà ottiche si ha accordo con questi ultimi: una lamina parallela a (100) ha dato $2V_{n_g} = 80\frac{1}{2}°$ (Na). In tre plaghe di un'altra lamina, pure parallela a (100), ho trovato, sempre per la luce del sodio, $2V_{n_g} = 78°42'$, $79°48'$, $80°22'$. Quest'ultima misura era più esatta. Come media di tutte le misure si può prendere 80°. Dimodochè questi cristalli lamellari, ad onta della loro differente composizione, possiedono un angolo degli assi ottici sensibilmente uguale a quello dei cristallini, tanto meno ferriferi, studiati da Weinschenk.

Da (001) emerge un asse ottico verso l'orlo del campo, ma un po' meno inclinato che nei cristallini di Monte Tovo.

In una lamina tagliata parallelamente a (010) in un geminato costituito da due individui, io ho trovato che le direzioni di massima estinzione prossime a [001] formavano, nei due individui del geminato, un angolo di 8°30' per la luce del sodio: si ha, perciò, $c:n_p = 4°15'$ (Na) nell'angolo ottuso β. La lamina era abbastanza omogenea: anch'essa, contrariamente a quello che avviene nella clinozoisite tipica, presentava estinzione nettissima, anche in luce bianca.

Si è già accennato agli epidoti poco ferriferi di St. Bathélemy, studiati dal Millosevich, il quale ha trovato che i cristalli con 3.25 % Fe_2O_3 sono positivi, mentre quelli con 5.25 % sono negativi. Lo stesso Millosevich ha già accennato alla grande variabilità di composizione e di proprietà ottiche degli epidoti di quel giacimento. Grazie alla cortesia dei Colleghi ed amici proff. Millosevich e Pelloux, io ho potuto studiare alcuni cristalli raccolti in quel vallone, e, specialmente, ad Issologne. Essi sono o molto piccoli, chiarissimi, pressochè incolori, ovvero, e questi sono i più frequenti ed i più adatti a misure, di un colore grigio più o meno cupo, e possono, allora, raggiungere anche 3-4 mm. nella direzione dell'asse *b*. Da uno dei campioni donatimi dal prof. Pelloux, io ho potuto isolare alcuni cristalli grigi: in due di essi ho misurato 2V, servendomi, al solito, di lamine parallele a {100}. Un cristallo ha dato $2V_{n_g} = 92°$, l'altro $2V_{n_g} = 92°30'$, ambedue per la luce del sodio. Ho scelto, allora, altri cinque cristallini, nei quali l'asse emergente da (001) era inclinato come nei due nei quali si era misurato 2V, sicchè appare verosimile che dovessero essere ad essi identici anche per composizione. La determinazione del ferro totale, eseguita con ogni cura, ha dato 6.97 % Fe_2O_3; dedotta una tenue quantità di FeO, determinata su altri cristalli dello stesso campione, si può ritenere che Fe_2O_3 ammonti a 6.8 %, il che equivale a 15.4 % di ferriepidoto. Ora, per una tale quantità di ferriepidoto, la mia formula dà $2V_{n_p} = 84°14'$, mentre si è misurato $87°30' — 88°$. Dal valore medio trovato di $2V_{n_p} = 87°45'$ si calcola 4.5 % Fe_2O_3 e 10.1 % di ferriepidoto. Le differenze sono troppo forti per essere spiegate con errori di determinazioni.

Da un altro campione ho isolato dei cristallini grigi, nei quali $2V_{n_p}$ è stato trovato variabile, in diversi individui, fra 94° 30′ e 91° 30′ (per la luce del sodio): il loro contenuto in Fe_2O_3 (compreso FeO, presente, del resto, in quantità molto piccola) ascende a 6 % circa. Si tratta, perciò, di cristalli analoghi, per composizione e valore di $2V_{n_p}$ a quelli di Camp-Ras nell'Ariège. Anche nel vallone di St. Barthélemy, come a Monte Tovo ed alla Goslerwand, si trovano associati termini veramente clinozoisitici nel senso di Weinschenk, ad altri che sono, sì, otticamente positivi, ma che si presentano notevolmente più ferriferi di quel che dovrebbero.

Ricorderò ancora un notevole cristallo del Monte Bianco. Si tratta di un bel geminato secondo la solita legge: piano di geminazione $\{100\}$, il quale raggiunge 1,5 cm. nella direzione di b. I due individui del geminato non sono di uguale colore: uno è di un bel giallo ambrato, l'altro sensibilmente più chiaro. Le mie ricerche sono state eseguite su un frammento dell'individuo giallo ambrato. Mediante un prisma naturale $(001)\widehat{\ }(10\bar{1})$ ed il monocromatore di Voigt, io ho trovato

	B	C	D	E	F
$n_m =$	1.7192	1.7209	1.7259	1.7324	1.7388

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Sopra un'equazione funzionale.* Nota IV di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera (1).

4. Risulta dalla (6) della Nota precedente che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha |g(0)|}$ la (4) ha una ed una sola soluzione derivabile in $(0, a)$ che si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)} \varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{1,n}(x) . \tag{8}$$

Potremmo anche dire che nel detto cerchio la funzione $[1 - \lambda g(0)]\, u(x)$ si può rappresentare con una serie di potenze di λ che, fissato λ, converge uniformemente rispetto ad x in $(0, a)$.

Per il calcolo di $\varphi_0(x)$ e delle $f_{1,n}(x)$ osserveremo che per avere la $\varphi_0(x)$ basterà calcolare la $u_{1,2}(x)$ dalla equazione in $u_{1,i}(x)$ del n. precedente, per $i = 2$ e $\lambda = \lambda_0$ [equazione che rientra nel tipo (1)] e tenere poi conto della (7). Avuta la $\varphi_0(x)$, dalla (8), nelle vicinanze del punto $\lambda = 0$, si ha

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

$$u(x) = f(0)\,\varphi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,g^n(0) + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,f_{1,n}(x)$$

e confrontando questo sviluppo con l'altro: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,f_n(x)$, troviamo

$$f_n(x) = f(0)\,g^n(0)\,\varphi_0(x) + f_{1,n}(x) \tag{9}$$

e da questa si ricava la $f_{1,n}(x)$. Le $f_{1,n}(x)$ si annullano tutte per $x = 0$.

La $\varphi_0(x)$ si può anche calcolare in un altro modo. Siccome la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,f_{1,n}(x)$ converge per $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{g(0)}$, si avrà

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_{1,n}(x)}{g^n(0)} = 0$$

e perciò dalla (9)

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n(x)}{g^n(0)} = f(0)\,\varphi_0(x)\,,$$

e da questa si trae $\varphi_0(x)$ se $f(0) \neq 0$.

Ciò potrebbe anche esprimersi in modo diverso. Le funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots$ sono le *iterate* di $f(x)$ per mezzo dell'operazione lineare S definita dalla eguaglianza

$$S[\varphi(s)] = g(x)\,\varphi(\alpha x) + \int_0^x N(x, s)\,\varphi(s)\,ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s)\,\varphi(s)\,ds\,,$$

e si vede che il rapporto tra la iterata di ordine n di $f(x)$ e $g^n(0)$ se $f(0) \neq 0$ ha per limite una *funzione fondamentale relativa all'operazione* S, *corrispondente alla costante caratteristica* $\frac{1}{g(0)}$, ossia ha per limite una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente all'equazione funzionale

$$\frac{1}{g(0)}\,S[\varphi(x)] = \varphi(x)\,.$$

Si ha $\varphi(0) = f(0)$.

Se invece $f(0) = 0$ *tale limite è zero.*

5. Finora abbiamo trovato che la soluzione $u(x)$ della (4) derivabile in $(0, a)$ è funzione analitica di λ all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha|g(0)|}$ dotata di un solo punto singolare, e precisamente di un polo nel punto $\lambda = \frac{1}{g(0)}$ col residuo $-\frac{f(0)}{g(0)}\,\varphi_0(x)$.

La soluzione $u(x)$ trovata ammette derivata seconda — perchè $u'(x)$ è derivabile — e si ha

$$(10)\quad u''(x) = \lambda\Big[\alpha^2 g(x)\, u''(\alpha x) + \int_0^{\infty} N_2(x, s)\, u''(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P_2(x, s)\, u''(s)\, ds + u'(0)\, q_2(x) + u(0)\, q_1'(x)\Big] + f''(x),$$

dove $N_2(x, s)$, $P_2(x, s)$, $q_2(x)$ sono formate per mezzo di $N_1(x, s)$, $P_1(x, s)$, $\alpha g(x)$ come $N_1(x, s)$, $P_1(x, s)$, $q(x)$ lo sono per mezzo di $N(x, s)$, $P(x, s)$, $g(x)$.

In quanto ad $u'(0)$ esso si ricava dalla (5) e si trova

$$u'(0) = \frac{\lambda u(0)\, q_1(0) + f'(0)}{1 - \lambda\alpha\, g(0)},$$

ossia, sostituendo ad $u(0)$ il suo valore già ricavato dalla (4),

$$u'(0) = \frac{\lambda f(0)\, q_1(0) + [1 - \lambda g(0)]\, f'(0)}{[1 - \lambda g(0)]\,[1 - \lambda\alpha g(0)]}.$$

Se denotiamo con $u_{2,i}(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ la soluzione dell'equazione

$$(11)\quad u_{2,i}(x) = \lambda\Big[\alpha^2 g(x)\, u_{2,i}(\alpha x) + \int_0^{\infty} N_2(x, s)\, u_{2,i}(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P_2(x, s)\, u_{2,i}(s)\, ds\Big] + l_{2,i}(x),$$

dove poniamo

$$l_{2,1}(x) = f''(x),\quad l_{2,2}(x) = q_1'(x),\quad l_{2,3}(x) = q_2(x),$$

la (10) ci dà

$$u''(x) = u_{2,1}(x) + \lambda\, u(0)\, u_{2,2}(x) + \lambda\, u'(0)\, u_{2,3}(x)$$

e di qui

$$(12)\quad u(x) = \int_0^{x} (x - \xi)\, u_{2,1}(\xi)\, d\xi + u(0)\Big[1 + \lambda\int_0^{x} (x - \xi)\, u_{2,2}(\xi)\, d\xi\Big] + u'(0)\Big[x + \lambda\int_0^{x} (x - \xi)\, u_{2,3}(\xi)\, d\xi\Big]$$

e questa, per ogni valore di λ interno al cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha^2 |g(0)|}$ e diverso da $\frac{1}{g(0)}$ ed $\frac{1}{\alpha\, g(0)}$, è l'unica soluzione della (4) che ammetta derivata seconda.

Per $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\alpha\, g(0)}$ la (4) ammette soluzione derivabile finita solo se il numeratore del valore $u'(0)$ tratto dalla (5) risulta nullo, se è cioè

$$\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha - 1)\, g(0)} + f'(0) = 0.$$

Si avrà allora una soluzione prendendo

$$u(x) = \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,1}(\xi)|_1\, d\xi +$$

$$+ \frac{f(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,2}(\xi)|_1\, d\xi + \frac{\alpha f(0)}{\alpha - 1},$$

dove con la notazione $|_1$ messa dopo una funzione dipendente da λ, intendiamo che in essa si deve porre $\lambda = \lambda_1$.

La più generale soluzione si avrà dalla particolare ora trovata aggiungendo $c\,\varphi_1(x)$, con c costante arbitraria e

$$\varphi_1(x) = x - \lambda_1 \int_0^x (x-\xi)\, u_{2,3}(\xi)|_1\, d\xi\,;$$

$\varphi_1(x)$ è funzione fondamentale relativa all'operazione S del n. 4, corrispondente alla costante caratteristica λ_1.

Concludiamo così che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha^2 |g(0)|}$ la (4) ammette una ed una sola soluzione dotata di derivata seconda che si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{f(0)}{1-\lambda g(0)}\, \varphi_0(x) + \tag{13}$$

$$+ \left[\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} + f'(0)\right] \frac{1}{1-\lambda\alpha\, g(0)}\, \varphi_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{2,n}(x)\,,$$

come si deduce facilmente dalla (12).

Da questa si deduce anche che $[1-\lambda g(0)]\,[1-\lambda\alpha g(0)]$ all'interno del cerchio suddetto è una serie di potenze di λ che, fissato λ, converge uniformemente rispetto ad x in $(0, a)$. Per avere la $\varphi_1(x)$ bisogna calcolare la $u_{2,3}(x)|_1$ dalla (11) per $i = 3$ e $\lambda = \lambda_1$, e si ha così da risolvere una equazione del tipo (1). Avuta la $\varphi_1(x)$ si trovano le $f_{2,n}(x)$ eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di λ nello sviluppo $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ ed in quello che si ottiene dalla (13) sviluppando in serie di potenze di λ nelle vicinanze del punto $\lambda = 0$. Si ha così

$$f_n(x) = g^n(0) \left\{ f(0)\, \varphi_0(x) + \left[\frac{f(0)\, q_1(0)}{(\alpha-1)\, g(0)} + f'(0)\right] \alpha^n\, \varphi_1(x) \right\} + f_{2,n}(x)$$

e da questa si ricava la $f_{2,n}(x)$.

Da quest'ultima eguaglianza ricaviamo anche che il limite per $n = \infty$ del rapporto tra la iterata n^{esima} di una funzione $f(x)$ dotata di derivata seconda e che si annulla per $x = 0$, e la potenza n^{esima} di $\alpha\, g(0) = \frac{1}{\lambda_1}$

è $f'(0)\,\varphi_1(x)$, e quindi se $f'(0) \neq 0$ si ha un altro procedimento di calcolo per ottenere la $\varphi_1(x)$.

Siccome poi è $u(0) = \dfrac{f(0)}{1 - \lambda\, g(0)}$ e $\varphi_1(x)$ si annulla per $x = 0$, tutte le $f_{2,n}(x)$ si annullano per $x = 0$. Anche le derivate prime di queste funzioni si annullano per $x = 0$. Ciò si vede subito derivando la (13) rispetto ad x e facendo poi $x = 0$, tenendo conto che è $\varphi_1'(0) = 1$, $\varphi_0'(0) = \lambda_0\, u_{1,2}(0)|_0$ e ricavando il valore $u_{1,2}(0)|_0$ dalla equazione in $u_{1,2}$ del n. 3; si trova così $\varphi_0'(0) = \dfrac{q_1(0)}{(1-\alpha)\, g(0)}$. Si può calcolare così il valore della derivata del secondo membro della (13) per $x = 0$, l'analogo valore della derivata del primo membro è stato già ricavato dalla (5), eguagliando i due valori troviamo $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f'_{2,n}(0) = 0$, cioè $f'_{2,n}(0) = 0$, come avevamo asserito.

6. Ed ora in generale possiamo dire che la (4) ammette una soluzione ed una sola dotata di derivate di qualunque ordine. Tale soluzione è funzione meromorfa di λ avente come poli semplici i punti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ con $\lambda_n = \dfrac{1}{\alpha^n\, g(0)}$.

Si ha precisamente

$$(14)\quad u(x) = \frac{h_0}{1 - \lambda\, g\,0)}\,\varphi_0(x) + \frac{1}{1 - \lambda\,\alpha\, g(0)}\,\varphi_1(x) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{h_{n-1}}{1 - \lambda\,\alpha^{n-1}\, g(0)}\,\varphi_{n-1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m\, f_{n,m}(x)\,,$$

all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\alpha^n\,|g(0)|}$.

$\varphi_{n-1}(x)$ ammette derivate di qualunque ordine e si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime $n - 2$ derivate, la derivata $(n-1)^{ma}$ per $x = 0$ prende il valore $(n-1)!$, $\varphi_{n-1}(x)$ è funzione fondamentale relativa all'operazione S del n. 4 corrispondente alla costante caratteristica λ_{n-1}. $\varphi_{n-1}(x)$ si può ottenere risolvendo un'equazione del tipo (1), oppure in un altro modo che discende immediatamente da quanto ora diciamo.

Sia $f(x)$ una funzione dotata di derivate fino all'ordine n e sia

$$f(0) = 0\,,\ f'(0) = 0\,,\ \ldots\ f^{(n-2)}(0) = 0$$

e denotiamo con $f_1(x), f_2(x), \ldots$ le iterate di $f(x)$ per mezzo dell'operazione S del n. 4. Si ha allora

$$f^{(n-1)}(0)\,\varphi_{n-1}(x) = (n-1)!\,\lim_{m=\infty} \frac{f_m(x)}{[\alpha^{n-1}\, g(0)]^m}\,.$$

Le funzioni $f_{n,m}(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ ammettono derivate di qualunque ordine e si annullano per $x = 0$ insieme alle loro prime $n - 1$ derivate.

In seguito diremo come si calcolano le costanti $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$; conosciute queste costanti e le funzioni $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \ldots \varphi_{n-1}(x)$ si possono calcolare le $f_{n,m}(x)$, perchè si ha

$$g^m(0)\left[h_0\,\varphi_0(x) + h_1\,\alpha^m\,\varphi_1(x) + h_2\,\alpha^{2m}\,\varphi_2(x) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + h_{n-1}\,\alpha^{(n-1)m}\,\varphi_{n-1}(x)\right] + f_{n,m}(x) = f_m(x).$$

Matematica. — *Realizzazione cinematica del parallelismo superficiale.* Nota di E. Persico, presentata dal Socio T. Levi-Civita (1).

Consideriamo una superficie rigida S, convessa almeno in una certa regione, e avente del resto tale configurazione da potere materialmente rotolare sopra un piano ω, finchè il contatto si mantiene nella regione suddetta.

Con l'intesa di rispettare questa limitazione, immaginiamo di far rotolare S su ω, senza strisciamento, nè giro (*pivotement* dei francesi), in modo che il punto di contatto Q percorra una assegnata curva T di S. Queste condizioni possono sempre venire soddisfatte, e determinano in modo unico il movimento. Difatti, se esse sono soddisfatte, il moto è in ogni istante una rotazione intorno a un asse passante per Q e giacente in ω, quindi tangente a S, e la superficie rigata Σ, luogo, nel sistema mobile, di questi assi istantanei di rotazione, contiene la curva T ed ha tutte le generatrici tangenti ad S nei punti di questa curva: essa è dunque la sviluppabile circoscritta ad S lungo T, e il moto si può individuare mediante il rotolamento di questa sviluppabile sul piano ω; viceversa, il moto definito dal rotolamento della sviluppabile circoscritta ad S lungo T su ω soddisfa le condizioni suaccennate. Nel movimento ora descritto, l'asse istantaneo di rotazione (caratteristica della sviluppabile circoscritta) e la tangente alla curva T sono sempre, come è noto, due tangenti coniugate della superficie S, il che mostra ancora che, data la curva T, è in generale definito, in ciascun punto di essa, l'asse istantaneo di rotazione. Sono eccettuati quei punti parabolici, nei quali eventualmente la T avesse la direzione asintotica, poichè in tali condizioni la direzione coniugata di questa rispetto alla indicatrice è indeterminata: in questi punti la rotazione istantanea è nulla, perchè due punti infinitamente vicini di T hanno il medesimo piano tangente. Se tutti i punti di un tratto AB di T sono di questa specie (se cioè il tratto AB coincide con un tratto piano di asintotica) la superficie tocca un piano lungo questo tratto, e il punto di contatto di S con ω non è più determinato: si

(1) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

immaginerà allora, per definire il rotolamento, che quando la linea AB si adagia sul piano ω, il punto Q passi da A a B senza che la superficie si muova (1).

Tenuta presente tale convenzione, è facile riconoscere che, immaginando ipoteticamente la Σ come solidale con S nel suo rotolamento, la Σ stessa rimane sviluppata sul piano ω. Basta considerare il movimento come una successione di rotazioni elementari intorno alle generatrici $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ di Σ, ed osservare che la rotazione elementare intorno a g_1, la quale porta g_2 ad adagiarsi su ω, coincide con l'operazione di sviluppo dell'elemento di sviluppabile $g_1\, g_2$ sul piano ω stesso; quindi, nel rotolamento descritto, gli elementi $g_1\, g_2$, $g_2\, g_3$, ... della sviluppabile Σ vengono *successivamente* ad assumere nel piano ω le posizioni stesse che assumerebbero *simultaneamente* per effetto del materiale sviluppo.

Tutto ciò premesso, ricordo che, secondo il prof. Levi-Civita (2), due direzioni spiccate da punti di T tangenzialmente alla S, si dicono *parallele* (rispetto alla curva di trasporto T) quando, considerate come appartenenti alla sviluppabile circoscritta Σ, sono parallele nella metrica di Σ, e divengono quindi parallele in senso ordinario nello sviluppo di Σ. Ne viene che, se in due punti della curva T si immaginano spiccate due direzioni superficialmente parallele rispetto alla curva medesima, esse, nel rotolamento testè definito di S su ω, vengono a coincidere con due direzioni di ω parallele in senso ordinario. Il trasporto per parallelismo lungo una curva T, arbitrariamente assegnata su una superficie S, (purchè siano rispettate le restrizioni accennate in principio), può dunque materialmente effettuarsi facendo *rotolare* la superficie stessa, in modo che il punto di contatto percorra la curva T, su un piano solcato da rette parallele vicinissime, capaci di lasciare sulla superficie *l'impronta della loro direzione:* le direzioni che, ad operazione compiuta, si trovano impresse lungo la curva T, sono superficialmente parallele rispetto alla curva stessa.

(1) Il punto di contatto cessa altresì di essere definito quando la curva T tagli un tratto piano di asintotica; si prenderà allora come punto Q la intersezione in discorso.

(2) Cfr. la Memoria, *Nozione di parallelismo*, etc., nei Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tom. XLII, 1917. La caratterizzazione geometrica surriferita fu introdotta dal prof. Levi-Civita nelle conferenze da lui tenute in Spagna, attualmente in corso di stampa per cura dell'Institut d'Estudis Catalans di Barcellona.

Matematica. — *Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali.* Nota II di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE (1).

4. Si aggreghi (2) al sistema (1) la funzione $\psi_{i_0}(x)$. Se dopo ciò esistono ancora funzioni ortogonali alla $\psi_{i_0}(x)$ ed alle (1), il numero delle (9) dovrà essere > 1, e per qualche $\nu > 0$ saranno la $\psi_{i_0}(x)$ e la $\psi_{i\nu}(x)$ quasi dappertutto in (a, b) linearmente indipendenti. Detta infatti nell'ipotesi contraria $\theta_1(x)$ una soluzione effettiva delle equazioni integrali

$$(11)\qquad \int_a^b \theta(x)\,\psi_{i_0}(x)\,dx = 0\ ,\quad \int_a^b \theta(x)\,V_k(x)\,dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

poichè

$$\left\{\int_a^b \theta_1(x)\left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k A_k^{(i_0)}\,V_k(x)\right]dx\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \int_a^b [\theta_1(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b \left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k A_k^{(i_0)}\,V_k(x)\right]^2 dx\ ,$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \theta_1(x)\left[\Phi_{i_0}(x) - \sum_0^n{}_k A_k^{(i_0)}\,V_k(x)\right]dx = 0\ ,$$

risulta

$$\int_a^b \Phi_{i_0}(x)\,\theta_1(x)\,dx = 0\ ,$$

donde segue, per la prima delle (11),

$$(12)\qquad \int_a^b \theta_1(x)\,\varphi_{i_0}(x)\,dx = 0\ .$$

Allo stesso modo si trova

$$(13)\qquad \int_a^b \theta_1(x)\,\omega_i(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq i_0),$$

se la

$$(14)\qquad \omega_i(x) = c_0\,\varphi_{i_0}(x) + c_i\,\varphi_i(x)\ ,$$

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) Cfr. Nota I, in questi Rendiconti, fasc. 3-4, sem. 2°, pag. 92.

ove c_0 e c_i indicano due costanti non entrambe nulle, soddisfa all'equazione (2). Poichè una combinazione lineare, come la (14), soddisfacente alla (2), si può sempre formare nel caso che di questa proprietà goda la $\varphi_i(x)$, assumendo $c_0 = 0$, $c_i \neq 0$, risulta (§ 3) dalla (12) e dalla (13)

$$\int_a^b \theta_1(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

contro l'ipotesi che non esistano soluzioni effettive per le (4).

Detto ora j_1 il più piccolo valore di i_ν, pel quale le $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{i_\nu}(x)$ sono quasi dappertutto in (a, b) linearmente indipendenti, ammesso che esistano funzioni ortogonali a $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{j_1}(x)$ ed alle (1), si vede in modo analogo che le (9) debbono essere in numero > 2, e che per qualche $i_\nu > j_1$ le $\psi_{i_0}(x)$, $\psi_{j_1}(x)$, $\psi_{i_\nu}(x)$ sono quasi dappertutto linearmente indipendenti in (a, b).

Così continuando si viene a determinare un sistema finito o numerabile di funzioni

$$\psi_{j_\nu}(x) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ j_0 = i_0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

che normalizzato dà luogo ad un sistema complementare del sistema (1).

Se infatti potesse esistere una soluzione effettiva $\bar{\theta}(x)$ delle equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \psi_{i_\nu}(x)\, dx = 0 \;, \quad \int_a^b \theta(x)\, \mathrm{V}_k(x)\, dx = 0 \qquad (\nu, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

si avrebbe

$$\int_a^b \bar{\theta}(x)\, \varphi_{j_\nu}(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Inoltre per ogni $i \neq j_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, essendo

$$\bar{\omega}_i(x) = \sum_0^{p_i}{}_\nu \bar{c}_{j_\nu} \varphi_{j_\nu}(x) + \bar{c}_i\, \varphi_i(x) \qquad (\bar{c}_i \neq 0)$$

una combinazione lineare a coefficienti costanti di $\varphi_i(x)$ e di alcune delle $\varphi_{j_\nu}(x)$ in numero finito p_i, soddisfacente alla (2), combinazione lineare, la cui esistenza è provata dalle considerazioni sopra svolte, risulterebbe ancora

$$\int_a^b \bar{\theta}(x)\, \bar{\omega}_i(x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j_\nu, \nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Dalla (16) e dalla (17) si dedurrebbe infine

$$\int_a^b \bar{\theta}(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ciò che è impossibile.

5. Per la costruzione di un sistema complementare del sistema (1) interessa, come ben si vede, tener conto soltanto delle funzioni (3), che non soddisfano alla (2), e di cui nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti, non tutti nulli, può ancora soddisfare alla (2). Escludendo via via dal sistema (3) le funzioni, che non godono di queste proprietà, se ne deduce il sistema

$$\varphi_{j_\nu}(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

composto di tutte e sole le funzioni (3) utili alla costruzione del detto sistema complementare.

Diremo che le (18) costituiscono un *sistema fondamentale* per la chiusura del sistema (1).

Dal concetto di *sistema fondamentale* per la chiusura di un sistema non chiuso di funzioni ortogonali e normali scaturisce senz'altro un importante teorema, dovuto al prof. Cipolla [3], contenente una condizione necessaria e sufficiente, affinchè questo ammetta un sistema complementare finito, composto di un determinato numero di funzioni.

6. Resta ora ad assegnare la legge, colla quale via via si determinano le funzioni del *sistema fondamentale* (18), di cui la prima $\varphi_{j_0}(x)$ coincide, come si è detto, colla prima delle funzioni (3), che non soddisfano alla (2).

Ammesso in generale di aver determinato le prime n funzioni (18), se si pone

$$a_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx - \sum_0^\infty{}_k \mathrm{A}_k^{(i)}\,\mathrm{A}_k^{(j)} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots),$$

sarà j_n il più piccolo valore dell'indice $i_\nu > j_{n-1}$, pel quale risulta

$$\begin{vmatrix} a_{j_1,j_1} & a_{j_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_{n-1}} & a_{j_1,i_\nu} \\ a_{j_2,j_1} & a_{j_2,j_2} & \cdots & a_{j_2,j_{n-1}} & a_{j_2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_{n-1},j_1} & a_{j_{n-1},j_2} & \cdots & a_{j_{n-1},j_{n-1}} & a_{j_{n-1},i_\nu} \\ a_{i_\nu,j_1} & a_{i_\nu,j_2} & \cdots & a_{i_\nu,j_{n-1}} & a_{i_\nu,i_\nu} \end{vmatrix} > 0. \tag{19}$$

[3] Cfr. Cipolla, *Sui sistemi di funzioni ortogonali, che ammettono un sistema complementare finito* [Rend. della R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche di Napoli (1915), § 8].

La (19) esprime infatti la condizione necessaria e sufficiente, affinchè la forma quadratica delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_1^{n-1}{}_\mu \sum_1^{n-1}{}_\rho a_{j_\mu, j_\rho} x_\mu x_\rho + 2x_n \sum_1^{n-1}{}_\mu a_{j_\mu, i_\nu} x_\mu + a_{i_\nu, i_\nu} x_n^2$$

sia definita positiva, come si vede osservando che definita positiva è per ipotesi la forma quadratica delle $n-1$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$:

$$\sum_1^{n-1}{}_\mu \sum_1^{n-1}{}_\rho a_{j_\mu, j_\rho} x_\mu x_\rho ,$$

e che pertanto deve aversi

$$\begin{vmatrix} a_{j_1,j_1} & a_{j_1,j_2} \cdots\cdots\cdots & a_{j_1,j_\rho} \\ a_{j_2,j_1} & a_{j_2,j_2} \cdots\cdots\cdots & a_{j_2,j_\rho} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{j_\rho,j_1} & a_{j_\rho,j_2} \cdots\cdots\cdots & a_{j_\rho,j_\rho} \end{vmatrix} > 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, n-1).$$

La determinazione degli indici i_ν ed il calcolo dei coefficienti $a_{i,j}$, possono riuscire più semplici, se in particolare, come sistema (3), si assume un sistema chiuso di funzioni ortogonali e normali.

Fisica. — *Potere emissivo di alcuni metalli ed ossidi* (1). Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal Corrispondente M. Cantone (2).

Mentre per il corpo nero le leggi che governano l'emissione dell'energia raggiante hanno oramai assunto il carattere di leggi teoriche, per i corpi non neri si attraversa ancora la fase puramente empirica, poichè la teoria elettromagnetica ci fornisce qualche indizio circa l'emissione dei corpi speculari e non ci indica nessun elemento per i corpi non conduttori. Il problema si presenta difficile anche dal punto di vista sperimentale per le difficoltà che si incontrano nella determinazione della temperatura e nel confronto col corpo nero.

Coi varî metodi finora seguìti, la determinazione della temperatura non è rigorosa, o per le differenze che si stabiliscono fra l'interno dell'involucro e la superficie emittente (3), o per le incertezze che presenta in generale la pirometria ottica. Il dispositivo da me realizzato presenta il vantaggio di assicurare molto bene la temperatura, poichè la lamina viene riscaldata

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(3) Vanno ricordate in proposito la scatola di Lummer e la spirale di Pirani.

in un involucro a temperatura uniforme, l'inconveniente della radiazione dell'involucro è stato quasi del tutto eliminato per il tipo di ricevitore messo in uso, giacchè le radiazioni provenienti da punti sfocati rispetto alla lente pirometrica influiscono pochissimo sul sistema termometrico ricevente.

Le esperienze furono eseguite con lamine sottili e piane, le quali venivano riscaldate in un forno elettrico, e la temperatura da esse raggiunta si deduceva dalle indicazioni di un elemento Le Chatelier accuratamente graduato (1). Si curò di disporre la saldatura quasi a contatto colla lamina e di mantenere tutto il sistema nella regione del forno dove la temperatura si mantiene abbastanza uniforme. Come ricevitore serviva il cannocchiale pirometrico di Féry colla lente di fluorina (usato col limitatore di circa 5 mm. di diametro) messo nettamente a fuoco rispetto alla lamina, procurando così di eliminare possibilmente i raggi provenienti dalle pareti del forno.

Nel formulare i valori sperimentali riguardanti gli ossidi, ho notato che la funzione empirica di Paschen finora comunemente ammessa

$$(1) \qquad E = kT^n ,$$

dove E indica l'energia irradiata alla temperatura assoluta T e k ed n sono parametri caratteristici della sostanza in esame, non si adatta in alcun modo ai valori da me ottenuti: 1°) perchè gli errori residui abbastanza rilevanti hanno carattere progressivo; 2°) perchè l'esponente n dipende dall'intervallo di temperatura in cui è stato dedotto; 3°) perchè in base alla (1) non si riesce a stabilire una graduatoria per gli ossidi nel loro rapporto al corpo nero. Invece colla funzione da me dedotta

$$(2) \qquad E = \frac{CT^4}{e^{\frac{c}{T}}}$$

dove e è la base dei logaritmi Neperiani, non solo si toglie l'andamento sistematico degli errori, resi peraltro trascurabili, ma i parametri caratteristici della sostanza vengono ridotti ad uno solo, indicato con c, poichè C si mantiene con buona approssimazione costante per tutti gli ossidi (v. tabella I).

Per ciascun ossido furono eseguite tre serie di esperienze in un intervallo di temperature compreso fra 300 e 1100° C., e si ottennero i seguenti risultati:

(1) Kahanowicz, Rendiconti Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, pag. 439; vol. XXVIII, serie 5ª, pag. 73.

TABELLA I.

	Ossido di ferro		Ossido di rame		Ossido di nichel		Platino platinato grigio	
	C	c	C	c	C	c	C	c
	$1{,}32 \times 10^{-10}$	385.0	$1{,}33 \times 10^{-10}$	411.8	$1{,}36 \times 10^{-10}$	492.2	1.33×10^{-10}	621.8
	1,29	369 3	1,34	419.6	1,37	514.7	1,35	640.2
	1,29	387.2	1,37	434.6	1,35	505.3	1.34	603.4
Media:	1.30×10^{-10}	380.5	$1{,}35 \times 10^{-10}$	422,0	$1{,}36 \times 10^{-10}$	504.1	$1{,}34 \times 10^{-10}$	621,8

I valori di E sono espressi in divisioni della scala del galvanometro, inserito nel circuito pirometrico, ammettendo che si verifichi una legge di proporzionalità fra le indicazioni pirometriche e le quantità di energia ricevuta. Questo computo relativo interessa soltanto il parametro C, poichè i valori di c risultano indipendenti dall'unità adottata: essi costituiscono quindi delle caratteristiche assolute dell'ossido a cui si riferiscono. In altri termini, tutti gli ossidi si comportano come corpi grigi, i quali si avvicinano tanto più al corpo nero, quanto più piccola è la c corrispondente; il caso limite di $c = 0$ dovrebbe risultare per il corpo nero: si dedurrebbe allora che la funzione $e^{-\frac{c}{T}}$ rappresenta il potere emissivo relativo.

Orbene, dai valori riportati nella tabella II, i quali sono stati calcolati in base all'espressione $e^{-\frac{c}{T}}$, risulta che: 1) i dati ottenuti per l'ossido di nichel sono in buon accordo con quelli di Foote (1); 2) fra l'emissione dell'ossido di ferro e quella del platino speculare si verifica lo stesso rapporto che si riscontra nelle esperienze di Lummer (2); e siccome i risultati di Foote e di Lummer hanno carattere assoluto, perchè sono stati dedotti dal confronto col corpo nero, ritengo che la considerazione fatta intorno all'esponenziale sia giustificata e che C corrisponda alla costante della legge di Stefan-Boltzmann.

Ho creduto opportuno di estendere lo studio anche al platino platinato grigio (platino coperto di nero di platino e trasformato in grigio nel forno stesso) per vedere il comportamento rispetto alla (2) di una superficie matta per quanto non annerita. L'andamento dei residui prova che anche in questo caso la (2) si adatta abbastanza bene, per cui credo di poter concludere che essa rappresenti in generale l'emissione delle superfici speculari, il che

(1) Bulletin of the Bureau of Standards, vol. II, n. 1, pag. 59.
(2) Verhandlungen der Phys. Ges. Berlin, *17*, 106-111, 189[illegible].

del resto ho avuto occasione di verificare anche nel caso del marmo e dell'amianto.

Per i *metalli* la teoria elettromagnetica ci suggerisce il tipo di funzione

$$(4) \qquad E = \sum_{n=5}^{n=m} kT^n ,$$

dove k è una funzione della resistenza specifica del metallo. Fermandosi al primo termine, Aschkinass deduce $E = f(\gamma_0)\,T^5$, alla quale si adattano bene i valori di Lummer per il platino; Foote (1) estende la funzione fino al secondo termine ed ottiene $E = f(\gamma_0)\,T^5 - \varphi(\gamma_0)\,T^6$, alla quale si adattano abbastanza bene alcune misure da lui eseguite sul platino coi mezzi della pirometria ottica. Per i tre metalli da me rivisti ho ottenuto rispettivamente:

k	n	
$8{,}78 \times 10^{-15}$	5,1	per il platino
54,30	4,9	per l'oro
1,28	5,5	per il nichel fino a 350° C.
1,14	5,5	per il nichel da 380° a 530° C.

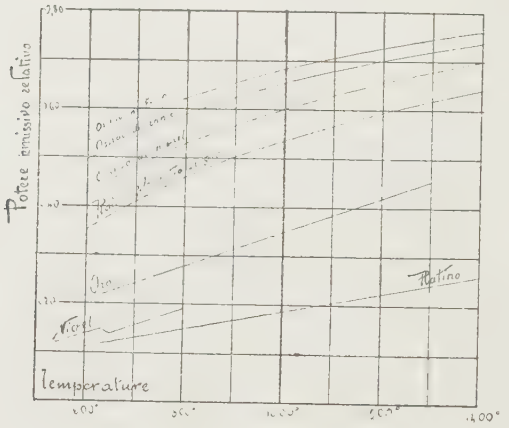
Rilevo particolarmente i risultati per il nichel, dai quali si deduce un cambiamento nella legge di emissione in corrispondenza del punto critico magnetico di questo metallo, dove, come è noto, ha luogo anche un cambiamento nella legge di variazione della resistenza elettrica in funzione della temperatura Il fatto che l'esponente resta inalterato nella trasformazione dimostra che questo metallo si comporta secondo le previsioni teoriche, e l'esponente frazionario indica che la funzione di Foote si adatterebbe meglio. Nondimeno non ho creduto opportuno di spingere oltre la ricerca numerica, perchè le esperienze si riferiscono ad un intervallo di temperatura relativamente breve, notandosi verso i 500° i primi segni di ossidazione.

In base alle considerazioni fatte, si deduce il seguente andamento per il potere emissivo relativo delle sostanze in esame:

(1) Bulletin of the Bureau of Standards, vol. II, n. 4, pag. 607.

TABELLA II.

T	Ossido di Ferro	Ossido di Rame	Ossido di Nichel	Platino platinato grigio	Platino	Oro	T	Nichel
600	0,530	0,495	0,432	0,355	0,111	0,208	540	0,120
700	0,581	0,547	0,487	0,411	0,130	0,243	570	0,130
800	0,622	0,590	0,533	0,460	0,148	0,277	600	0,141
900	0,655	0,626	0,571	0,501	0,167	0,312	630	0,151
1000	0,683	0,656	0,604	0,537	0,185	0,347	650	*0,141*
1100	0,708	0,681	0,632	0,569	0,204	0,381	700	0,158
1200	0,728	0,704	0,657	0,596	0,222	0,416	750	0,175
1300	0,746	0,723	0,679	0,620	0,241	0,451	800	0,193
1400	0,762	0,740	0,698	0,641	0,260	—	—	—



Il metodo adoperato ha bisogno di qualche osservazione. Il riscaldamento prodotto per mezzo di un forno potrebbe alterare i risultati sia per l'energia che deriva dalle pareti e viene riflessa verso il ricevitore dalla lamina emittente, sia per l'energia che arriva al ricevitore direttamente dalle pareti, perchè non è sufficientemente intercettata dal diaframma. La prima parte interessa particolarmente i metalli, perchè dotati di grande potere riflettente. In quanto alla seconda parte è da osservare che per il modo in cui ci si presenta la funzione (2), l'energia estranea, perchè non dovuta alla lamina emittente, si deve ripercuotere integralmente sul valore di C,

il che non altera i risultati finali. Per quel che riguarda l'assorbimento prodotto dalla lente di fluorina, pare che non vi sieno effetti sensibili, nel senso che sono di un ordine di grandezza troppo piccolo per influire in modo apprezzabile sui valori finali del potere emissivo relativo.

Conclusioni. — 1) Gli ossidi si comportano come corpi grigi, la cui emissione segue la legge $E = CT^4 e^{-\frac{c}{T}}$, dove C, a quel che pare, rappresenta, col nostro sistema di misure relative, la costante della legge di Stefan-Boltzmann e c è il parametro caratteristico della sostanza emittente.

2) I metalli seguono una legge di emissione conforme alle deduzioni teoriche di Drude e di Planck fatte in base alla teoria di Maxwell.

Rendo grazie al prof. Cantone per gli innumerevoli aiuti e consigli dei quali mi è stato largo durante questo lavoro.

Chimica. — *L'ossidazione dell'acetil-p-aminoazobenzolo.* (1). Nota di Passerini Mario, presentata dal Socio corrisp. G. Pellizzari (2).

Poichè dalla reazione del *p*-isonitrilazobenzolo con acido peracetico, di cui ho fatto cenno in altra Nota (3), potevano formarsi tanto l'acetil-*p*-aminoazobenzolo quanto i suoi prodotti di ossidazione, ho creduto opportuno studiare l'azione di tale ossidante direttamente sull'acetil-*p*-aminoazobenzolo.

Come è noto (4), quando si sottopone il *p*-aminoazobenzolo in soluzione acetica all'azione dell'acqua ossigenata, l'ossidazione si porta in primo tempo sul gruppo aminico dando luogo a formazione di trisazobenzolo e insistendo nell'ossidazione si giunge al trisazossibenzolo.

Ossidando invece l'acetil-*p*-aminoazobenzolo, ho potuto constatare, come speravo, che il gruppo acetile protegge il gruppo aminico dalla azione ossidante dell'acido peracetico che agisce direttamente e soltanto sul gruppo azoico.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-farmaceutica del R. Istituto superiore di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(3) Gazzetta chimica Italiana, vol. L, parte II, pag. 340.

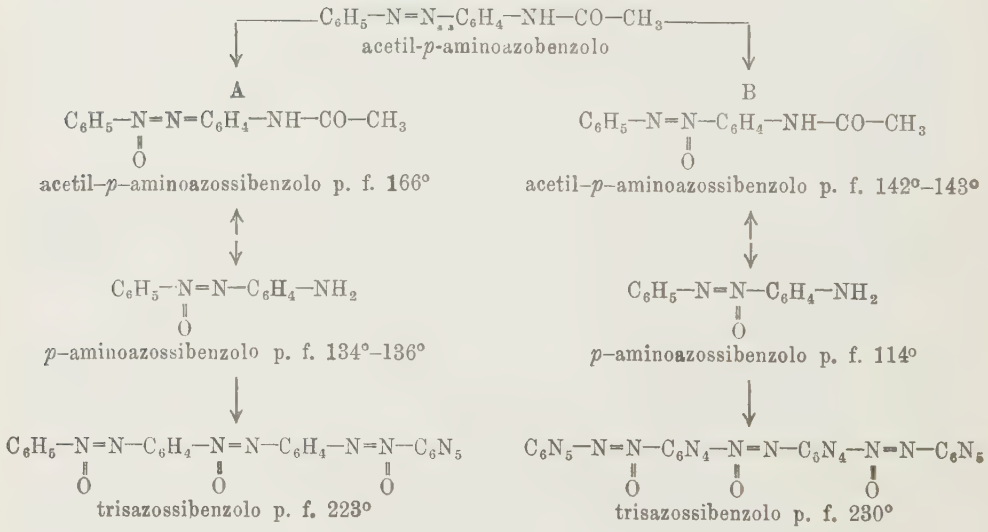
(4) Valori B., Questi Rendiconti, vol. XXIII, 2° sem., pag, 213.

I resultati di queste esperienze costituiscono inoltre una conferma di quanto A. Angeli (1) ha dimostrato circa la struttura degli azossicomposti, poichè ho potuto ottenere le due forme isomeriche dell'acetil-*p*-aminoazossibenzolo.

La separazione dei due derivati acetilici è una operazione assai difficile per cui, dopo aver ottenute due piccole quantità di questi composti puri, ho trovato conveniente saponificare con potassa alcoolica il miscuglio dei due prodotti trasformandoli nei respettivi aminoderivati che si purificano più facilmente: da questi poi per trattamento con anidride acetica tornai agli acetilderivati corrispondenti.

Allo scopo di determinare quale forma fosse da assegnare loro, in luogo dell'azione del bromo o dell'acido nitrico col metodo proposto da A. Angeli (2), sono ricorso ad ossidare i due aminoderivati, trasformandoli nei due trisazossibenzoli isomeri che, delle quattro forme possibili, possono prendere origine da una siffatta ossidazione.

E poichè uno di questi trisazossicomposti corrispondeva esattamente a quello già descritto da A. Angeli (3), rimaneva stabilita per l'altro la seconda forma e di conseguenza venivano pure determinate le forme degli acetili e amino-derivati dai quali questi poliazossicomposti avevano preso origine nel modo che è indicato dal seguente schema.



(1) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., pp. 201-282.
(2) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., pp. 201-282.
(3) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., pag. 356.

A *e* B *acetil-p-aminoazossibenzoli.* — Gr. 5 di acetil-*p*-aminoazobenzolo (1) disciolti in cc. 50 di acido acetico glaciale ed addizionati di cc. 3 di acqua ossigenata (Perhydrol Merk-30 %) furono scaldati a 50°-60° per 5 giorni, aggiungendo ancora acqua ossigenata ogni qualvolta se ne riscontrava difetto nella soluzione.

Per aggiunta di acqua si ottenne un precipitato cristallino giallo verdastro che decolorato in soluzione alcoolica con carbone animale e quindi ripreso con benzolo, fornì una piccola quantità di un composto cristallino in grossi prismetti rifrangenti, poco colorati in giallo chiaro, che furono separati dopo la loro formazione decantando la soluzione benzolica ancor calda. Dopo ripetute cristallizzazioni fondevano a 166° con leggero rammollimento a 160°. Sono assai solubili in etere, alcool e benzolo.

Gr. 0,0782 disseccati a 100° diedero cc. 11 di N alla temperatura di 9° ed alla pressione di 747 mm. N % Trovato 16,74. Calcolato per $C_{14}H_{13}O_2N_3$ — — 16,47.

Per raffreddamento le acque madri benzoliche deposero ancora di questa sostanza, però mescolata ad un altro prodotto in fini aghetti leggeri, quasi incolori, riuniti in masserelle raggiate.

Una piccola porzione di questo secondo composto fu potuta isolare per concentrazione della soluzione benzolica.

Cristallizzata più volte da benzolo fondeva a 142°-143° e nei solventi organici si scioglieva egualmente bene come la precedente sostanza.

Gr. 0,0975 essiccati a 100° diedero cc. 13.8 di N alla temperatura di 11°,5 ed alla pressione di 762 mm. N % Trovato 16,78. Calcolato per $C_{14}H_{13}O_2N_3$ — 16,47.

La mescolanza di questi due composti ha punto di fusione intermedio fra quelli delle due sostanze pure.

A *e* B *p-aminoazossibenzoli.* — Gr. 3 del miscuglio dei due acetil-*p*-aminoazossibenzoli sciolti in poco alcool e bolliti per un'ora con cc. 2 di soluzione alcoolica di potassa al 25 %, per aggiunta di acqua fornirono un precipitato giallo cristallino che, ripreso con benzolo, dopo ripetute cristallizzazioni depose gr. 0,7 di una sostanza giallo-chiaro in aghetti ben formati p. f. 134°-136° assai solubili in benzolo, alcool ed etere solforico.

Gr. 0,1745 disseccati a 100° fornirono gr. 0,4319 di CO_2 e gr. 0,0844 di H_2O.

Gr. 0,0764 diedero cc. 12,7 di N alla temperatura di 9° ed alla pressione di 750 mm. Trovato: C % 67,50 H % 5,42 N % 19,87. Calcolato per $C_{12}H_{11}ON_3$: C % 67,60 H % 5,16 N % 19,72.

(1) All'acetil-p-aminoazobenzolo viene comunemente assegnato un punto di fusione 146°; l'acetile da me impiegato, cristallizzato da alcool fino a punto di fusione costante, fondeva a 157°.

Per trattamento con anidride acetica rigenerò l'acetil-*p*-aminoazossibenzolo p. f. 166°.

Le acque madri benzoliche concentrate fornirono un altro composto che dopo ripetute cristallizzazioni da etere solforico si presentava in laminette giallo-chiare lucenti p. f. 114°. Tale sostanza pesava gr. 1,2.

Da gr. 0,1616 essiccati a 80°-90° si ebbero gr. 0,3989 di CO_2 e gr. 0,0789 di H_2O. Trovato: C % 67,32 H % 5,47. Calcolato per $C_{12}H_{11}ON_3$ C % 67,60 H % 5,16.

L'anidride acetica trasforma questo composto nell'acetil-derivato p. f. 142°-143°.

Nelle acque madri idroalcooliche della saponificazione venne riscontrata la presenza di acido acetico.

Ossidazione dei due aminoazossibenzoli isomeri. — Gr. 0,2 dell'aminoazossibenzolo p. f. 114° sciolto in cc. 2 acido acetico glaciale vennero riscaldati a 60°-70° per cinque giorni con cc. 2 di acqua ossigenata (Perhydrol Merk 30 %).

Il precipitato formatosi, raccolto su filtro e cristallizzato più volte da benzolo si presentava in scagliette lucenti giallo-oro p. f. 230° con decomposizione a 240°.

Gr. 0,0380 essiccati a 100° diedero cc. 6,2 di N alla temperatura di 11° ed alla pressione di 759 mm. N % Trovato 19,58. Calcolato per $C_{24}H_{18}O_3N_6$ — 19,18.

Gr. 0,2 dell'aminoazossibenzolo p. f. 134°-136° ossidato in modo identico a quello ora descritto diedero una sostanza in scagliette lucenti rosso-rame p. f. 223°.

Da gr. 0,0347 si ebbero cc. 5,6 di N alla temperatura di 11°,5 ed alla pressione di 757 mm. N % Trovato 19,29. Calcolato per $C_{24}H_{18}O_3N_6$ — 19,18.

Geologia. — *Su l'età e posizione di alcuni scisti delle Alpi.* Nota di Michele Gortani e Paolo Vinassa de Regny, presentata dal Socio T. Taramelli (1).

Nel corso dei nostri rilevamenti nelle Alpi Carniche ci siamo venuti formando la convinzione, basata su documenti paleontologici e osservazioni in sito, che la grande massa scistosa dell'alta Carnia sia neocarbonifera (2) e trasgressiva sui terreni siluriani e devoniani curvati nella piegatura varisca.

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) Ciò non toglie che vi possano essere qua e là piccoli lembi di Carbonifero più antico; che cioè la trasgressione si sia localmente iniziata nell'Eocarbonico superiore o nel Mesocarbonico.

Estendendo le nostre indagini, abbiamo riconosciuto la stessa età e posizione alle masse scistose dell'alto Comelico e delle Caravanche occidentali: e, non ostante il metamorfismo ed il più fitto ripiegamento, ci si sono dimostrati carboniferi e trasgressivi anche gli scisti del versante settentrionale delle Carniche.

Nell'ultima campagna geologica, grazie alla possibilità di fare nuove accurate ricerche nella val della Gaila, abbiamo constatato che fanno parte della formazione carbonifera trasgressiva anche filladi quarzose e scisti filladici già ritenuti cambriani o più antichi dai precedenti rilevatori. Il notevole metamorfismo di cotesti scisti non può far meraviglia, anche se confrontato con la facies normale di scisti carboniferi non lontani, quando si ponga mente al metamorfismo intenso dei contigui calcari devoniani e siluriani, anche a brevissima distanza da calcari delle stesse età, zeppi di fossili ben conservati (1).

Filladi e scisti filladici di aspetto analogo a quelli della val Gaila, e anche di posizione, per quanto ci sembra, non dissimile, ricorrono nelle contigue catene delle Alpi Orientali, dalla Carniola e dalla Stiria per la Carinzia al Tirolo e Trentino, dove hanno amplissima diffusione e d'onde si estendono ancora nelle Alpi Centrali e Occidentali.

È generale, dove non siano intervenuti speciali disturbi tettonici, la posizione di tali scisti al di sotto della formazione eopermica (detta, nelle Alpi Orientali, « di Val Gardena »); ma la loro giacitura trasgressiva sulle rocce del Paleozoico antico non fu sinora riconosciuta dagli autori che li hanno studiati. Spesse volte (e questo è anzi generale in tutta la regione a occidente delle Carniche), non furono neppure riconosciute nè supposte le formazioni silurico-devoniche, sia per il loro intenso metamorfismo, sia per aver gli autori cominciato il loro studio nelle regioni di metamorfismo intenso anzichè da quelle ove la serie non ha subìto modificazioni profonde.

Le nostre escursioni in varî punti delle Alpi ci fanno invece pensare che il Paleozoico carnico, per serie di terreni e per motivo tettonico, possa essere meno isolato di quanto si è finora ritenuto; e che in particolare la trasgressione carbonifera possa avere una importanza finora insospettata nella geologia alpina.

Accenniamo ad esempio alle formazioni scistose connesse con rocce eruttive, di età paleozoica a tutt'oggi indeterminata, sviluppate fin nelle propaggini orientali delle Alpi Giulie e delle Caravanche, che il Teller ha bene descritte e delle quali è già stata rilevata la perfetta analogia con le consimili formazioni della Carnia (da noi dimostrate carbonifere); accen-

(1) Metamorfosati in filladi analoghe a quelle ora accennate si presentano del resto anche gli scisti circostanti alla Pietrabianca, al Peralba, all'Avanza ecc. nelle Carniche occidentali: scisti che abbiamo dimostrato carboniferi in base alle loro condizioni di giacitura e di posizione.

niamo agli scisti e ai calcari metamorfici della Pusteria, specie dopo gli studî della Furlani, e delle Alpi della Gaila, specie dopo gli accurati studî del Geyer; accenniamo agli scisti filladici coperti dai porfidi quarziferi eopermici del Trentino e dell'alto Adige. Ci vien pure fatto di pensare agli scisti di Rendena nel gruppo dell'Adamello ripetutamente descritti dal Salomon, e alle filladi delle Alpi di Recoaro e della zona fra Bellano e Varenna, ecc.; anche presso Lugano il Gümbel segnalò a suo tempo filladi con conglomerati a *Calamites* passanti alla formazione permiana con arenarie di Val Gardena e porfidi. Il Suess intuì carboniferi i noti « scisti di Casanna » del Theobald, ed essi sembrano veramente tali leggendo la descrizione del Paulcke.

Non intendiamo di fare con ciò affermazioni nè generalizzazioni, nè tanto meno di risolvere problemi geologici di cui non ci dissimuliamo la difficoltà e l'importanza; ma soltanto accennarne alcuni, a cui più facilmente corre il pensiero, indicando una possibile via di soluzione.

Mentre da ogni parte ferve la ricerca di interpretazioni nuove e sempre più ardite, noi pensiamo che possa giovare trar partito dal progresso degli studî per riesaminare al lume delle attuali conoscenze le osservazioni e le idee dei geologi della passata generazione.

Vulcanologia. — *Di un solfuro di ferro delle fumarole sottomarine di Vulcano* (*Isole Eolie*) *formatosi nel 1916*. Nota di O. De Fiore, presentata dal Corrisp. F. Millosevich [1].

In una precedente pubblicazione [2] ho reso noto come nel 1916, presso il Faraglione di Levante, nel luogo indicato comunemente col nome di « Acqua calda », in riva al mare e proseguendo verso nord, fra le roccie, nelle quali il mare si insinuava e batteva, v'era una piccola distesa d'acque marine nere. Il colore era dovuto ad una sostanza in sospensione, della quale m'occuperò più tardi. Presso il luogo ove nel 1913 [3] furono eseguite le ri-

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

[2] De Fiore O., *I fenomeni avvenuti a Vulcano* (*Isole Eolie*) *nel 1916*. Soc. Sism. Ital., XXII, 1919. La Nota in questione fa parte d'una serie di pubblicazioni dei risultati raccolti in occasione d'una Missione Governativa per lo studio dell'attività dei vulcani siciliani nel 1916. Fin'ora è stato pubblicato quanto segue: De Fiore O., *I terremoti di Filicudi* (*Isole Eolie*) *nel 1916*. Soc. Geogr. tIal., 1917, fol. 4-5, Roma; De Fiore O., *Le eruzioni radiali storiche di Stromboli*. Soc. Geogr. Ital., 1919, 431-45, Roma; De Fiore O., *I fenomeni eruttivi, sismici e pseudo-vulcanici avvenuti all'Etna nel 1916*. Soc. Sism. Ital. XXI. Risultati generali si trovano in Riccò A., Platania, G°; Platania, G¹; De Fiore O., *Sul recente risveglio dei vulcani attivi Etna, Stromboli, Vulcano*. Soc. Sism. Ital., XXI, 1917-18.

[3] De Fiore O., *I fenomeni avvenuti a Vulcano dal 1890 al 1913*. Rivista Vulcanologica, I, 57-73; II, 12-66, 1914-15, Berlino.

cerche sulla variazione di livello e temperatura delle sorgenti termali, che ivi sgorgano fra le sabbie, sulla battigia v'era un violento gorgoglìo prodotto da una fumarola che assumeva l'aspetto di un minuscolo geyser in perenne attività. La temperatura, misurata con un pirometro elettrico era di 104,0 + X, 11 e. Nelle due vaschette suddette, l'acqua era limpida, se lasciata in calma. I gas che vi gorgogliavano erano: CO_2, H_2S, SO_2 con reazioni forti e spiccate. Le vicine acque del mare limpido, trattate con una soluzione di acetato di piombo alcalinizzata, davano un precipitato bianco; CO_2 esisteva in debole quantità; SO_2 era sicuramente assente. Le acque nere, di cui sopra, davano le stesse reazioni, se filtrate: in caso contrario, con acetato di piombo alcalinizzato davano un precipitato nero per la presenza di H_2S. Lungo la spiaggia, sulla battigia e poco più su, verso l'entroterra, sulla stretta linea sabbiosa che finisce alle prime roccie, le esalazioni emanavano dalle sabbie e su queste deponevasi dello zolfo, che avrebbe potuto essere abbondante, se le onde non avessero, tratto tratto, spazzata la spiaggia. Attorno alla zona a zolfo v'era la solita zona a solfati: venivano emessi H_2O, CO_2, H_2S ed SO_2 in piccola quantità. La temperatura della fumarola esaminata era di 100°,0, ma in un punto delle sabbie saliva fino a 100°,5. Queste erano le condizioni dell'ambiente nel quale si formava la sostanza nera che intorbidava il mare. Per raccoglierla disposi una serie di bottiglie a collo largo e di larghi bicchieri di vetro, che collocai in un luogo ad una certa distanza dalle fumarole più attive, per sottrarle all'azione dei gas emessi da queste ed all'azione della loro temperatura. In questi recipienti versavo l'acqua del mare raccolta con secchi di legno, preventivamente lavati accuratamente con l'acqua stessa del mare. Quando la sostanza nera s'era depositata in fondo ai recipienti, aspiravo l'acqua marina limpida, lasciandone solo qualche centimetro per proteggere la sostanza nera e versavo nel recipiente nuova acqua nera. L'operazione era proseguita senza interruzione allorquando io ero nei dintorni immediati del Faraglione e sospesa solo quando ero sul cratere od in mare. In una settimana di decantazioni effettive, da oltre 300 litri d'acqua marina raccolsi alcuni grammi della sostanza nera, che conservai in bottiglia a t.s. e paraffinata. Nel 1917 eseguii una prima analisi (I) della sostanza, nell'Istituto di chimica della R. Università di Roma ed al sen. Paternò rivolgo qui le mie vivissime grazie, come anche al prof. Bellucci pei consigli che spesso mi diede durante queste ed altre ricerche. Una seconda analisi, di controllo, fu eseguita nel 1920 all'Istituto Vulcanologico di Napoli, dal mio collega dott. Jakob (II). Aggiungo che mentre io mi limitai alla sola determinazione del ferro e dello zolfo, spingendo l'analisi fino alla terza decimale, il dott. Jakob determinò anche il manganese (che quasi sempre accompagna i minerali di ferro) e condusse l'analisi fino alla quarta decimale. I risultati sono sufficientemente concordanti ove si consideri la grande impurezza della sostanza e la probabile va-

riazione, benchè lieve, di composizione, che deve presentare la massa analizzata. Della sostanza esiste ancora piccola quantità: una porzione di questa è stata da me donata al Museo mineralogico della R. Università di Roma.

La sostanza presentasi come una impalpabile polvere grigio-bruna, di aspetto sub-metallico, quando è in massa. Si vede chiaramente che è inquinata da sabbia marina. Non fu eseguita alcuna analisi delle acque marine, per le ragioni che esporrò più tardi. Del resto, è facile intuire quali siano le sostanze che, trovandosi disciolte in questa, possono avere partecipato alla formazione del deposito nero.

L'analisi del materiale purificato ha dato i risultati che seguono:

	I	II
S	0,100	0,1001
Fe	0,166	0,1675
Mn	nd.	tr.

che possiamo porre sotto: S:Fe::1,04:1,00. L'eccesso di zolfo può spiegarsi o colla difficoltà di separare tutto lo zolfo in una sostanza così poco pura o piuttosto col fatto che S libero si trovava in sospensione nelle acque marine. Infatti, come ho già detto nella Nota citata, presso il Faraglione, in mare si notava dello zolfo tenuto in sospensione nell'acqua, in minutissime particelle d'aspetto fioccoso.

Il solfuro in questione non può essere riferito ad una forma mineralogica definita. Per la sua composizione, tanto se assumiamo il rapporto 1,04::1,00, quanto quello 1,00::1,00 (tenendo conto delle osservazioni già fatte sulla probabile origine dell'eccesso dello zolfo), possiamo ritenerlo un solfuro di ferro, corrispondente alla forma mineralogicamente definita della Pirrotina. Osservo, a proposito del rapporto 1,04::1,00, che credo che in taluni casi la formula della Pirrotina possa essere realmente $Fe_n S_{n+1}$, la quale si avvicinerebbe molto di più al rapporto stabilito per l'amorfa sostanza di Vulcano.

Credo utili alcune osservazioni sulla giacitura e genesi di questo solfuro di ferro, specialmente perchè le fumarole sottomarine sono state rarissimamente studiate e poco conosciamo delle loro funzioni. Nel tratto di mare, dove fu raccolta la sostanza esistevano delle fumarole sottomarine (vedi Nota citata) ad H_2S, CO_2. Al largo, dove le acque non venivano a contatto con la spiaggia, l'H_2S ossidandosi produceva zolfo, il quale si trovava in forma di esili filamenti fioccosi, come ho già detto, conferendo un aspetto lattiginoso al mare. Ho già osservato, in altro mio studio, « che non è improbabile che a seconda se è mescolata all'aria, all'acqua ed a seconda dei varî modi coi quali è emessa, l'SO_2 dà reazioni variate e complicatissime ed è difficile, per tutto ciò, stabilire se molti dei gas solforosi provengono dal magma o da varie reazioni successive. La produzione di H_2S è dovuta a

reazioni perturbatrici ed avviene specialmente in presenza di molta acqua. In tali condizioni non credo che possa esistere SO_2 almeno in quantità rilevante: ciò spiega perchè le fumarole sottomarine e quelle dei Faraglioni che si svolgono in un suolo impregnato di acqua siano ad H_2S. Questo gas proviene evidentemente da reazioni dell'SO_2 coll'acqua marina o libera o infiltratasi nelle rocce permeabili e porose ». Le ricerche del 1916 confermano tal modo di vedere. L'H_2S che trovasi nel mare può provenire da una trasformazione dell'SO_2 in presenza dell'acqua marina: lo spessore di questa fa sì che non giunga SO_2 alla superficie e che la trasformazione in H_2S sia completa. Questo modo di vedere è pienamente confermato dal fatto che mentre SO_2 era sicuramente assente nelle acque del mare, lo stesso SO_2 gorgogliava nelle vaschette scavate sulla spiaggia, appunto perchè era resa impossibile, con un piccolo spessore di acqua, la trasformazione completa in H_2S. Qualunque sia la provenienza, diretta o da trasformazione di SO_2, l'H_2S gorgogliando nelle acque di mare, fredde, si ossida in quelle condizioni e dà quell'S fioccoso al quale ho già accennato varie volte. Questo tipo di fumarola sottomarina di Vulcano si potrebbe chiamare « di mare (relativamente) profondo ».

Sulla spiaggia erano attive le fumarole con H_2O, H_2S, SO_2, CO_2 producenti solfati e zolfo. Le roccie sono profondamente alterate per secolari azioni chimiche, che hanno trasformato il massiccio del Faraglione di Levante in uno straordinario giacimento di allumi, comuni e rari. Naturalmente, questi allumi, di produzione antica o recente o contemporanea, venivano disciolti dalle acque marine, spesso tiepide, come ho già descritto nella Nota citata. Allora si verificavano le condizioni seguenti: sviluppo di H_2S gorgogliante in un'acqua contenente in soluzioni degli allumi. Quelli che possono avere concorso alla formazione del solfuro di ferro delle acque marine sono la Coquimbite, l'Alotrichite, la Millosevichite, la Pisanite, la Voltaite e la Metavoltina, che certamente sono disciolti nelle acque marine battenti il Faraglione.

Ho già detto che non è stata fatta alcuna analisi delle acque del mare e ciò appunto perchè è intuitiva, in quel luogo, la presenza di soluzioni di tutti i solfati esistenti al Faraglione e sulla spiaggia. Intorno a questi ed alla loro giacitura ed aggruppamenti, rimando al mio studio del 1913. Procedendo per esclusione, possiamo senz'altro supporre che il FeS del quale ci occupiamo provenga da reazioni avvenute fra i solfati di ferro disciolti nell'acqua marina e l'H_2S delle fumarole.

Questa sembrami essere la genesi più naturale e semplice del solfuro di ferro: dall'azione di H_2S (di produzione diretta o da trasformazione di SO_2) gorgogliante in acque marine contenenti in soluzione solfati di ferro.

La differenza fra queste fumarole e quelle che ho dette « di mare profondo » consiste nel fatto che esse si aprono in spessori lievi di acque, che

si riscaldano con facilità (io misurai fino a 60° fra le roccie) che contengono allumi in soluzione e zolfo in sospensione, distaccati dalle roccie. Le temperature variano continuamente per azione del moto ondoso e con esse variano le condizioni di formazioni di H_2S, di S per ossidazione di quello e degli altri prodotti per azione del primo sugli allumi soluti. Queste fumarole potrebbero chiamarsi « di spiaggia » o « di mare poco profondo ». Noterò che in esse prosperano numerose alghe, raccolte da me e studiate dal Forti.

Biologia. — *Temperatura e migrazioni verticali delle uova di Teleostei* (1). Nota del dott. Ettore Remotti, presentata dal Socio B. Grassi (2).

È noto come le uova di Teleostei si rinvengano tanto alla superficie quanto al fondo del mare, come in istrati più o meno lontani dal pelo d'acqua.

La ragione per cui uova incapaci di mantenersi in superficie, possono trovarsi, invece, sospese in istrati più o meno profondi, devesi ricercare nella compressibilità dell'acqua marina, in conseguenza della quale il peso specifico aumenta col crescere della pressione e questa leggera ma crescente variazione di densità, può finire col mantenere sospeso l'uovo che nello strato superiore accennava ancora ad immergersi.

Ad accrescere la densità dell'acqua di mare, negli strati inferiori, concorre la temperatura, la quale diventa, specialmente nelle stagioni calde, sempre più bassa dalla superficie in giù.

Nel considerare l'azione termica, come fattore determinante la sospensione delle uova in istrati più o meno profondi, non si tenne mai conto dell'effetto che le variazioni di essa producono sull'uovo stesso.

Huxley attribuiva alla temperatura una grande influenza sulla quantità di uova che potevano trovarsi a galla. In generale, poi, si ammetteva che tanto il raffreddamento quanto la compressibilità dell'acqua concorressero, aumentando il peso specifico degli strati inferiori, a frenare ed a sospendere l'uovo nella discesa; mentre alcune esperienze che ora esporremo, e che verranno ampiamente svolte in una Memoria a parte, ci porterebbero ad affermare che: *la diminuzione di temperatura concorre all'immersione delle uova.*

Poniamo, intanto, l'uovo in un lungo tubo pieno di acqua marina *portata* all'esatta densità dell'uovo stesso ed alla temperatura ambiente; in tal modo l'uovo resta in equilibrio a qualsiasi livello scelto, non accennando

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto centrale di Biologia marina in Messina diretto da L. Sanzo.

(2) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

spostamento alcuno lungo la verticale. Ma una piccola variazione di peso specifico del liquido, basta per rompere la quiete e spingere l'uovo ad immergersi od a raggiungere la superficie dell'acqua.

Se poniamo, ora, il tubo in un liquido a temperatura costante, ma *inferiore* a quella dell'ambiente, vediamo l'uovo perdere l'equilibrio ed immergersi a poco a poco.

Quest'immersione, che potrebbe attribuirsi a correnti determinate in seno al liquido da fenomeni convettivi, sarebbe, invece, dovuta ad una vera modificazione di densità subìta dall'uovo in seguito alla diminuita temperatura.

Già *a priori* potremmo escludere l'azione convettiva poichè questa dovrebbe manifestarsi, durante il raffreddamento del liquido, con moto discendente lungo la parete del tubo — prima a raffreddarsi — e al moto discendente farebbe riscontro una corrente di compensazione ascendente delle particelle liquide più centrali del tubo stesso. Quindi, se convettive fossero le cause del movimento dell'uovo, questo discenderebbe lungo i fianchi del tubo e risalirebbe verso il centro. Ebbene, ciò non si verifica, qualunque sia la distanza dell'uovo dall'asse del tubo. Ma la certezza ci viene data dall'esperimento in cui con l'esclusione di qualsiasi movimento delle particelle del liquido, contenuto nel tubo, l'approfondimento dell'uovo si verifica ugualmente col diminuire della temperatura.

Poniamo in due tubi, uguali e tersi, l'acqua tolta da un recipiente più capace, nel quale l'uovo, a temperatura normale, aveva raggiunto l'equilibrio. Questi tubi vengono, poi, immersi in un liquido a temperatura inferiore. Se in uno di essi lasciamo cadere polvere di licopodio ed attendiamo fino a che siano spenti tutti i movimenti dell'acqua percettibili mediante i corpuscoli in sospensione, è da supporre che anche nell'altro tubo, avente forma, capacità e condizioni fisiche uguali, si ristabilisca la quiete. Prendiamo, ora, mediante una pipetta, l'uovo, in equilibrio nel recipiente grande a temperatura normale, e poniamolo nel secondo tubo: dopo una leggera esitazione, durante la quale l'uovo sembra voglia risalire, esso finisce, anche in questa esperienza, col dirigersi al fondo.

Per la diminuita temperatura, l'acqua è aumentata di densità e dovrebbe spingere l'uovo in alto; e così in effetto, sarebbe avvenuto, se questo non avesse subìto alcuna modificazione, mentre, dal suo modo di comportarsi, dobbiamo ammettere non solo che l'uovo aumenti di peso specifico, ma che l'aumento sia tale da superare l'incremento di densità dell'acqua.

Potremmo esprimerci col dire che l'uovo possiede un *coefficiente di dilatazione cubica superiore a quello dell'acqua marina.*

La ragione per la quale, dopo un rapido abbassamento di temperatura, la pesca delle uova in superficie è poco rimunerativa, si potrebbe benissimo attribuire a questo fenomeno.

Possiamo ora domandarci: le uova galleggianti, una volta raggiunta e superata la densità dello strato superficiale, dovranno continuare sempre più ad immergersi col diminuire della temperatura?

Se la diminuzione procede continua — e sempre che il coefficiente di dilatazione termica dell'uovo resti superiore a quello dell'acqua marina col variare della pressione — è chiaro come ciò dovrebbe propriamente accadere; e nel Mediterraneo, dove si verifica un simile andamento termico fino a 250 metri di profondità, l'uovo, iniziata l'immersione, verrebbe sollecitato a superare quel limite; oltre il quale subentra l'eterno tepore di 13° circa e non è più possibile alcuna variazione di peso specifico, dovuta ad effetto termico. Ma non cessa, con ciò, di manifestarsi la compressione, la quale, crescendo via via con la potenza degli strati, accompagna l'acqua fino all'estremo fondo del bacino, aumentandone progressivamente la densità.

Se l'uovo può trovare l'equilibrio negli strati inferiori, dovrà attribuirsi esclusivamente a questo secondo fattore.

Ora sarebbe anche facile comprendere in qual maniera l'uovo, emesso a profondità, giunga in superficie: basta che al momento dell'emissione presenti una densità lievemente inferiore a quella dell'ambiente, per iniziare il movimento di ascesa.

Ma, diminuendo la densità degli strati sovrastanti, in funzione della temperatura, il piccolo incremento citato finirebbe coll'esaurirsi, ed il movimento di ascesa coll'arrestarsi se l'uovo non rispondesse con un maggior aumento di volume, in virtù del suo più grande coefficiente di dilatazione termica. La densità dell'ambiente di emissione darebbe, per così dire, la spinta iniziale e il resto del movimento si compirebbe per una funzione della temperatura.

Nelle condizioni ideali, dunque, le uova verrebbero sollecitate non solo ad immergersi, ma anche ad emergere, ed allorchè vengono pescate nel primo strato del nostro mare, bisognerebbe considerarle in moto per raggiungere la superficie o la profondità oltre i 250 metri. Occorre, però, tener presente che l'incontro di correnti o strati più caldi o più freddi, turbando le condizioni di una progressiva diminuzione di temperatura, può creare delle barriere di arresto o d'imprigionamento delle uova.

Nei mari freddi, dove in certe stagioni la temperatura cresce con la profondità, si avrebbe uno spostamento verticale delle uova in senso contrario a quello dei nostri mari, e verrebbe favorita la sospensione di esse alla superficie. Tali condizioni potrebbero trovare una certa relazione con la pescosità dei mari nordici.

Quanto abbiamo detto venne osservato a pressione normale, mentre l'uovo, nelle sue migrazioni verticali, è soggetto a pressioni varie e di intensità non trascurabili; onde giustamente sorge il dubbio che al variare delle con-

dizioni fisiche di ambiente, possa variare di valore il suo coefficiente di dilatazione cubica.

Le esperienze che abbiamo in corso su questo riguardo potranno fare luce sull'argomento. Intanto possiamo affermare che il coefficiente di dilatazione termica dell'acqua marina, cresce col crescere della pressione [1] e, precisamente in un mare a salinità 37 $^{0}/_{00}$ e fra 2° e 24°, occorre scendere oltre 3000 metri, per trovare un aumento nel sopradetto coefficiente pari a $\times 10^{-6}$.

Se anche l'uovo presenti un analogo comportamento — nel quale caso il fenomeno descritto a pressione normale, lungi dall'essere scosso, verrebbe esagerato — sarà detto in una prossima Memoria.

Fisiologia comparata. — *Sull'influenza della nutrizione con tessuti iodati d'Invertebrati sulle larve di Bufo vulgaris* [2]. Nota del dott. Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi [3].

In ricerche precedenti ho studiato l'influenza che nutrizioni costituite da diversi organismi, lontani nella posizione sistematica, hanno nell'accrescimento e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri. Con la presente Nota mi limito a riferire qualche risultato ottenuto finora dando come nutrizione tessuti iodati d'Invertebrati a larve di *Bufo vulgaris*.

Fin dal mio primo lavoro sull'argomento (1913) io espressi il proposito di sperimentare l'azione dell'iodio sui girini, per spiegare l'influenza chimica della nutrizione con tiroide: i miei esperimenti, eseguiti fin dal 1913, furono però tutti negativi; le esperienze con iodo-gelatina Sclavo resa più consistente con agar, l'alimentazione con alghe marine del golfo di Napoli che contengono naturalmente iodio, mi dettero risultati poco apprezzabili. Non ho mai creduto riferire questi esperimenti infruttuosi, che dovetti poi interrompere a causa della guerra. Ho visto, in seguito, che altri ricercatori (Giacomini e altri) facendo i miei medesimi esperimenti non ebbero risultati molto dissimili. Soltanto a Giacomini parve nel 1914 di rilevare che la iodo-gelatina esercitasse una lieve azione acceleratrice, che naturalmente non poteva paragonarsi all'influenza ben più intensa esplicata dalla nutrizione con tiroide.

Risultati ben più fortunati si sono avuti seguendo altra via.

Giacomini comunicò nel 1918 che un'alimentazione fatta con milza iodata di agnello, produceva negli Anfibi Anuri una rapida metamorfosi sì

(1) Bjerknes, *Dynamic Meteorology and Hydrografie*, Washington, 1910.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

(3) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

da ottenere un effetto analogo a quello della tiroide e antagonista a quello della milza non iodata; giacchè è noto che la milza come il timo ostacola la metamorfosi. Con più recenti e estese ricerche Giacomini (1) ha dimostrato come molti tessuti e organi di agnello sottoposti a un trattamento iodato manifestano la medesima influenza acceleratrice esercitata dalla tiroide: i varî organi e tessuti mostrano tuttavia un comportamento differente circa la rapidità dell'influenza acceleratrice: il cervello iodato agisce assai lentamente, e il grasso d'agnello iodato ha dato risultati negativi; il cuore iodato (muscolo cardiaco) manifesta un'azione molto più rapida della carne iodata (muscoli scheletrici).

Merita di essere ricordato, per chiarire l'impostazione delle presenti ricerche, che esperienze con alghe iodate dettero al Giacomini risultati sempre negativi. Anche esperienze con alghe marine contenenti iodio (Morse) furono negative. È stato ricordato, in proposito, che l'iodio può trovarsi in tali casi combinato in forma inorganica.

I risultati finora ottenuti sui tessuti iodati si riferiscono, per quanto io sappia, soltanto a tessuti e organi di Vertebrati; di organismi cioè nei quali c'è un organo, la tiroide, dove l'iodio si deposita in notevole quantità, e nei quali l'iodio può trovarsi anche in altri organi. Si sa pure che in alcuni organismi marini (Invertebrati) è stata notata la presenza dell'iodio. Ma in quale forma l'iodio può combinarsi con le sostanze proteiche degli Invertebrati? Sono attive queste possibili combinazioni iodate degli Invertebrati sullo sviluppo di quegli organismi (Vertebrati) dove c'è un organo, la tiroide, che esplica tanta influenza sullo sviluppo, influenza che viene appunto riferita all'iodio in combinazione organica?

Ho cominciato le mie esperienze in proposito con musculatura iodata di Crostacei e di Molluschi seguendo il procedimento tecnico fatto conoscere dal Giacomini. Per i Crostacei ho scelto la *Squilla mantis* (2), per i Molluschi, le Telline (*Donax venustus*). Piccoli pezzetti di musculatura della Squilla e piccoli pezzetti del piede (ricco di musculatura) delle Telline venivano messi nella seguente soluzione iodo-iodurata:

Ioduro di potassio	grammi	2
Iodio	»	1
Acqua	»	100

I tessuti venivano tenuti per 24 ore (e anche più) in questa soluzione, la quale rapidamente si decolorava, e questo mi dimostrava che i detti tes-

(1) Giacomini E., *Ulteriori esperimenti di nutrizione di girini di Rana con diversi organi e tessuti iodati.* Rendiconti R. Accademia Scienze di Bologna, seduta del 25 maggio 1919-1920.

(2) Ho sperimentato anche con il *Peneus caramote.*

suti sottraevano iodio alla soluzione (e pertanto conviene rinnovare la soluzione iodo-iodurata). Dopo un lavaggio in acqua si somministravano questi pezzetti iodati a lotti separati di larve di *Bufo vulgaris* che presentavano appena un lieve accenno degli arti posteriori. Ho preferito sperimentare con temperatura abbastanza elevata (25°-26°), risultando da mie precedenti ricerche che in tal modo si favorisce di molto l'azione acceleratrice della tiroide. Ho osservato che i girini mangiavano i pezzettini di musculatura che ad essi somministravo.

Dopo pochi giorni di tale trattamento mi sono accorto che in entrambi i lotti, e in tutti gli esemplari in esperimento, si manifestava l'azione acceleratrice dell'iodio, così come risultava dalle esperienze di Giacomini con i tessuti iodati di Vertebrati. Questo acceleramento nei processi differenziativi diventava più accentuato nei giorni successivi. Con nutrizione fatta con piede (musculatura) iodato di Tellina ho ottenuto una notevole atrofia della coda, acceleramento nella differenziazione degli arti, emissione dell'arto anteriore sinistro, e notevoli trasformazioni dell'apparato digerente: nello stesso tempo l'acceleramento si è dimostrato meno rapido nel lotto nutrito con musculatura iodata di *Squilla mantis* (1).

Ne concludo che in linea generale le sostanze proteiche iodate degli Invertebrati agiscono come le sostanze proteiche iodate dei Vertebrati, ricordando cioè l'effetto manifestato della tiroide: più estese ricerche sono tuttavia necessarie per accertare la possibile differente influenza acceleratrice fra sostanze proteiche iodate di differenti gruppi di Invertebrati.

(1) Questo minore acceleramento avuto con la *Squilla mantis* viene riferito per fedeltà espositiva, ma non se ne può trarre ancora nessuna conclusione.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Mineralogia. — *Sulla presenza della nesquehonite nelle cave d'amianto di Franscia in Val Lanterna.* Nota del Socio Ettore Artini [1].

Durante un'escursione fatta nello scorso agosto alle cave di amianto di Val Lanterna (Val Malenco), in compagnia dell'amico signor Pietro Sigismund, noto collezionista e conoscitore dei minerali di Valtellina, abbiamo potuto osservare come la roccia peridotitica più o meno serpentinizzata che forma la matrice dell'amianto sia qua e là chiazzata da patine biancastre; ma queste di solito hanno l'aspetto di sostanza farinosa, decomposta, tale da non incoraggiar punto ad uno studio che se ne prefigga la determinazione precisa. Solo in una località, sulla volta e sulle pareti interne della prima cava a sinistra che incontra chi sale da Tornadri, quasi in faccia al così detto « Ristoro » di Franscia, il signor Sigismund notò alcune incrostazioni di un bel bianco candido e di aspetto freschissimo, che con molta pazienza, e non senza fatica, riuscì a staccare, insieme a frammenti della roccia. In altra escursione poi, fatta più tardi, dietro mia preghiera, egli potè raccogliere un materiale anche più vasto, che pure mise gentilmente a mia disposizione.

Il minerale forma sulla roccia serpentinosa delle crostine bianche, concrezionate, con tendenza a forme mammellonari o botrioidali minute, di spessore vario, per lo più esile, ma che non di rado raggiunge due e anche

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1921.

tre millimetri; la struttura è evidentemente cristallina, bacillare-raggiata; i singoli individui, che qualche volta sporgono dalla superficie, come prismetti isolati, senza tuttavia raggiungere mai la perfezione di cristallini misurabili, sono incolori e trasparenti, o translucidi; la lucentezza è piuttosto vitrea che sericea. Sopra le più grosse croste cristalline si osservano poi esili ciuffetti o sferoliti, a struttura fibroso-raggiata assai più fina, che spiccano per la loro bianchezza, più nivea ed opaca; qua e là si notano tuttavia passaggi graduali dall'uno all'altro tipo di sostanza. Nell'insieme, l'aspetto e la struttura ricordano alquanto quelli di certe aragoniti concrezionate.

L'analisi qualitativa, condotta sopra la sostanza a struttura bacillare, accuratamente liberata dai grumetti bianchi opachi (dalla rocccia sottostante le crostine più grosse si staccano anche troppo facilmente), mi ha rivelato la presenza di MgO, CO_2, H_2O, senza apprezzabili quantità di altre sostanze. Il materiale per l'analisi quantitativa fu facile a procurare, purissimo, in due porzioni di circa 20 cgr. l'una. Sulla prima di esse determinai anzitutto la perdita di H_2O a 135°; poi la perdita totale di H_2O — CO_2 alla calcinazione; nel residuo, sciolto in HCl diluito, e precipitato secondo le regole con fosfato sodico-ammonico, dosai MgO. L'altra porzione mi permise di determinare H_2O totale, col metodo del tubo Brush-Penfield; metodo il quale sarà forse, teoricamente, meno preciso di quello classico del tubo a combustione, ma che in questi casi ritengo in pratica preferibile, perchè più semplice e rapido, meno soggetto a incidenti spiacevoli, e sufficientemente esatto (1).

I risultati ottenuti sono i seguenti (I), posti a confronto con quelli (II) teorici calcolati (2) per la nesquehonite $Mg\,CO_3 . 3H_2O$:

	I	II
MgO	29.14	29.14
CO_2	31.90	31.80
H_2O	39.51	39.06
	100.55	100.00

(1) Due prove preliminari fatte su 20 cgr. di nesquehonite sintetica, con questo metodo, mi hanno dato per risultato valori quasi identici ai teorici.

(2) È singolare che nel grosso *Handbuch der Mineralchemie* di C. Doelter (vol. I, pag. 262) per la composizione teorica della nesquehonite siano riportati tali e quali i dati errati di Genth e Penfield (*Ueber Lansfordit, Nesquehonit und Pseudomorphosen von Nesquehonit nach Lansfordit.* — Zeit f. Kryst. XVII, 1890, pag. 561), cioè 31.38 % CO_2, 28.29 MgO, 39.13 H_2O, senza nemmeno accorgersi che la somma di questi tre valori è ben lontana dal raggiungere 100. Anche nel Dana (*System*, VI edit., 1892, pag. 301) la composizione della nesquehonite è errata, benchè assai meno grossolanamente: MgO 29.0, CO_2 31.4, H_2O 39.1.

Il confronto fra le due serie di valori permette di stabilire senza alcun dubbio che le nostre croste cristalline spettano precisamente alla *nesquehonite*, minerale per quanto io so nuovo per l'Italia, e per le cave di amianto in generale. Il risultato non mi stupì menomamente, perchè già l'aspetto e la struttura del minerale mi avevano lasciato riconoscere che non si trattava affatto di idromagnesite, la quale ha struttura lamellare e lucentezza madreperlacea, e nemmeno di artinite, che possiede invece una struttura fibrosa assai più fina e lucentezza piuttosto sericea.

Il p. sp., determinato su prismetti quasi perfettamente isolati, e su gruppetti trasparenti, in soluzione di Thoulet, mi diede il valore di 1.834, che credo abbastanza esatto, e che corrisponde perfettamente a quello della nesquehonite.

Lo studio ottico dovette necessariamente limitarsi alla osservazione microscopica di prismetti staccati per frantumazione o schiacciamento dolce delle crostine, oppure per raschiatura di alcuni tra gli sferoliti più distinti. In queste prove potei constatare l'esistenza di una sfaldatura abbastanza facile, parallela all'allungamento.

Il minerale ha basso potere rifrangente e birifrazione energica. L'estinzione avviene parallelamente e normalmente all'allungamento, il cui carattere ottico è talora positivo e talora negativo; gli individui cristallini sono biassici, con piano degli A. O. normale all'allungamento. Da alcune sezioni, a più debole birifrazione e allungamento negativo, esce normalmente la bisettrice acuta, negativa; l'angolo dagli A. O. nell'olio di garofani appare mediamente grande, ma nettamente minore di 90°; la dispersione degli A. O. è estremamente debole, anzi appena sensibile: $\varrho < v$. Da altri prismetti, che hanno invece allungamento positivo, emerge obliquamente un asse ottico: più raramente l'emergenza è quasi normale.

Da confronti con olio di garofani ($n = 1.535$), appare evidente che è $\gamma < n$, ma di poco; io ritengo il valore di γ compreso tra 1.530 e 1.534, cioè alquanto superiore al valore dato da Genth e Penfield (1.526). Il confronto del valore della birifrazione negli individui diversamente orientati permette di scorgere subito che $(\gamma - \beta)$ ha un valore molto inferiore a quello di $(\beta - \alpha)$, ciò che corrisponde appunto al carattere ottico negativo del minerale.

Queste proprietà, salvo la presunta leggera differenza nel valore di γ, corrispondono bene a quelle note per la nesquehonite, e furono da me controllate appunto mediante il confronto con due campioni di nesquehonite sintetica, di diversa provenienza, benissimo cristallizzati.

È notevole che otticamente la nesquehonite presenta sensibili analogie con l'artinite; abbastanza simili nell'aspetto generale, i due minerali hanno lo stesso allungamento e analoga orientazione ottica; si può dire che otticamente essi in pratica si distinguano solo perchè gli indici di rifrazione

dell'artinite sono alquanto più elevati ($\gamma > 1.540$) e l'angolo degli A. O. è nella nesquehonite un poco meno aperto che nell'altra. Tuttavia la distinzione è facilissima: basta per ciò servirsi del valore di β, che nell'artinite è quasi esattamente = 1.535, mentre nella nesquehonite è notevolmente più basso; poche fibrille immerse in olio di garofani permettono di rilevare, mediante l'osservazione della linea di Becke, la spiccata diversità. Questo confronto, fatto da me servendomi di alcuni aghetti di artinite, tolti da un campione tipico, gemello di quello analizzato da Brugnatelli, ha confermato in ogni parte le osservazioni di questi, segnando tra le due specie una così evidente differenza, da rendere impossibile ogni confusione.

Quanto ai fiocchetti e sferoliti più bianchi e più leggeri, dei quali un'analisi quantitativa non era possibile, per troppa scarsità di materiale, dopo un accurato saggio qualitativo, che mi permise di scoprirvi solamente MgO, CO_2 e H_2O, li sottoposi pure all'esame ottico, dal quale risultò che anch'essi constano di nesquehonite, in fibrille più esili, ma con proprietà perfettamente identiche a quelle dei più grossi prismi che formano le croste sottostanti.

Ho accennato prima alla determinazione dell'acqua che il minerale perde a 135°; questa perdita, per la nesquehonite naturale, dopo cinque ore di riscaldamento, mi risultò = 24.51 %, ciò che corrisponde a circa $2H_2O$. Per verificare il comportamento anche della nesquehonite sintetica, scaldai, in parecchie riprese di 2-3 ore per volta, una porzione di quasi mezzo grammo di questa sostanza, cristallizzata purissima, e finissimamente macinata, alla temperatura di 135°, mantenuta costante con sufficiente precisione. Dopo 4 ore la sostanza aveva perduto 26.05 % H_2O, ciò che corrisponde esattamente a $^2/_3$ del contenuto totale, ossia a 2 H_2O. La terza molecola d'acqua sembra non eliminarsi che con molto maggiore lentezza e difficoltà; infatti, dopo 17 ore di ulteriore riscaldamento a 135°, la sostanza aveva subito una maggior perdita di peso di solo 2.01 %, con un modulo orario assai piccolo, ma abbastanza costante. La perdita più bassa, di solo 24.51 %, ottenuta in 5 ore con la nesquehonite naturale dipende, credo, dal fatto che questa era stata macinata alquanto più grossolanamente (1).

Gli autori che hanno avuto occasione di studiare la nesquehonite non sono nemmeno molto precisi intorno alla disidratabilità del composto alla

(1) Vedasi a questo proposito: Cesaro, *Sur la Nesquéhonite* (Acad. R. de Belgique. Bull. de la Cl. de Sciences, 1910, pag. 749); questo autore vorrebbe addirittura interpretare la nesquehonite come un ortocarbonato acido biidrato. Ricordo anche le esperienze di H. Leitmeier sulla disidratazione del carbonato pentaidrato di Mg (*Die Absätze des Mineralwassers von Rohitsch-Sauerbrunn in Steiermark*. Zeit. f. Kryst. XLVII, 1910, pag. 104). Senza fermarmi qui a fare la critica della « curva di disidratazione » tracciata da Leitmeier, noto che tale curva presenta un brusco flesso precisamente in un punto che corrisponde alla perdita di $^4/_5$ dell'acqua del pentaidrato, e cioè a $Mg\,CO_3.H_2O$.

temperatura ordinaria: mentre infatti Genth e Penfield (l. c., v. Nota 1) trovarono che il minerale di Nesquehoning-Mine, essiccato per tre giorni su acido solforico, perdette solo 0.1 %, e riferiscono questa piccola perdita a tracce di lansfordite aderente, secondo Friedel (1) la perdita di peso sembrerebbe essere abbastanza rapida, e in due mesi *nell'aria secca* avrebbe raggiunto 10.36 %. Lacroix nota che, esposto all'aria, il minerale sbianca e diventa opaco, perdendo acqua (2); ciò che conferma l'osservazione di Friedel sul campione di La Mure, il quale dopo varî anni di giacenza nella raccolta de l'*École des mines* era diventato opaco e come sfiorito alla superficie, mentre aveva conservato l'aspetto primitivo nelle parti interne. Del resto, l'osservazione dell'alterazione per perdita d'acqua nell'aria secca per il carbonato $Mg\,CO_3.3H_2O$ ottenuto artificialmente è assai vecchia, e risale a Berzelius. Per mia parte, io posso solamente affermare che la nesquehonite artificiale, sottratta all'azione dell'aria libera mediante semplice chiusura in tubo di vetro con tappo di sughero, si conserva perfettamente per varî anni, senza apprezzabile perdita d'acqua; il parallelo fatto da taluno con la disidratabilità della laumontite mi par dunque alquanto esagerato.

L'alterazione spontanea all'aria secca e la pur nota decomponibilità della nesquehonite in presenza di considerevoli quantità d'acqua, con formazione di un sale basico, spiegano secondo il concorde parere degli autori la grandissima rarità in natura di questo carbonato, ch'è precisamente quello il quale più facilmente si ottiene artificialmente, alla temperatura ordinaria, per evaporazione di una soluzione di $Mg\,CO_3$ in acqua ricca di CO_2. Nel caso nostro, le croste di nesquehonite si sono potute formare e conservare perchè appunto il cielo e le pareti della cava, donde esse furono staccate, sono al riparo dal dilavamento per opera delle acque piovane. La formazione della nesquehonite di Franscia è certo recente, e dovuta ad acque di sgocciolamento, provenienti da infiltrazioni nella roccia sovrastante; oltre a formare incrostazioni lungo lievi screpolature, essa fu infatti rinvenuta a tappezzare anche l'imbocco di un foro da mina.

Quanto ad un possibile nesso genetico tra la nesquehonite e l'artinite, io non vorrei osare di negarlo in modo assoluto, ma mi sembra affatto improbabile; più razionale è pensare che mentre la nesquehonite costituisce un prodotto attuale, formatosi alla temperatura e alla pressione ordinaria, idromagnesite e artinite si siano formate in condizioni diverse dalle attuali di superficie, a temperatura e pressione alquanto piú elevate (3).

(1) Ch. Friedel. — *Sur la nesquéhonite.* — Bull. de la Soc. Franc. de Minéralogie, XIX, 1891, pag. 60.

(2) A. Lacroix. — *Minéralogie de la France et de ses colonies.* — Tome III. pag. 789.

(3) L. Brugnatelli. — *Idromagnesite ed artinite di Emarese.* — Rendic. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. XXXVI, 1903, pag. 824.

Chimica fisica. — *Analisi termica del sistema zolfo-p.diclorobenzolo* [1]. Nota del Corrisp. G. Bruni e di C. Pelizzola [2].

Nonostante il largo impiego dello zolfo nella pratica e la sua relativamente facile miscibilità con svariate sostanze organiche, poco o nulla è noto di quantitativo circa il comportamento di sistemi binarî dello zolfo con tali sostanze. Anche sulla solubilità dello zolfo in solventi organici non si hanno che dati sparsi [3], generalmente antiquati, poco attendibili e non proporzionati all'importanza che essi avrebbero in pratica. Una estensione delle nostre cognizioni su questo punto è assai desiderata.

L'unica serie di osservazioni un po' comprensiva e sistematica fu fatta da W. Alexejew [4] nelle sue classiche ricerche sulla solubilità reciproca dei liquidi e sui punti critici di soluzione.

Egli esaminò la miscibilità dello zolfo con benzolo, clorobenzolo, toluolo, anilina e senfolo e trovò che, in tutti questi casi si ha formazione di due strati liquidi. Egli determinò in tutti questi casi l'andamento della doppia curva di solubilità, stabilì che essa corrisponde con molta approssimazione alla regola del diametro retto e fissò i punti critici di soluzione.

Dato lo scopo del lavoro Alexejew trascurò completamente le curve di separazione delle fasi solide.

Noi abbiamo esaminato il sistema zolfo-*p* diclorobenzolo che si presentava interessante per varie ragioni. Anzitutto dall'esame delle curve di miscibilità dello zolfo col benzolo e col monoclorobenzolo, su cui ritornerò in seguito, risulta che la solubilità aumenta di molto passando dal primo al secondo; ossia coll'introduzione di un atomo di cloro nella molecola del solvente. Così la temperatura critica di soluzione si abbassa da 162°,8 a 117°,0. Era interessante vedere se la solubilità continui ad aumentare passando dal mono al diclorobenzolo.

Inoltre la temperatura di solidificazione del *p*.diclorobenzolo rendeva facile esaminare tutte le curve di separazione delle fasi cristalline.

L'esame fu compiuto col metodo termico seguendo le curve di raffreddamento con un termometro in decimi; le miscele fino a 5 % di zolfo furono rideterminate con un Beckmann operando come nel metodo crioscopico.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche Chimiche e Chimico-Fisiche della Società Italiana Pirelli in Milano, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 agosto 1921.

(3) Landolt Börnstein Tabellen, 4ª ediz., Berlin, 1912, pag. 579.

(4) Wied. Ann. *28*, 305 (1886).

La temperatura di separazione dei due strati venivano determinate osservando il punto di intorbidamento della miscela liquida.

Lo zolfo impiegato era stato depurato per cristallizzazione dal benzolo; il *p*.diclorobenzolo per distillazione.

I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

grammi di zolfo in 100 gr. di miscela	Temp. di inizio di cristallizzazione	Temp. di intorbidamento	Temp. Eutectica
100	113°	—	—
95	107 .2	—	—
90	101 .4	—	49°.8
80	99 .05	—	49 .8
75	98 .4	101°	50 .8
70	97 .4	102	50 .4
60	96 .5	104	50 .7
50	96 .9	101 .8	50 .7
45	96 .8	100 .2	50 .7
40	97 .1	96 .5	50 .7
30	94 .6	—	51
20	86 .6	—	51 .2
15	79 .6	—	51 .2
10	67 .8	—	51 .5
5	51 .5 (51°.32) (1)	—	51 .5
3	52 .2 (51 .98) (1)	—	50 .8
1	52 .6 (52 .58) (1)	—	51
0	52 .9 (52 .90) (1)	—	—

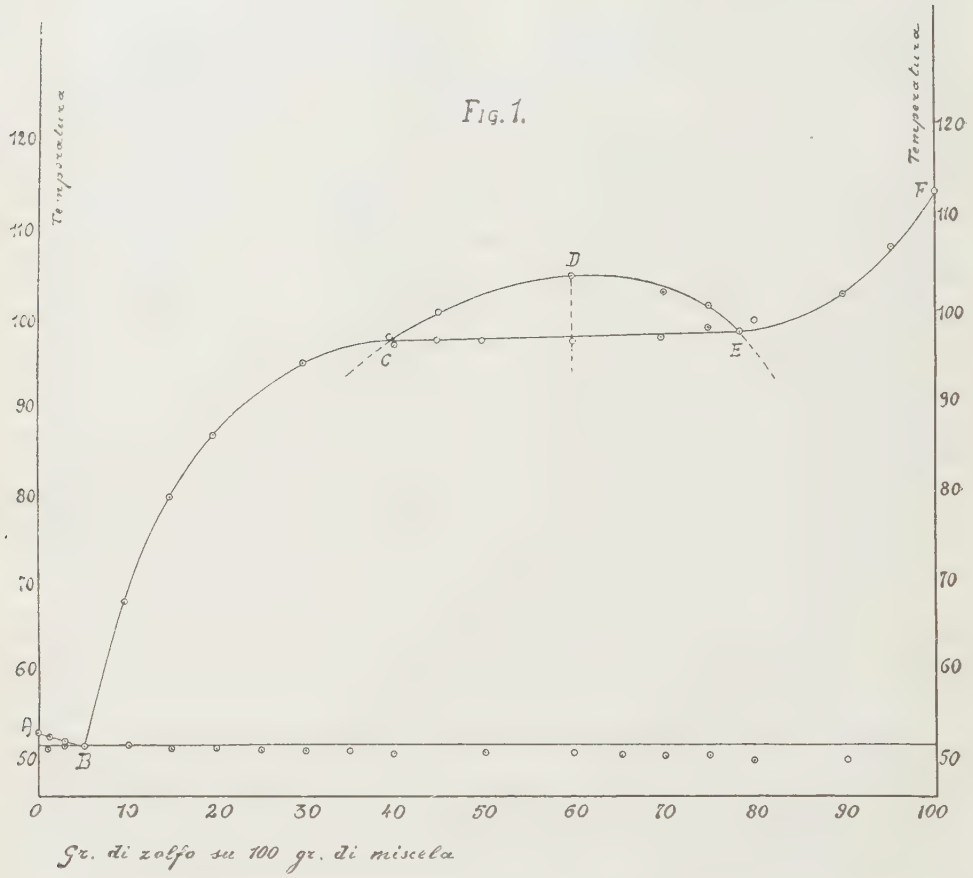
L'interpretazione dei risultati si ha senza alcuna difficoltà dall'esame del diagramma fig. 1. La curva AB rappresenta la separazione del *p*.diclorobenzolo. La temperatura eutectica giace intorno a 51° e ad una concentrazione di poco superiore a 5 %. Lungo la curva BC si separa lo zolfo cristallino, essa dovrebbe rigorosamente essere divisa in due tratti incontrantisi al punto di trasformazione dello zolfo. Siccome questo casualmente coincide quasi esattamente colla orizzontale del limite di separazione dei due strati liquidi, non si riesce ad osservare il gomito relativo.

La curva CDE corrisponde alla separazione in due strati; tutte le miscele liquide aventi concentrazioni fra CE mostrano prima l'intorbidamento, quindi un primo arresto di incipiente cristallizzazione alla medesima tem-

(1) Temperature osservate con termometro Beckmann.

peratura e infine l'arresto eutectico. L'orizzontale limite giace intorno a 97° e fra le concentrazioni 40° e 78 circa. Il punto critico di soluzione è a circa 104° e 60% di zolfo.

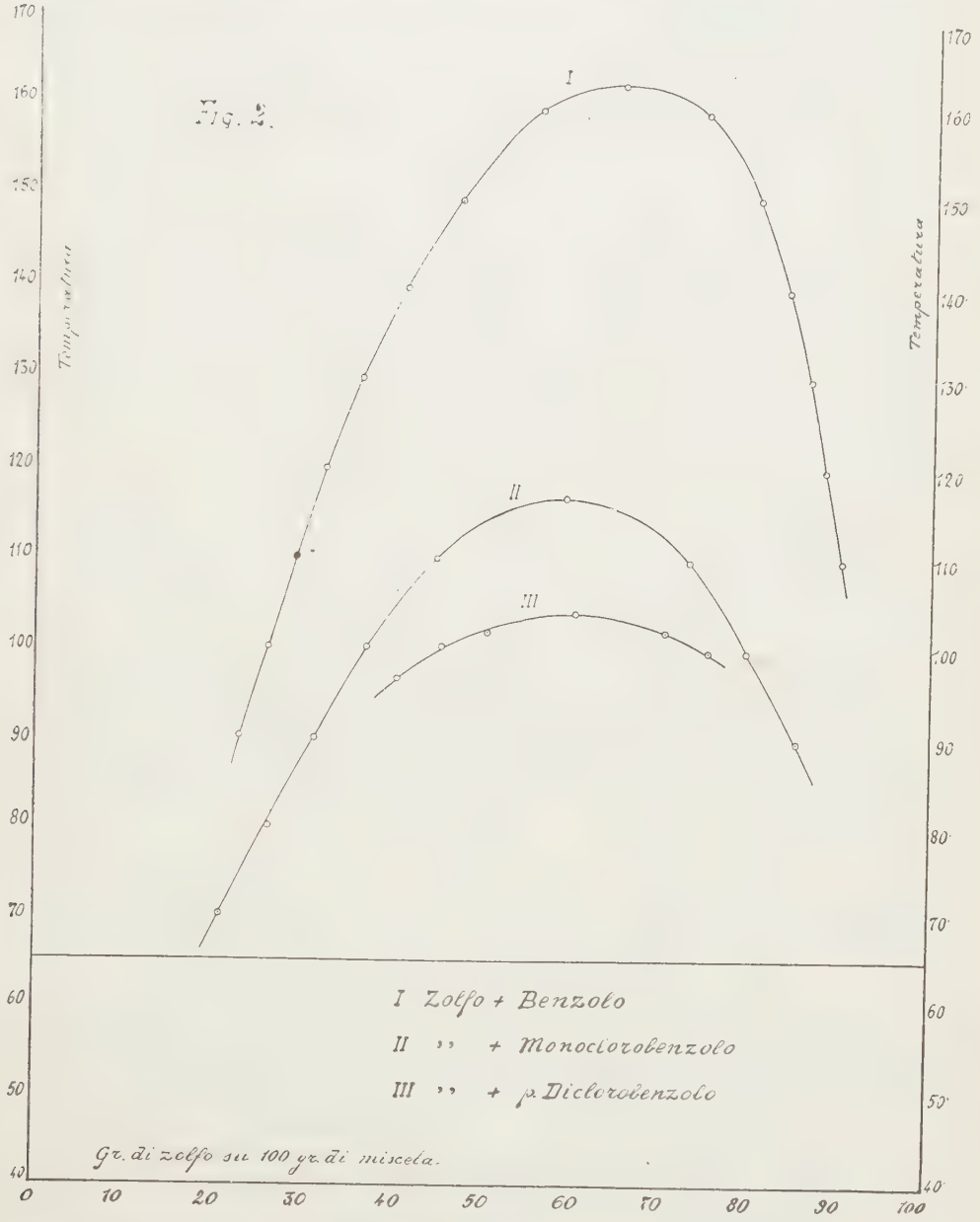
Finalmente la curva FE rappresenta la separazione dello zolfo monoclino. Tutte le soluzioni di questo tratto dànno l'arresto di incipiente cristallizzazione, l'arresto alla orizzontale 97° e quello eutectico. Esse subiscono



anche la trasformazione da monoclino in rombico, ma siccome la temperatura relativa, come si è detto, coincide quasi coll'orizzontale 97°, il punto relativo non si osserva distinto.

È interessante confrontare la curva CDE colle curve di miscibilità reciproca dello zolfo con benzolo e con monoclorobenzolo; il confronto risulta dal diagramma fig. 2. Si vede che conformemente alla previsione l'aumento di solubilità continua a crescere passando dal monocloro al diclorobenzolo. Infatti la zona di esistenza dei due strati liquidi nel sistema zolfo-*p*.diclorobenzolo è caratterizzata dalla sua estrema strettezza nel senso delle temperature. Il suo campo di esistenza è infatti di soli 7° (da 97° a 104°), mentre

quello del sistema zolfo-monoclorobenzolo è di almeno 30° e quello del sistema zolfo-benzolo di almeno 55°. (È da notarsi che i punti di intorbidamenti più bassi osservati da Alexejew nelle soluzioni meno ricche in zolfo



sono con grande probabilità punti metastabili). Per quanto si può rilevare anche la curva CDE segue la regola del diametro retto, il quale ultimo coincide quasi esattamente con la verticale di ascissa 60, ciò che conferma la posizione del punto critico.

Abbiamo voluto infine esaminare lo stato molecolare dello zolfo sciolto nel *p*.diclorobenzolo, approfittando delle determinazioni fatte lungo la curva AB. Nella tabella seguente sono dati i risultati ottenuti ricalcolando le concentrazioni per riferirle a 100 gr. di solvente e usando come costante crioscopica del *p*.diclorobenzolo K = 77 [1]:

Concentrazioni	Abbassamenti	Pesi molecolari
1.01	0.32	243
3.09	0.92	258
5.28	1.58	256
		$S_8 = 256$

Come era prevedibile la molecola dello zolfo è quindi ottoatomica come in tutti gli altri solventi normali.

Si possono anche utilizzare le due concentrazioni a 90 e 95 % di zolfo per avere un dato circa la costante crioscopica dello zolfo monoclino che non è nota. Si ottengono rispettivamente i valori 148 e 143 che non possono essere riguardati che come largamente approssimativi.

Mineralogia. — *Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto* [2]. Nota III del Corrispondente Ferruccio Zambonini [3].

Col totalrefrattometro, tre diverse faccie hanno dato $n_p = 1.7196, 1.7194, 1.7200$ per la luce del sodio: per n_g si sono avuti dei valori un poco più oscillanti, e. cioè, 1.7330, 1.7336 e 1.7341, sempre per la luce del sodio. Prendendo i valori medî di n_p e di n_g e quello di n_m ottenuto col prisma, si ha:

$$n_p = 1.7197 \qquad n_m = 1.7259 \qquad n_g = 1.733(6).$$

Mediate una bella sezione parallela a (100) ho determinato l'angolo degli assi ottici, trovando [4]

$$2V_{n_p} = 86^\circ 36' \text{ (B)} \qquad 85^\circ 18' \text{ (Na)} \qquad 84^\circ 25' \text{ (E)}$$

In altre plaghe, per la luce del sodio, ho misurato $2V_{n_p} = 84^\circ 32', 85^\circ 38', 85^\circ 30'$. Una seconda lamina parallela a (100), molto uniforme, ha dato

$$2V_{n_p} = 85^\circ 34' \text{ (B)} \qquad 84^\circ 36' \text{ (Na)} \qquad 83^\circ 24' \text{ (E)}$$

Come media di tutte le misure per la luce del sodio si ha 85° 7'.

(1) Auwers, V. Landolt Börnstein Tabellen, pag. 793.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

(3) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1921.

(4) Dai tre indici di rifrazione si calcola $2V_{n_p} = 84^\circ 9'$ (*Na*), e l'accordo può ritenersi sufficiente, data l'incertezza nella quarta decimale, specialmente per n_g.

L'angolo apparente che l'asse ottico emergente dalla base forma con la normale alla faccia stessa è risultato un po' variabile. In una lamina, ai due estremi, si è trovato 34° 17′ e 35° 22′; una seconda lamina ha dato 34° 18′ (parte centrale) e 34° 51′ (verso un estremo): infine, in una terza lamina di sfaldatura si sono avuti valori più bassi, 32° 48′ nel centro, 33° 23′ ad un estremo. Tutte le misure sono state eseguite con la luce del sodio: la loro media è 34° 10′ (l'angolo vero ω' risulta, quindi, di 19°).

In una lamina parallela a (010), una direzione di massima estinzione n_g formava, per la luce del sodio, un angolo variabile da 24° 10′ a 25° 30′ con la traccia di (001), nell'angolo ottuso β. Ne segue che n_p giace nell'angolo ottuso β, e forma con c un angolo che da circa $1\,^1/_3$° si riduce fin quasi a 0°. In un'altra sezione (010) si è avuto [100]: $n_g = 23°$ (1).

Il pleocroismo è nitido soltanto nelle lamine di spessore considerevole. In alcune di 2 mm. di spessore ho osservato:

n_p = giallo verdastro pallidissimo n_m = giallo vino molto chiaro
n_g = verde giallastro chiaro.

Se lo spessore è inferiore ad un terzo di millimetro, il pleocroismo diventa insensibile.

Utilizzando in parte il materiale adoperato per le ricerche ottiche ed in parte altro riconosciuto ad esso identico, ho trovato Fe_2O_3 7.20 %, FeO 0.29 %. Il ferriepidoto ammonta, perciò, a 16.3 %. Dalla mia formula si calcola $2V_{n_p} = 83°\,38'$ (Na), ossia un valore nettamente inferiore a quelli misurati direttamente. L'anomalia è, però, ancora più notevole per n_m, più basso che nell'epidoto del Rothenkopf, che contiene appena 3.52 % Fe_2O_3. Per un epidoto normale di uguale composizione ci si aspetterebbe $n_m = 1.738$ circa. Degno di nota è anche il trovarsi n_p nell'angolo ottuso β, pur essendo $2V_{n_p} < 90°$.

Nella tabella seguente si trovano riuniti i valori dell'angolo degli assi ottici per la luce del sodio ed il contenuto in ossido ferrico ed in ferriepidoto per varî termini della serie clinozoisite-epidoto.

	Goslerwand (Weinschenk)	Monte Tovo (Zambonini)	Rothenkopf (Weinschenk)	Monte Tovo (Zambonini)	Goslerwand (Zambonini)	Huntington (Forbes)	Camp-Rass (Gauberl)	Val Maigel (Grubenmann)	St Barthelemy (Zambonini)	Inverness-shire (Thomas)	Zillerthal (Forbes)	Monte Bianco (Zambonini)	Val Maigel (Grubenmann)
V_{n_p}	98° 20′	91° 10′	89° 16′	99° 35′	100°	90° 32′	93° 31′	85°	87° 45′	98° 35′	87° 46′	85° 7′	81° ± 1 $^1/_2$°
Fe_2O_3 . .	1.68	3.01	3.52	5.1	5.16	5.67	5.75	5.79	6.8	6.81	6.97	7.20	7.30
Ferriepidoto	3.8	6.8	8	11 5	11.7	12.8	13.	13.1	15 4	15.4	15.8	16.3	16.6

(1) Dai valori medî di 2V e di ω' si calcola [100]: $n_g = 23\,^1/_2$°.

Anche facendo larga parte alle eventuali manchevolezze delle determinazioni (1), dipendenti sia dalle misure, sia dall'essere spesso i cristalli di epidoto costituiti di parti a composizione chimica diversa (2), dalla tabella che precede risulta evidente che *nella serie clinozoisite-epidoto vi sono termini nei quali ad una composizione chimica quasi identica corrispondono valori anche molto diversi dell'angolo degli assi ottici e viceversa.*

Nè l' « anomalia » si limita all'angolo degli assi ottici. Consideriamo, per esempio, alcuni valori di n_m per la luce del sodio:

	Zillerthal (Goldschlag)	Goslerwand (Weinschenk)	Rothenkopf (Weinschenk)	Monte Tovo (Zambonini)	Huntington (Forbes)	Camp-Ras (Gaubert)	Inverness-shire (Thomas)	Zillerthal (Forbes)	Monte Bianco (Zambonini)
n_m	1.7172	1.7195	1.7291	1.7135	1.716	1.7146 a 1.7149	1.7196	1.7244	1.7259
% Fe_2O_3	0	1.68	3.52	5.1	5.67	5.75	6.81	6.97	7.20

Anche in questo caso, noi troviamo quasi lo stesso valore di n_m in cristalli con quantità assai diverse di Fe_2O_3.

Fenomeni dello stesso genere si verificano se si osserva la dispersione dell'angolo degli assi ottici intorno alla bisettrice acuta. La differenza tra i valori per la luce del sodio e quella del tallio (o per le linee D ed E in altri casi) risulta dal seguente prospetto:

(1) Così, io ho osservato che dagli indici di rifrazione misurati da Forbes si calcolano, per 2V, dei valori molto diversi da quelli effettivamente trovati. Ciò dipende dal fatto che la terza cifra decimale degli indici è incerta, mentre il valore trovato di 2V è approssimativamente esatto, essendo stato dedotto dalla misura diretta di $2H_a$ e $2H_o$.

(2) È certo che le determinazioni ottiche vanno ripetute nelle varie parti di uno stesso cristallo, e per le analisi si devono impiegare o gli stessi frammenti usati per le misure ottiche od altri riconosciuti positivamente ad essi analoghi. Così operando, si otterrà una composizione chimica media, corrispondente alla media dei valori trovati per le proprietà ottiche. Il presente lavoro mostra chiaramente come queste ultime possano presentare sensibili variazioni nelle diverse plaghe di cristalli apparentemente omogenei, sicchè non ripetendo le misure in differenti regioni del cristallo, si otterrebbero dei valori non corrispondenti affatto alla composizione chimica, che è necessariamente la media di quella delle singole plaghe.

	Zillerthal (Goldschlag)	Goslerwand (Weinschenk)	Rothenkopf (Weinschenk)	Monte Tovo (Zambonini)	Inverness-shire (Thomas)	Monte Bianco (Zambonini)	Pfarrerb (Goldschlag)	Knappenwand (Goldschlag)
$2V_D - 2V_E$ . . .	− 4° 6′	− 1° 20′	+ 1° 16′	− 2° 3′	− 0° 54′	+ 0° 53′a 1° 12′	+ 0° 27′	+ 0° 11′
% Fe_2O_3 . . .	0	1.68	3.52	5.1	6.81	7.20	9.67	13.67

Anche qui è evidente, che i cristalli di Monte Tovo, dell'Inverness-shire e del Monte Bianco si comportano in modo diverso dagli altri (1).

Se noi esaminiamo le singole tabelle riportate, o, meglio ancora, se noi ricorriamo a dei metodi grafici di rappresentazione, vediamo subito che i cristalli finora studiati possono essere nettamente divisi in due gruppi. Uno di essi è costituito dalla clinozoisite della valle di Ziller, della Goslerwand e di Monte Tovo e dagli epidoti del Rothenkopf, di val Maigel, delle Lusette presso Ala, di Quenast, della Schwarze Wand, di Pfarrerb, della Knappenwand, del Rauhbeerstein, ecc., da quei cristalli misti, cioè, nei quali le proprietà fisiche sono in evidente relazione con la composizione chimica, sicchè vengono ad essere soddisfatte le regole ben note sulle proprietà fisiche delle soluzioni solide. Questo primo gruppo può essere chiamato dei cristalli misti normali. Al secondo gruppo appartengono, invece, alcuni dei cristalli di Monte Tovo, della Goslerwand, del Monte Bianco e di St. Barthélemy, oltre a quelli di Huntington, di Camp-Ras, dell'Inverness-shire, della valle di Ziller, in una parola tutti quei cristalli misti che hanno un comportamento ben diverso da quelli del primo gruppo, e che possiamo, perciò, chiamare **cristalli misti anomali** (2). Il secondo gruppo è molto frequente nei giacimenti di val d'Ala: ad esso appartengono di certo, come mostrerò altrove, quei cristalli di colore chiaro che nel 1915 la dott. F. Balzac, in base al valore di n_m misurato in alcuni di essi, riferì a termini clinozoisitici.

(1) Lo stesso fenomeno si verifica anche per la birifrangenza ed è probabile si manifesti pure per il peso specifico, ma per questo non dispongo di valori abbastanza attendibili e numerosi, sicchè mi riprometto di trattarne in seguito, dopo che avrò potuto eseguire delle nuove determinazioni.

(2) È da osservare che l'intensità della anomalia può essere molto diversa per le varie proprietà fisiche. Così, il cristallo del Monte Bianco studiato è quasi normale per 2V, ma si differenzia assai dalla serie tipica per gli indici di rifrazione, la posizione di n_D, ecc. Ne segue che l'appartenenza di un cristallo misto all'una od all'altra serie non può sempre con certezza essere stabilita in base ad un solo dato ottico.

L'esistenza delle due serie di cristalli misti, normale ed anomala, mi sembra risulti stabilita in modo indubbio da quanto si è esposto nelle pagine precedenti: si tratta di trovare la ragione di questo fenomeno, che, come accennavo in principio del presente scritto, appare, a prima vista almeno, in pieno contrasto con le nostre cognizioni intorno ai cristalli misti. In realtà, una spiegazione persuasiva ed elegante è facile a trovarsi.

La formula dell'epidoto può scriversi così: $Ca_2(Al, Fe)_3(OH)(SiO_4)_3$. Due ipotesi si contendono il campo intorno alla funzione dell'ossidrile, che Tschermak, Vernadskij ed altri vorrebbero legato al calcio, mentre Groth ritiene sia unito all'alluminio. Per quanto attraente sia la prima ipotesi, specialmente nella forma scelta dal Vernadskij (1), a me sembra che quella di Groth debba essere preferita senza esitazione. Se il ferro è legato all'ossidrile, appare plausibile il fatto ben noto che, in seguito all'eliminazione dell'acqua ad alta temperatura, il ferro ferrico dell'epidoto tende a passare a ferroso, mentre se l'ossidrile fosse legato al calcio, specialmente col tipo di formula proposto da Vernadskij, non apparirebbe ben chiaro perchè l'eliminazione dell'acqua dovesse influire in modo così particolare sul ferro.

La formula della clinozoisite può, per tanto, venire scritta così: $\left[SiO_4\right]^{Al_2}_{3Ca_2}Al(OH)$. Ora, passando dalla clinozoisite all'epidoto, è evidente che la sostituzione del ferro ferrico all'alluminio può farsi in ben tre modi diversi: *a*) il ferro ferrico può sostituire soltanto l'alluminio legato all'ossidrile; *b*) può prendere solamente il posto dell'alluminio indipendente dall'ossidrile; *c*) finalmente, il ferro ferrico può sostituirsi sia all'uno, che all'altro. Supponiamo che nell'edificio cristallino di una clinozoisite pura venga sostituito tanto alluminio, che il cristallo misto risultante contenga, per esempio, 5 % Fe_2O_3. A seconda che tutto questo ferro ferrico prenderà il posto, nella struttura cristallina, di alcuni degli atomi di alluminio legati all'ossidrile ovvero di alcuni degli altri, o, ancora, ne sostituirà sia dei primi, che dei secondi, è chiaro che noi otterremo *tre* diversi cristalli misti, differenti fra loro per la posizione che gli atomi di ferro occupano nell'edificio cristallino e, quindi, nello spazio: si tratta, in altre parole, di *cristalli misti stereoisomeri*. Le loro proprietà fisiche devono essere necessariamente differenti. Si spiega, così, come nella serie clinozoisite-epidoto possano aversi cristalli misti con composizione chimica praticamente identica, ma con proprietà ottiche notevolmente diverse.

(1) La formula dell'epidoto è scritta da Vernadskij $3Ca(Al, Fe)_3(SiO_4)_2 . Ca(OH)_2$. Corrisponde, perciò, ad uno di quei composti di un sale con un idrato, nel rapporto 3 : 1, dei quali il Werner ha mostrato l'importanza. Evidenti sarebbero le relazioni con l'anortite, il che presenta un interesse particolare, pensando che l'epidoto è uno dei frequenti prodotti di trasformazione dei plagioclasi. Il passaggio dall'anortite all'epidoto si spiega, però, facilmente anche con la formula di Groth.

Delle tre possibilità indicate di sostituzione del ferro ferrico all'alluminio della clinozoisite la *b*) è da escludersi. Infatti, per quanto si è detto, appare estremamente probabile che negli epidoti il ferro sia, almeno in parte, legato all'ossidrile. Rimangono, perciò, le due possibilità *a*) e *c*). Ora, è suggestivo il fatto che, a sostituzione completa dell'alluminio del gruppo $Al(OH)$, si giunge ad una formula $Ca_2Al_2[Fe(OH)](SiO_4)_3$, la quale richiede 16.49 % Fe_2O_3, ossia una quantità di ossido ferrico che corrisponde sensibilmente, od è di pochissimo inferiore, alle percentuali trovate nelle pistaziti più ferrifere finora studiate. E si tratta, come nel caso dei cristalli del Rauhbeerstein, presso Zöptau, di pistaziti « normali ». Sembra, perciò, che nella serie clinozoisite-epidoto sia sopratutto l'alluminio del gruppo $Al(OH)$ quello che viene sostituito dal ferro-ferrico, pur essendo, però, naturalmente, possibile anche una sostituzione del resto dell'alluminio, sostituzione che indubbiamente avviene nelle piemontiti e nelle ortiti, ma che sembra, a giudicare almeno dai dati esistenti, piuttosto limitata, nella maggior parte dei casi (1).

(1) Le tre formule $Ca_2Al_2[Ce(OH)](SiO_4)_3$ e le due analoghe con $Fe(OH)$ e $Mn(OH)$ richiedono rispettivamente 18 , 21,1 e 21,15 % Al_2O_3. Nelle buone analisi di piemontiti Al_2O_3 non scende al disotto del 15-16 % e sale anche a 22.52 e 22.07 % (piemontiti di Ōtakisan (Giappone) e di Monterey-Station, nel Maryland). Nelle migliori analisi di ortiti Al_2O_3 di rado è inferiore al 15 %, e non scende mai sotto all'8-9 %. W. Eitel (*Die Grenzen der Mischkristallbildung in den Mineralien der Epidotgruppe I*, Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. s. w. 1918, XLII Beil. Bd. 173), ha sostenuto recentemente che la concezione di Tschermak-Ludwig, secondo la quale i cristalli misti della serie clinozoisite-epidoto dovrebbero essere costituiti dai due composti $Ca_2Al_3(OH)(SiO_4)_3$ e $Ca_2Al_2Fe(OH)(SiO_4)_3$, è da considerarsi troppo ristretta, perchè, nella proiezione, alcuni dei punti rappresentativi delle analisi si allontanano dalla congiungente i due punti corrispondenti a quei due composti. Non mi è possibile il discutere qui il lavoro di Eitel: ad ogni modo, non è dubbio, che il composto fondamentale dell'epidoto è sempre $Ca_2(Al,Fe)_3(OH)(SiO_4)_3$. Tutt'al più, alcune analisi fanno sorgere il dubbio che possano entrare, nella costituzione del minerale, piccole quantità di un qualche altro composto finora non definito; ma, anche ammesso che questo risultato sia per essere confermato da nuove ricerche, esso non tocca il presente lavoro, perchè i cristalli misti presi in esame rispondono perfettamente, entro i limiti delle incertezze delle analisi, alla formula generale di Ludwig.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Caratterizzazione intrinseca di elementi lineari rispetto al parallelismo.* Nota di ENRICO BOMPIANI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (1).

1. Il parallelismo, entro una V_n, fra direzioni (2) dipende generalmente dal cammino lungo il quale si esegue il trasporto: l'indipendenza da questo è proprietà esclusiva degli spazî euclidei; se la V_n contiene una congruenza di curve (∞^{n-1}) a parallelismo completo (cioè indip. dal cammino) quelle sono geodetiche ortogonali ad ∞^1 V_{n-1} totalmente geodetiche e l'elemento lineare di V_n è perciò del tipo (di Levi-Civita):

$$ds^2 = d\sigma^2 + dx_n^2 \quad , \quad \left[d\sigma^2 = \sum_{1}^{n-1}{}_{ik} a_{ik}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_i dx_k\right].$$

Accanto a questi due risultati, che caratterizzano tipi di elementi linearî partendo dal parallelismo, se ne possono porre altri derivanti dall'imporre alla V_n determinati comportamenti rispetto ad esso.

2. Le nozioni seguenti potranno servire allo scopo:

α) Si dirà AUTOSTABILE una V_{n-1} (o V_k) di V_n tale che una direzione di V_{n-1} trasportata per parallelismo (risp. a V_n) lungo cammini di V_{n-1} si porti sempre in una direzione di V_{n-1} (con ciò *non* si esige che il risultato sia indipendente dal cammino).

β) Un sistema di ∞^1 V_{n-1} in V_n si dirà STABILE se una direzione di una V_{n-1}, trasportata lungo cammini qualsiansi in V_n, dà sempre luogo ad una direzione di una V_{n-1} (quindi le V_{n-1} sono necessariamente autostabili; ma *non* viceversa: ∞^1 V_{n-1} autostabili non formano generalmente un sistema di stabilità).

γ) Se in V_n esiste una congruenza (∞^{n-1}) di curve parallele per qualsiasi cammino eseguito sopra ∞^1 V_{n-1}, queste si diranno V_{n-1} D'INDIFFERENZA per la congruenza.

È chiaro come si possano dare altri criterî, simili ai precedenti, per la caratterizzazione invariantiva di elementi lineari rispetto al parallelismo: ecco alcuni risultati.

3. SISTEMA ∞^1 DI V_{n-1} AUTOSTABILI.

(1) Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

(2) Per la definizione, e le proprietà che seguono, del parallelismo vedasi la Memoria di T. Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* ecc. (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XLII, 1917_1).

Si trova che il ds^2 è del tipo di Hadamard

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n-1} a_{ik}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k + a_{nn}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n^2$$

quindi;

Se una V_n *possiede* ∞^1 V_{n-1} *auto-stabili queste sono totalmente geodetiche e le loro traiettorie ortogonali pongono fra esse una corrispondenza per applicabilità; il parallelismo entro una* V_{n-1} *è quello subordinato in essa dal parallelismo ambiente.*

Quindi *se il risultato del trasporto per parallelismo (rispetto a* V_n*) di una direzione di* V_{n-1} *entro* V_{n-1} *non dipende dal cammino seguito le* V_{n-1} *sono euclidee, e*

$$ds^2 = \sum_{i}^{1\ldots n-1} dx_i^2 + a_{nn}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n^2 .$$

4. Sistema stabile di ∞^1 V_{n-1}.

Si trova che il ds^2 è del tipo di Levi-Civita:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n-1} a_{ik}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_i\, dx_k + dx_n^2;$$

se una V_n *contiene un sistema stabile di* ∞^1 V_{n-1} *queste sono totalmente geodetiche e le traiettorie ortogonali sono geodetiche.*

È questa un'altra proprietà caratteristica del ds^2 di Levi-Civita (oltre quella di contenere una congruenza a parallelismo completo).

Dalle proprietà del parallelismo si ricava poi che *se una* V_n *contiene* k *congruenze (linearmente indipendenti) a parallelismo completo si ha*

$$ds^2 = d\sigma_{n-k}^2 + dx_{n-k+1}^2 + \ldots + dx_n^2$$

ove $d\sigma_{n-k}$ è un elemento lineare nelle sole variabili $x_1, \ldots, x_{n-k}$; una tale V_n si può sempre costruire in uno spazio euclideo di dimensione

$$\leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k,$$

cioè è di classe $\leq (n-k)(n-k-1)/2$; quindi è euclidea per $k = n-1$:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_n *sia euclidea è che contenga* $n-1$ *congruenze di curve a parallelismo còmpleto (o* $n-1$ *sistemi di stabilità)* [1].

[1] Siccome l'indipendenza del parallelismo dal cammino si esprime annullando i simboli di Riemann, $(ik, lm) = 0$, questo risultato dà una nuova via geometrica d'integrazione di queste equazioni.

5. Congruenza [normale] di curve in V_n con V_{n-1} ortogonali d'indifferenza.

Si trova ancora l'elemento lineare di Hadamard (n. 3), quindi una nuova proprietà caratteristica di esso.

6. Proprietà caratteristica delle congruenze di curve che ammettono varietà d'indifferenza.

Occorre richiamare la definizione di *asse* di una faccetta a due dimensioni in V_n (1): è tale una direzione (che in generale esiste ed è unica per n dispari, e non esiste per n pari) che trasportata per parallelismo lungo un circuito infinitesimo chiuso eseguito sulla faccetta ritorna al punto di partenza su sè stessa. Allora si dimostra che affinchè ∞^1 V_{n-1} si possano considerare come V_{n-1} d'indifferenza per una congruenza di curve occorre e basta che

1°) ogni faccetta a due dimensioni di V_{n-1} abbia un asse (in V_n);

2°) gli assi di tutte queste faccette per un punto coincidano;

3°) gli assi relativi a punti infinitamente vicini di una V_{n-1} siano paralleli. Se ciò accade la congruenza è quella inviluppata dagli assi delle V_{n-1}.

In particolare per $n = 3$ le due prime condizioni sono sempre soddisfatte; posto $ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2$, i parametri relativi agli assi delle faccette $dx_3 = 0$ sono

$$\chi^{(i)} = \alpha^{(i3)}/\mathrm{R} \quad \text{con} \quad \mathrm{R} = \sqrt{\Sigma a_{ik}\,\alpha^{(i3)}\,\alpha^{(k3)}}$$

(le $\alpha^{(rs)}$ sono i simboli di Ricci); quindi, tenendo conto della condizione ultima si ha:

Dato un sistema ∞^1 di superficie in V_3, per sapere se esse possano considerarsi come superficie d'indifferenza per una congruenza di curve, non c'è che da verificare se le espressioni $\chi^{(i)} = \alpha^{(i3)}/\mathrm{R}$ soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial x_1} = -\sum \left\{ \begin{matrix} 1l \\ i \end{matrix} \right\} \chi^{(l)} \quad ; \quad \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial x_2} = -\sum \left\{ \begin{matrix} 2l \\ i \end{matrix} \right\} \chi^{(l)}$$

(*i simboli* $\left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\}$ *essendo calcolati per l'ultimo ds^2 scritto*); *se ciò accade, la congruenza è quella degli assi* (*definita dai parametri* $\chi^{(i)}$).

7. Congruenza di curve con superficie d'indifferenza equidistanti secondo quelle curve.

Se le curve della congruenza sono linee di equidistanza (obliqua, chè altrimenti si ritorna sul ds^2 di Levi-Civita) per le superficie d'indifferenza si ha che: *la corrispondenza stabilita fra queste dalle linee della con-*

(1) Vedasi la mia Memoria: *Studî sugli spazi curvi: del parallelismo in una varietà qualunque*, parte II (Atti R Istit. Veneto, 1921 attualmente in corso di stampa).

gruenza è un'applicabilità e il ds^2 *è riducibile al tipo*

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2a_{13}\,dx_1\,dx_3 + 2a_{23}\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2$$

con

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}$$

($d\sigma$ è un elemento lineare binario).

Di più: *se nella corrispondenza nominata si corrispondono le curve contenute nella* V_2 *e normali a quelle della congruenza, questa è normale e al* ds^2 *si può dare la forma*

$$ds^2 = [b_{11}(u_1, u_2) - \Phi^2(u_3 - u_1)]\,du_1^2 + b_{22}(u_1, u_2)\,du_2^2 + \Phi^2(u_3 - u_1)\,du_3^2;$$

le curve della congruenza sono le u_3 ($du_1 = du_2 = 0$) e le superficie d'indifferenza sono rappresentate da $u_3 - u_1 = \text{cost.}$ (se $\Phi = \text{cost.}$ si ritorna sul ds^2 di Levi-Civita): *le superficie* $u_1 = \text{cost.}$ *contenenti le curve della congruenza sono a curvatura nulla e le linee nominate sono geodetiche per esse.* Inoltre: *la* V_3 *contiene altre* ∞^1 *superficie applicabili fra loro e su quelle d'indifferenza* (le $u_3 + u_1 = \text{cost.}$).

8. Congruenza di curve appartenenti ad ∞^1 superficie d'indifferenza per esse.

Se le superficie d'indifferenza contengono le curve della congruenza queste sono geodetiche e quelle a curvatura nulla; al ds^2 può darsi la forma

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 - 2x_3\,\frac{\partial \chi(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_3 + a_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2 + \\ + 2\chi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_3 + dx_3^2$$

e in particolare, se la congruenza è ortogonale

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + a_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2 + dx_3^2$$

($dx_1 = dx_2 = 0$, linee della congruenza; $dx_1 = 0$ superficie d'indifferenza). Le traiettorie ortogonali (x_1) alle superficie d'indifferenza (fra loro applicabili) *non* determinano un'isometria, ma un'affinità fra gl'intorni di punti corrispondenti (in cui sono direzioni di uguaglianza quelle della congruenza); se si assumono nuove linee x_1 che determinino l'applicabilità si hanno i tipi

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + 2\left\{\psi(x_1, x_2) - x_3\,\frac{\partial \chi}{\partial x_2}\right\}dx_1\,dx_2 + \\ + 2\chi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_3 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$ds^2 = a_{11}(x_1, x_2, x_3)\,dx_1^2 + 2\psi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota I del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques (1).

Introduzione. — Nella Memoria *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (2) Enriques ha dimostrato che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere mumerico $p_a = -1$ appartengono alla famiglia generale delle superficie ellittiche, la quale riesce definita dal possesso di due fasci di curve intersecantisi in un certo numero n di punti: un fascio lineare di curve ellittiche K, tutte di egual modulo, e un fascio ellittico di curve C di genere π (≥ 0), del pari fra loro birazionalmente identiche. I gruppi di n punti intersezioni delle C e K formano un'involuzione I_n generata da un gruppo abeliano di trasformazioni della superficie in se stessa.

Una superficie F del tipo indicato si lascia rappresentare sopra un cilindro ellittico multiplo d'ordine n: $\varphi(xy) = 0$, con una curva di diramazione composta di sezioni piane $z = \text{cost}$; il numero n (per il significato che assume in rapporto alla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche) riceve il nome di *determinante* della nostra superficie ellittica F.

Nella citata Memoria di Enriques, partendo dal cilindro multiplo, vengono effettivamente costruite (in due maniere: mercè le funzioni ellittiche e con procedimento algebrico) le F, per cui il determinante è un numero primo, ciò che richiede l'estrazione di un radicale portante sopra una funzione razionale dei punti di φ moltiplicata per un polimonio in z. Quanto alle superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto, l'A si è limitato a recare l'esempio del caso ciclico in cui interviene ancora un solo radicale (o due radicali sovrapposti). Ma Bagnera e De Franchis nei loro studi sulle superficie iperellittiche hanno incontrato altri esempi di (particolari) superficie ellittiche (in cui il determinante è un numero composto) non appartenenti al tipo ciclico e per le quali intervengono due radicali non sovrapposti.

Da queste ricerche viene posto il problema generale di: « Costruire per n qualunque (non primo) le superficie rappresentate sul cilindro ellittico $\varphi(xy) = 0$ contato n volte con una curva di diramazione composta di sezioni piane $z = \text{cost.}$ » e così di *classificare le superficie ellittiche il cui deter-*

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(2) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XX (1905).

minante n è un numero composto. Tale scopo appunto è quello del presente lavoro.

1. La costruzione dei cilindri multipli anzidetti si riconduce a quella delle curve multiple sezioni $z = \text{cost.}$, nonchè alla costruzione delle rette multiple generatrici del cilindro. Per ciò che concerne le dette curve $z = \text{cost.}$ il problema è di « costruire le curve ellittiche multiple d'ordine n rappresentate sopra una φ ellittica senza punti di diramazione ».

E da questo problema, che ha di per se stesso notevole interesse, conviene qui prendere le mosse.

Sia dunque K una curva ellittica irriducibile rappresentata sulla φ ellittica contata n volte: siano $P_1 P_2 \dots P_n$ gli n punti di K corrispondenti a un punto P di φ. Si consideri la riemanniana della curva φ realizzata da un toro T, generato dalla rotazione di un cerchio intorno a un asse verticale v (complanare con esso); su T avremo due serie di cerchi: cerchi verticali che indicheremo con A e cerchi orizzontati che indicheremo con B, i quali costituiscono le due serie di cicli fondamentali del toro. Quando il punto P descrive un cerchio A, i punti $P_1 P_2 \dots P_n$ si permuteranno secondo una certa sostituzione α, e similmente secondo una sostituzione β, quando P descrive B: mancando su φ punti di diramazione, α e β non variano quando A e B si muovono entro le rispettive serie, ed essendo K irriducibile, le due sostituzioni α e β generano un gruppo G transitivo. E si riconosce che G è abeliano: infatti trasformare A con B equivale a far ruotare A intorno all'asse v fino a tornare in sè, e riuscendo così A uguale al suo trasformato mediante B, sarà similmente $\alpha = \beta\alpha\beta^{-1}$; essendo dunque permutabili le due operazioni generatrici di G, lo saranno anche tutte le altre che appartengono al G stesso. Il gruppo abeliano G può essere ciclico, venendo allora generato da una sostituzione π di periodo n, di cui α e β sono delle potenze; ma importa in ogni caso *costruire la base di* G.

A tale scopo si designino con a e b i periodi di α e β, e si decompongano in fattori primi scrivendo:

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}, \quad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_i^{b_i}$$

dove qualcuno degli esponenti può essere uguale a zero. Potremo distinguere i nostri fattori primi p in due categorie di numeri p_h e p_k, designando con p_h un fattore per cui sia $a_h < b_h$ e con p_k un fattore per cui sia invece $a_k \geq b_k$. Fatta questa distinzione porremo m uguale al prodotto dei fattori della prima categoria elevati agli esponenti a_h:

$$m = \Pi p_h^{a_h},$$

e similmente

$$n = \Pi p_k^{b_k} .$$

Poniamo inoltre

$$r = \frac{a}{m} , \; s = \frac{b}{n} ;$$

è chiaro che le quattro coppie di numeri m e n, m e r, n e s, r e s, sono coppie di numeri primi fra loro e che il prodotto rs è il minimo comune multiplo di a e b.

Ora consideriamo l'operazione

$$\pi_1 = \alpha^m \beta^n :$$

il periodo di π_1 sarà $\nu_1 = rs$, essendo i periodi r ed s di α^m e β^n primi fra loro.

Questo periodo ν_1 sarà il massimo possibile che appartenga ad un'operazione di G, ed anzi ogni altro periodo sarà divisore di ν_1, come è chiaro osservando che G è generato dalle operazioni permutabili α e β, e che ν_1 è il minimo comune multiplo dei loro periodi a e b.

Dopo ciò, definita l'operazione

$$\pi = \alpha^r \beta^s ,$$

dimostriamo che π_1 e π generano tutto G. A tale scopo si osserverà che entro il gruppo ciclico G_1, generato da π_1, sono contenute le α^m e β^n (e così in quello generato da π sono contenute α^r e β^s), come segue dall'essere primi fra loro i periodi r ed s di α^m e β^n.

Ora poichè m ed r sono primi fra loro ed $mr = a$, α^m ed α^r generano per moltiplicazione l'intero gruppo delle a potenze di α, e così pure β^n e β^s generano l'intero gruppo delle b potenze di β; per conseguenza π_1 e π dànno l'intero gruppo G generato da α e β.

Ora si consideri il *periodo* ν_2 di π *relativo* al gruppo ciclico G_1 (sarà $\nu_2 = 1$ solo nel caso che G sia ciclico, coincidendo allora con G_1): avremo

$$\pi^{\nu_2} = \pi_1{}^{\mu} ;$$

essendo mn il periodo di π, sarà

$$\frac{mn}{\nu_2} = \frac{\nu_1}{\mu} , \text{ cioè } \mu = \frac{\nu_1}{mn} \nu_2 ,$$

sicchè, essendo ν_1 multiplo di mn, μ appare multiplo di ν_2. Allora l'operazione

$$\pi_2 = \pi \pi_1^{-\frac{\mu}{\nu_2}}$$

ha il periodo assoluto ν_2 uguale al periodo relativo rispetto a G_1, ed essa, insieme a π_1, genera l'intero G, sicchè $n = \nu_1 \nu_2$. Siamo dunque riusciti a costruire le due sostituzioni indipendenti π_1 e π_2 che formano la base del gruppo abeliano G; e π_2 sarà un'effettiva sostituzione qualora G non sia ciclico coincidendo con G_1.

2. Esaminata la struttura del gruppo G, veniamo alla *costruzione effettiva delle curve n-ple* K. Distingueremo due casi, secondochè G è ciclico o no.

a) Caso ciclico. — Sia X $(x\,y)$ la funzione algebrica del punto P di φ che vale a separare gli n punti $P_1\, P_2 \ldots P_n$, ad esso corrispondenti, che appartengono a K: data la ciclicità del gruppo G, secondo cui si permutano $P_1\, P_2 \ldots P_n$ quando P si muove comunque sulla riemanniana di φ, sarà X funzione razionale delle coordinate x, y del punto P e di un radicale n-esimo portante sopra di esse (1); e — per una conveniente trasformazione birazionale — potremo addirittura scrivere per K le equazioni

$$1) \qquad X = \sqrt[n]{\psi(xy)} \quad , \quad \varphi(xy) = 0 .$$

Non essendovi su φ punti di diramazione, la curva $\psi(xy) = 0$ avrà — ovunque incontri la φ — un contatto n-punto. Ed è chiaro che — ove ψ soddisfi a detta condizione — ogni curva K del tipo 1) corrisponde a una φ multipla ciclica, priva di punti di diramazione e quindi di genere $p = 1$.

b) Caso non ciclico. — Il gruppo G abeliano d'ordine $n = \nu_1 \nu_2$ sia generato dalle due sostituzioni base π_1 e π_2 di periodi ν_1 e ν_2 (ν_1 multiplo di ν_2). Allora la funzione X che vale a staccare gli n punti $P_1\, P_2 \ldots P_n$ sarà esprimibile razionalmente per le coordinate x, y del punto P e di due radicali d'ordine ν_1 e ν_2 portanti separatamente sopra di esse (2); e — per una conveniente trasformazione birazionale — potremo addirittura scrivere per K le equazioni:

$$2) \qquad X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)} \quad , \quad \varphi(xy)\, 0 ,$$

dove la curva $\psi_1(xy) = 0$ ha un contatto ν_1-punto ovunque incontri φ, e la $\psi_2(xy) = 0$ ha similmente contatti ν_1-punti. Ed è chiaro che ove ψ_1 e ψ_2 soddisfino alle dette condizioni, ogni funzione X del tipo 2) corrisponde a una curva ellittica multipla rappresentata sulla φ contata $n = \nu_1 \nu_2$ volte col gruppo di monodromia G.

Vedremo poi per i due casi quando si abbiano curve K irriducibili e come si caratterizzino le K birazionalmente distinte.

(1) Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni...* (Pisa, 1900), cap. VI, §§ 74, 75.

(2) Cfr. p. es. Bianchi, op. cit., cap. VI, § 76.

Meccanica. — *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile.* Nota della dott.ssa CARLA MADERNI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (1).

Espongo un nuovo caso di integrabilità per l'equazione differenziale del moto nel problema dei due corpi di massa variabile e cioè quando la massa è funzione lineare del tempo e l'attrazione è inversamente proporzionale alla quinta potenza delle distanze. Questo nuovo caso può assumere una certa importanza nella teoria delle molecole gassose: ed in ogni modo è *l'unico conosciuto* dopo quello ben noto del Metschersky (cioè quando la forza è Newtoniana e si ha $M(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}$)

Cominciamo ad osservare che la forza attrattiva agisce nella direzione della distanza reciproca e quindi il moto è piano ed ha luogo con la legge delle aree. Per determinare il movimento abbiamo allora le due equazioni differenziali:

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \quad , \quad \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - f\frac{a + bt}{r^5}$$

Senza nulla togliere alla generalità del problema possiamo supporre la costante delle aree c ed il coefficiente attrattivo f eguale all'unità; e inoltre possiamo scegliere l'origine dei tempi e l'unità di tempo in modo che si abbia $a = 0$, $b = 1$.

Eliminando $\frac{d\vartheta}{dt}$, il sistema (1) diventa:

$$(2) \qquad r'' = \frac{1}{r^3} - \frac{t}{r^5}$$

Per integrare questa equazione differenziale del 2° ordine poniamo:

$$(3) \qquad r = e^{\frac{\lambda}{2}} z \qquad (4) \qquad t = e^{\lambda}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Facendo la derivata prima di r rispetto a t, ricordando cho t è funzione di λ, avremo:

(1) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\lambda} z + e^{-\frac{\lambda}{2}} z'$$

e derivando una seconda volta:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}\lambda} z + e^{-\frac{3}{2}\lambda} z'' \tag{5}$$

z' z'' designando evidentemente derivate di z rapporto a λ.

Ricavati dalle (3) e (4) i valori di $\frac{1}{r^3}$ e $\frac{t}{r^5}$, li sostituisco nella (2) assieme alla (5). Abbiamo:

$$-\frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}\lambda} z + e^{-\frac{3}{2}\lambda} z'' = \frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda}}{z^3} - \frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda}}{z^5}$$

e riducendo:

$$-\frac{1}{4} z + z'' = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}$$

Moltiplico ambo i membri di questa equazione per $2z'$. Integrando termine a termine e ordinando si ha:

$$z'^2 = \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + h$$

dove h è una costante di integrazione.

Quindi:

$$\lambda = \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + h}} + c$$

Se poniamo: $z^2 = \frac{1}{u}$ il nostro integrale si trasforma nel seguente:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^3} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} - u + \frac{1}{2} u^2 + h}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{\frac{1}{2} u^3 - u^2 + hu + \frac{1}{4}}}$$

Questo integrale ellittico si può ridurre alla forma normale di Legendre facendo le posizioni:

$$u = \alpha + (\beta - \alpha)\, y \qquad K^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \qquad n = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$$

essendo α, β e γ le tre radici del polinomio di 3° grado: $\frac{1}{2}u^3 - u^2 + hu + \frac{1}{4}$ che si può mettere anche sotto la forma: $\frac{1}{2}(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$.

Il nostro integrale diviene.

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\,\{\alpha + (\beta-\alpha)\,y\}\,y\,(1-y)\,(1-K^2y)}}$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}} \cdot \frac{1}{\alpha}\int \frac{dy}{(1+ny)\sqrt{y(1-y)\,(1-K^2y)}}$$

Ponendo ora $y = x^2$, avremo:

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}} \cdot \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)\,(1-K^2x^2)}}$$

Siamo così pervenuti a un integrale di III specie di Legendre che ci dà il valore di λ. Conosciuto λ in funzione di z, per la prima equazione del sistema (1) possiamo avere anche ϑ e quindi il moto risulta perfettamente determinato.

Fisica. — *Punti di trasformazione di alcuni metalli e leghe in rapporto al potere emissivo* (1). Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal Corrisp. M. Cantone (2).

Lo studio del potere emissivo del nichel quale funzione della temperatura ha dimostrato che questa proprietà al pari delle proprietà elettriche e magnetiche si presta benissimo per rilevare le trasformazioni interne che subisce il metallo sotto l'azione dei processi termici. Ho creduto perciò opportuno di applicare il metodo ad altri metalli e leghe per delineare le modalità con cui si compie il fenomeno dal punto di vista energetico.

Il dispositivo sperimentale era quello adoperato nello studio generale dell'emissione metallica: le lamine venivano riscaldate in un forno elettrico

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

dove quasi a contatto con esse si collocava la saldatura di un elemento Le Chatelier, e l'energia irradiata era misurata dalle indicazioni di un galvanometro inserito nel circuito del cannocchiale pirometrico di Féry, il quale serviva da ricevitore.

Fra le trasformazioni osservate vi sono quelle di natura chimica (ossidazioni), le quali sono accompagnate da un'emissione di calore, e quelle di natura fisica (variazioni nella struttura), le quali si compiono con un assorbimento di calore. Il fenomeno è bene illustrato nel caso del *ferro* (v. tabella e fig. I), dove il potere emissivo, il quale in media si accresce di 0,0009 per grado per il metallo, subisce un brusco incremento fino a raggiungere il valore di 0.0046 per grado durante l'ossidazione, vale a dire aumenta bruscamente nel rapporto di 1 a 5; invece intorno al punto critico magnetico il potere emissivo. il quale in media aumentava di 0,0006 per grado, subisce una rapida diminuzione che ammonta a 0,037 per 10°, vale a dire decresce in rapporto di 1 a 6.

Rispetto all'assorbimento di calore con cui procede la trasformazione nell'intorno del punto critico del metallo, noto una completa analogia con un particolare caso di fusione che ho avuto occasione di constatare durante un'altra ricerca, e precisamente colla fusione dei metalli ossidati.

Per i metalli in cui tutta la massa partecipa al passaggio di stato, come ad es. per l'argento, oro, si riscontra una notevole diminuzione dell'energia emessa; invece per quelli in cui dopo la fusione persiste lo strato superficiale, come ad es. alluminio, rame, vi è solo un arresto nell'energia irradiata, il quale dura finchè tutto il metallo è passato nello stato liquido.

Nella *trasformazione del ferro* si nota un arresto nell'emissione durante la fase culminante del processo, cioè da 727° a 739° C.; però le condizioni normali per quanto alterate, poichè il metallo è diventato più speculare, si stabiliscono solo dopo i 776° C. Riuscì vantaggioso di eseguire lo studio, anzichè secondo le curve energetiche, secondo l'andamento che presenta colla temperatura il potere emissivo relativo (a meno di una costante) da noi indicato con $\frac{E}{T^4}$, dove E indica l'energia irradiata, valutata in divisioni del galvanometro pirometrico, alla temperatura assoluta T.

Ossidazione del ferro.

T	549	593	*626*	*646*	*695*	*728*	782	833	917	979
E	1,3	2,2	3,2	5,3	11,9	18,8	26,6	37,3	58,0	78,1

Trasformazione del ferro.

T	815	851	884	930	960	*1000*	*1011*	*1013*	*1023*	*1050*	1092	1147	1192
E	36,6	45,5	54,6	69,0	80,0	94,9	95,5	96,6	101,1	113,0	135,6	173,9	214.7

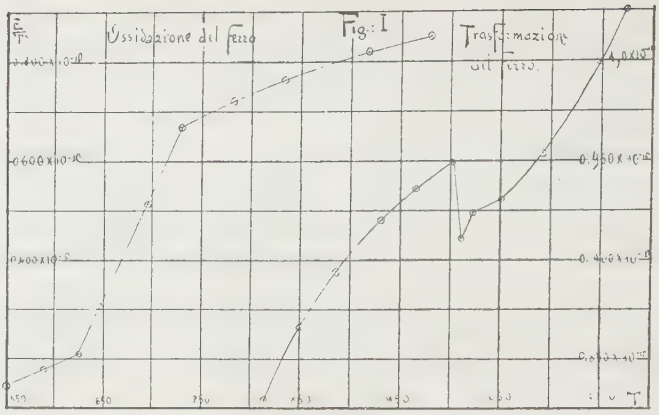


Fig. 1.

Per lo studio del comportamento anomalo delle leghe furono scelte due leghe di *acciaio al nichel*, una irreversibile (8 %), e l'altra reversibile (una delle varietà di platinite).

Il *campione 8 %* fu ridotto in lamina in due modi diversi: un pezzo fu assottigliato per mezzo del tornio e della lima, e un altro fu parecchie volte riscaldato e dopo ogni ricuocimento passato per il laminatoio, in modo che dallo spessore iniziale di 2 mm. venne ridotto a 0,4 mm., e ciò allo scopo di produrre un notevole incrudimento.

Al riscaldamento, si constatò una trasformazione in entrambi i campioni, ma con modalità ben diverse. Nel metallo grezzo la trasformazione è breve e brusca da 586° a 601° C., e con una perdita di calore nel rapporto da 1 a 3 (v. tabella e fig. II). Nel metallo incrudito il processo è lungo e lento, con una zona di trasformazione da 520° a 635° C., nella quale si distinguono tre fasi: nella iniziale fino a 546° C. la perdita di calore è massima, e l'energia irradiata si riduce nel rapporto di 1 a 2,5; poi segue una fase stazionaria fino a 593° C., in cui il calore impiegato per la trasformazione è compensato dall'aumento di energia raggiante in seguito all'incremento di temperatura; nella fase di ritorno l'energia si accresce nel rapporto presso a poco uguale a quello della fase iniziale.

Acciaio al nichel 8 % grezzo.

T	748	770	810	*859*	*874*	888	915	950	975
E	21,4	25,7	33,7	45,1	47,9	51,6	62,3	73,3	83,6

Acciaio al nichel 8 % incrudito.

T	732	760	*794*	*814*	*837*	*866*	*902*	920	956	987
E	19,2	24,6	31,1	33,9	36,9	42,3	50,8	59,4	74,3	87,8

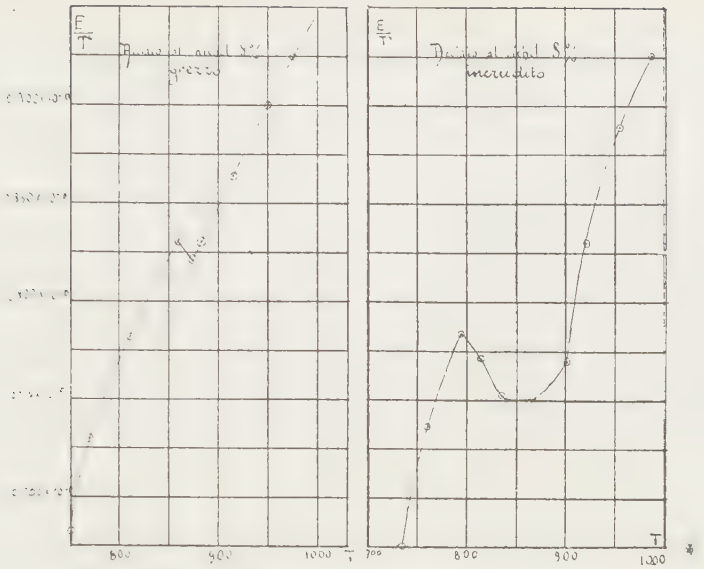


Fig. 2.

Un particolare di natura analoga è stato osservato dal Le Chatelier (1) nella variazione di resistenza colla temperatura di una lega di ferro con 5 % di nichel. Mentre nel filo crudo egli nota due punti di trasformazione, nel filo ricotto, perchè cimentato per temperatura decrescenti, i due punti si uniscono in uno solo. Si può concludere quindi che l'incrudimento anche dal punto di vista termico rende la lega meno omogenea, poichè rende più estesa e più marcata la zona di trasformazione, e quindi più difficile il passaggio verso il nuovo assetto.

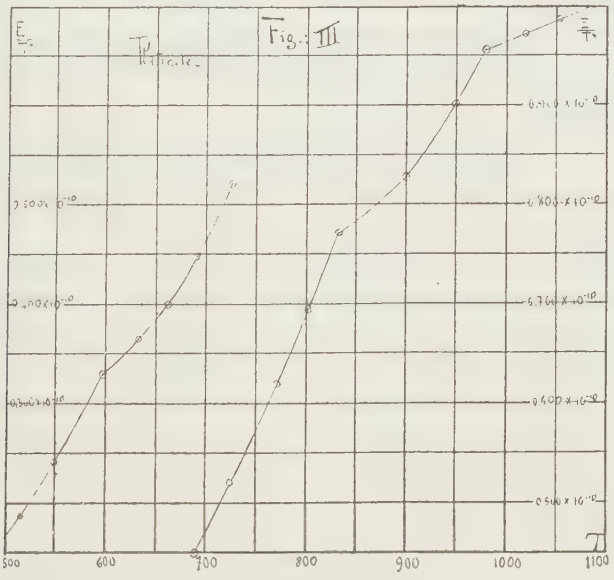


Fig. 3.

(1) Comptes Rendus, 1890, pag. 458.

Il campione di *platinite* da me esaminato subì un forte incrudimento, perchè fu ridotto in lamina sottoponendo una spirale di filo di 2 mm. alla compressione in un maglio. In questa lega si vedono nettamente i punti critici dei metalli componenti, uno a 525° C. probabilmente dovuto al nichel, e l'altro verso i 700° C., in corrispondenza al punto singolare del ferro (v. tabella e fig. III). L'aggiunta del secondo metallo fa abbassare ciascun punto rispetto alla sua posizione nel metallo puro; l'incrudimento poi fa estendere la seconda trasformazione ad una zona da 560° a 708° C. Rispetto all'energia impiegata, le due trasformazioni si comportano presso a poco in modo identico, poichè nell'intorno di ciascun punto critico l'energia emessa viene ridotta nel rapporto di 1 a 1,6; si tratta evidentemente di un processo meno energico rispetto a quello che si compie nei metalli puri e nelle leghe irreversibili.

Platinite.

T	514	551	*599*	632	664	691	724	770	800	*832*	*900*
E	1,3	2,2	4,2	5,8	7,7	10,2	14,3	21,8	28,5	36,9	54,2
						950	*981*	1017	1053	1088	
						73,3	88,6	104,2	121,3	140,0	

Riassumendo si conclude che:

1°) Il potere emissivo costituisce un mezzo molto sensibile per rilevare le modificazioni di struttura che subisce il metallo sottoposto a processi termici: il metodo presenta anche il prezioso vantaggio di fornire un mezzo per l'apprezzamento della quantità di calore messa in gioco durante la trasformazione.

2°) Dal punto di vista energetico le trasformazioni di struttura si comportano come la fusione dei metalli ossidati, e il calore impiegato è minore nelle leghe che nei metalli puri.

3°) L'incrudimento delle leghe rende più estesa la zona di trasformazione.

Ringrazio il prof. Cantone per tutti gli aiuti e consigli dei quali mi è stato prodigo durante questa ricerca.

Paleontologia. — *L'Ordoviciano nel Caracorùm orientale.* Nota di Michele Gortani, presentata dal Corrisp. G. Dainelli [1].

Tra le faune paleozoiche scoperte e raccolte dai proff. Dainelli e Marinelli nell'Asia centrale, e delle quali essi mi vollero cortesemente affidare lo studio, hanno speciale importanza tre piccole faune ordoviciane rinvenute in tre livelli immediatamente sovrapposti, nella parte orientale della catena del Caracorùm.

Lo studio dei fossili è tutt'altro che agevole, date le scarse affinità con le faune ordoviciane note e dato il cattivo stato di conservazione della massima parte degli esemplari.

Molte sono le forme nuove, che ritengo inutile citare in questa Nota; ricorderò invece i principali generi rappresentati, per dare un'idea meno vaga del carattere complessivo di tali avanzi.

Nello strato inferiore, che per l'assoluta prevalenza di *Endoceras* e *Orthoceras* può definirsi strato a Ortoceratidi, ho riconosciuto:

Orthis (*Triplecia*) sp.
Sphaeronis? sp.
Endoceras Wahlenbergi Foord
Orthoceras n. f. (af. *novator* Barr.).
O. n. f. (gruppo dell'*O. annulatum* Sow.).
Calymene birmanica Reed
Asaphus n. f. (af. *pachyophtalmus* Schmied.).
Nileus Armadillo Dalm. sp.
Illaenus Esmarcki Schloth. sp.
Proëtus n. f.

Anche il *Nileus Armadillo* è abbastanza frequente.

Nello strato medio, dove prevalgono le forme di *Orthis* (s. l.), ho determinato:

Orthis calligramma Dalm.
O. (*Schuchertella*) *planissima* Reed
O. (*Dalmanites*) *Mansuyi* Reed
O. (*Triplecia*) sp.
Neobolus n. f.
Bellerophon sp.
Endoceras Wahlenbergi Foord
Orthoceras sp. (gruppo dell'*O. annulatum*).
Illaenus cfr. *Esmarcki* Schloth. sp.
I. af. *spitiensis* Reed.

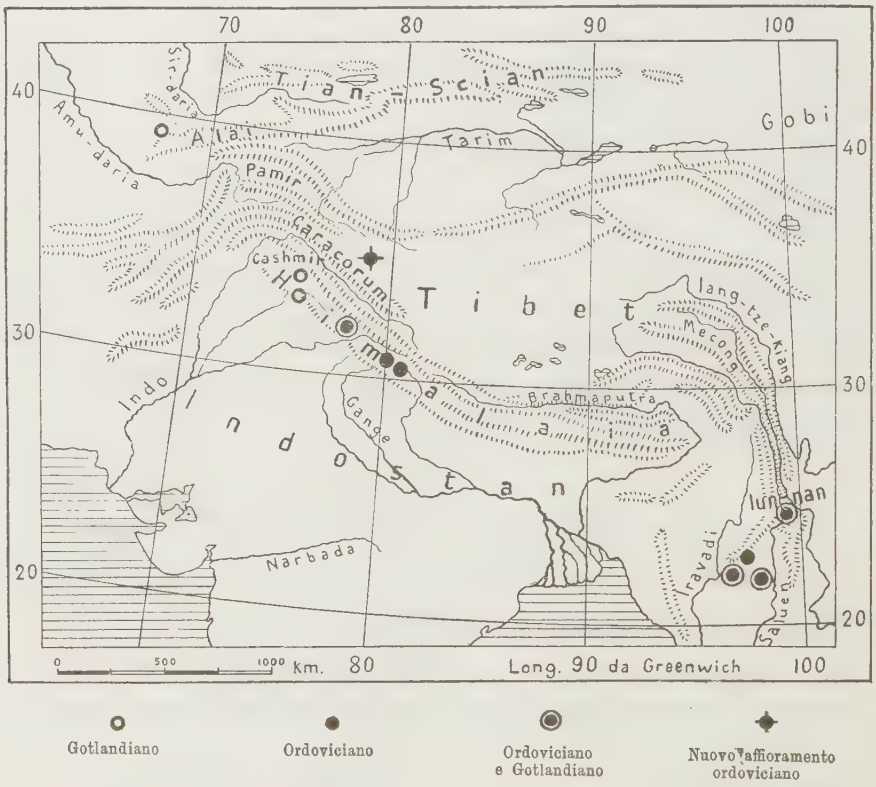
[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

Lo strato superiore è contraddistinto da grande abbondanza di Gasteropodi mal conservati (forme larghe e piatte di *Raphistoma*) e di *Orthidae*:

Orthis testudinaria Dalm.
O. testudinaria v. *shanensis* Reed
O. calligramma Dalm.
O. cfr. *alternata* Sow.
O. tibetica Salter
O. (*Dalmanella*) *basalis* v. *muthensis* Reed
Bellerophon n. f.
Raphistoma cfr. *qualteriatum* Schloth. sp.
R. nn. ff.
Asaphus Emodi Salter
Illaenus sp.
Phacops n. f.

Benchè scarse di numero, le forme determinabili con sicurezza permettono tuttavia un riferimento cronologico abbastanza preciso.

Cartina schematica degli affioramenti siluriani fossiliferi nell'Asia Centrale.



Lo strato inferiore ha tre specie che si possono considerare fossili guida per l'Ordoviciano profondo: *Endoceras Wahlenbergi* (= *E. duplex* Auct. pl.), *Illaenus Esmarcki* e *Nileus Armadillo*, proprie del livello corrispondente all'Arenig inglese. Allo stesso livello appartiene anche la *Calymene birmanica*.

Nello strato medio, Ortoceratidi e Trilobiti son rari; l'*Endoceras Wahlenbergi* è però ancora presente, e vi è una forma che sembra identica all'*Illaenus Esmarcki*. Le svariate *Orthidae* accennano invece a un'età più recente; l'*Orthis calligramma* è dell'Ordoviciano medio e superiore, l'*O. planissima* e l'*O. Mansuyi* sono state rinvenute nella Birmania settentrionale in un orizzonte che pare riferibile al Gotlandiano inferiore.

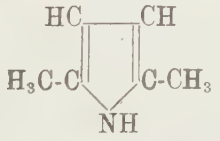
Considerazioni analoghe si possono fare per le *Orthidae* dello strato superiore, benchè l'*O. testudinaria* e l'*O. tibetica* siano schiettamente Ordoviciane (Ordoviciano medio e alto); dell'Ordoviciano medio è proprio il *Raphistoma qualteriatum*.

Nell'insieme, l'età ordoviciana di tutti tre gli strati mi sembra fuori di discussione. Procedendo dall'inferiore al superiore, pare che alla differenza di *facies* si accompagni un procedere verso più giovani termini della serie, senza però raggiungere ancora la base del Gotlandiano.

La scoperta di una così antica formazione paleozoica nel Caracorùm orientale ha notevole interesse per la geologia stratigrafica. Nulla finora ne faceva supporre l'esistenza, all'infuori di un accenno molto vago contenuto nella relazione preliminare del Dainelli e del Marinelli (1). E le formazioni siluriane note finora nell'Asia centrale sono così rade, scarse e limitate alle catene periferiche (cfr. l'unita cartina), che l'attuale rinvenimento, a circa 300 km. di distanza dai più prossimi, dà luce nuova e inattesa anche sulla struttura dell'interno dell'altipiano tibetano.

Chimica biologica. — *Pirrolo e melanuria* (2). Nota IV di Pietro Saccardi, presentata dal Socio A. Angeli (3).

Dopo i risultati ottenuti nell'ossidazione intraorganica ed enzimatica del pirrolo ho voluto sperimentare in modo analogo l'α-α-dimetipirrolo:



per vedere soprattutto, se, non ostante i due metili, potesse dare origine a melanina. L'α-α-dimetilpirrolo è un liquido di odore caratteristico, altre volte avvertito in cani tenuti a solo regime carneo, e, come il pirrolo, assai so-

(1) In Dainelli G. e Marinelli O., *Relazione preliminare sui lavori scientifici della spedizione De Filippi al Karakorùm (1913-14)*. Riv. Geogr. Ital., XXII, 1915, estr. di 21 pagine. A pag. 14 si accenna alla possibile esistenza di qualche piano più antico del Carbonifero.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica della L. Università di Camerino.

(3) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

lubile in alcool e solventi anidri, pochissimo solubile in acqua. In acqua lievemente alcalina prima s'emulsiona, poi finisce per sciogliersi impartendole colorazione giallognola. A differenza del pirrolo (1) il suo comportamento in vitro con i comuni reattivi del pirrolo e del melanogeno è il seguente:

Reattivi	dopo 10 m.	dopo 12 ore	dopo 24 ore	dopo 24 ore	dopo 48 ore	Spettro d'assorbimento
ac. cloridrico e cloruro ferrico	nulla	nulla	color giallo-scuro	color arancio	rosso-arancio	nulla di notevole
ac. nitroso	giallo	giallo-rosso	rossastro	rossastro	rossastro	» » »
miscela cromica	nulla	color giallo	arancione	rosso-scuro	rosso-scuro	» » »
acqua di cloro	nulla	nulla	nulla	nulla	nulla	» » »
ac. nitrico conc.to	giallo	giallo	giallo	giallo	giallo	
ozono	nulla	nulla	nulla	nulla	nulla	» » »

Da cui risulta che il comportamento dell'α-α-dimetilpirrolo coi suddetti reattivi, è, relativamente a reazioni del pirrolo e del melanogeno, completamente negativo. Solo la reazione di Thormählen è positiva, però essa è così caratteristica che si distingue nettamente da quella data da pirrolo e da melanogeno ottenuto per ossidazione intraorganica del pirrolo.

Infatti, mentre nella reazione di Thormählen, il colore azzurro ottenuto con acido acetico è più o meno stabile a seconda della quantità di melanogeno, e passa al vinoso per dar luogo infine ad un precipitato bleu, il colore azzurro ottenuto con le soluzioni acquose di α-α-dimetilpirrolo vira subito in verde che passa al giallo nel termine di due ore. Questo diverso comportamento del nitroprussiato sodico colle soluzioni di α-α-dimetilpirrolo e che chiameremo lab-Thormählen servirà assai nelle analisi delle orine più oltre esposte.

Le esperienze di ossidazione intraorganica dell'α-α-dimetilpirrolo, furono intraprese su di un coniglio del peso di kgr. 2,400 a cui furono iniettati cc. 2 di una soluzione acquosa all'1 %, lievemente alcalina per soda di α α-dimetilpirrolo, e, dopo 12 ore, non avendo orinato, altri 2 cc.

(1) *Pirrolo e melanuria.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVIII, ser. 5ª, I° sem., fasc. 8°, pag. 310; vol. XXVIII, ser. 5ª, II° sem., fasc. 3°, pp. 85-86.

Il coniglio sta benissimo. L'orina, ottenuta solo 28 ore dopo la prima iniezione presenta tutti i caratteri analitici delle orine normali, solo è più scura e tende ad imbrunire all'aria. L'orina ottenuta dopo iniezione di gr. 0,50 di α-α-dimetipirrolo, propinato in una sola volta, in soluzione come sopra, presenta invece forte dicroismo verde, come dopo iniezione di pari dose di pirrolo, senza però accusare neppure ora, traccia alcuna di urobilina o di pigmenti biliari. Il coniglio non presenta nessun fatto infiammatorio locale e nessuna colorazione notevole alla pelle od ai peli; l'iniezione s'è mostrata indolora e l'organismo si comporta rispetto all'α-α-dimetilpirrolo come verso un composto a lui familiare al pari del pirrolo. Le orine, divenute scure, tornano del colore naturale per acidificazione, con la quale scompare anche il dicroismo, ma non ritornano scure per successiva alcalinificazione con soda o con potassa. Esse presentano tutte le reazioni altre volte riscontrate nelle ricerche sul pirrolo, e cioè:

Thormählen.	Positivo il vero Thormählen e quindi colorazione azzurra stabile con acido acetico e conseguente viraggio al rosso.
Con cloruro ferrico ed acido cloridrico.	Colorazione bruna, oppure bell'anello bruno se i liquidi si tengono separati, indi precipitato nero.
Con acido nitrico conc. (Heller).	Anello bruno come sopra.
Con acido solforico ed una goccia di bicromato al 10 %.	Intorbidamento e quindi precipitato bruno.
Con soluzione acetica di nitrito potassico	Colorazione bruna persistente.
Con acqua di cloro	Colorazione bruna.
Diazoreazione di Ehrlich . .	Positiva.

Dalla reazione di Ehrlich consegue che insieme a composti pirrolici (Thormählen) si eliminano sostanze inerenti o no al melanogeno che dànno positiva tale reazione.

Le orine del coniglio mostrano lievi, ma positive, le reazioni del melanogeno in orine raccolte anche diverse ore dopo (anche 18) la prima raccolta delle orine e ciò a differenza di quelle ottenute dopo iniezione di pirrolo.

Le acque di lavaggio dell'etere con cui furono sbattute queste orine non mostrano più forti le suddette reazioni.

Da questi risultati, e specialmente dalla suddetta reazione di Thormählen, si deduce che mentre in vitro l'α-α-dimetilpirrolo non dà melanogeno, introdotto nell'organismo animale si modifica profondamente certo sme-

tilandosi, poichè anche ad alte dosi di α-α-dimetilpirrolo le orine non mostrano mai la lab-reazione di Thormählen. Nulla di più facile che, al pari di tante altre sostanze metilate, l'organismo carbossili l'α-α-dimetilpirrolo per ossidazione dei metili, e che, forse per questi carbossili, l'anello pirrolico si leghi al resto della molecola del melanogeno. Infatti ossidando cautamente con permanganato potassico una soluzione lievemente alcalina di alcune gocce di α-α-dimetilpirrolo, si ha un liquido che dà ancora il lab-Thormählen, ma che reagisce anche con gli ossidanti, per quanto meno intensamente del melanogeno.

Nelle precedenti Note affermai come melanuria si aveva benissimo anche per ingestione di pirrolo. Per confronto ho ingerito a distanza di 2 ore gr. 0,5 di α-α-dimetilpirrolo. La sostanza è ributtante al gusto ma non rigurgita come il pirrolo e non dà disturbo alcuno. Però le orine, sempre normalissime, non cominciano a dare la reazione di Thormählen altro che 6-8 ore dopo l'ingestione. Esse sono di color rosso-arancio, imbruniscono poco col tempo ed alle altre reazioni si comportano come le orine lievemente melanotiche. La diazoreazione è lieve come il Thormählen. L'eliminazione dell'α-α-dimetilpirrolo è lentissima. Le acque di lavaggio dell'etere con cui furono dibattute queste orine non mostrano più accentuate le suddette reazioni. Ciò dimostra che l'eliminazione dell'α-α-dimetilpirrolo, propinato per via orale, è più lenta di quello dato sottocute e più lenta e più debole assai di quella ottenuta per ingestione di pirrolo. Forse non solo il fegato lo accumula per più lungo tempo, ma l'organismo deve evidentemente faticare di più che per il pirrolo ad ossidarlo ed a distruggerlo. In ogni caso il lab-Thormählen più non esiste nelle orine che presentano invece i neri di ossidazione come non li presenta l'α-α-dimetilpirrolo in vitro e mostrano la presenza di un melanogeno di reazioni identiche a quello ottenuto per iniezione od ingestione di pirrolo.

L'α-α-dimetilpirrolo si presenta anch'esso come una sostanza non estranea all'organismo animale.

Inoltre, allo scopo di fare un parallelo fra l'ossidazione enzimatica del pirrolo e dell'α-α-dimetilpirrolo ho posto in tubi da saggio con succhi sterili di patata, di fegato e di milza bovini gr. 0,50 caduno di α-α-dimetilpirrolo, mantenendoli in termostato a 38 cg. Dopo alcuni giorni i succhi sono diventati rossi e non accennano ad imbrunire ulteriormente. Il filtrato rosso non dà più il lab-Thormählen.

L'ossidazione enzimatica in vitro non basta adunque a trasformare l'α-α-dimetilpirrolo in melanogeno e melanina. Ho così ottenuto una graduazione fra ossidazione per via ipodermica orale ed enzimatica dell'α-α-dimetilpirrolo.

Compio il grato dovere di ringraziare il prof. A. Angeli per un campione di α-α-dimetilpirrolo messo a mia disposizione.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* $(NH_4)_2O - B_2O_3 - H_2O$ (*a* 0° *e a* 10°) [1]. Nota V di Umberto Sborgi e Leonello Mezzetti, presentata dal Socio R. Nasini [2].

Riferiamo sommariamente sui risultati ottenuti nello studio di questo sistema alle temperature di 0° e di 10°.

I criterî di studio, i dispositivi sperimentali ed i metodi analitici adoprati sono quelli stessi delle ricerche a 30° e a 60° eseguite da uno di noi (solo e in collaborazione) e già descritte in questi Rendiconti [3]. Per quanto riguarda i dispositivi termostatici, rimandiamo, per risparmio di spazio, ad altra Nota [4] che descrive esperienze eseguite a 0° e a 10°; i dispositivi là adoperati servirono anche per le presenti ricerche.

Nella tabella I riportiamo i risultati ottenuti alla temperatura di 0°; nella tabella II quelli alla temperatura di 10°; nella fig. 1 e nella fig. 2 questi risultati sono espressi graficamente in diagrammi triangolari di Roozeboom.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(3) U. Sborgi, *Sui borati, Sistema* $(NH_4)_2O - B_2O_3 - H_2O$. Nota I, questi Rendiconti, vol. XXI, serie 5ª, 2° sem., pag. 855; Nota II, ibid., vol. XXII, serie 5ª, 1° sem., pag. 90; U. Sborgi e F. Mecacci, *Sistema* suddetto, Nota III, ibid., vol. XXV, serie 5ª, 2° sem., pag. 386, e Nota IV (erroneamente indicata come Nota III), ibid., vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 1225.

(4) U. Sborgi e C. Franco, Gazz. Chim. Ital. 41, p. 2. 1.

TABELLA I. — Temperatura 0°.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del Resto			
			$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	
1	$H_3BO_3 + H_2O$	ore 72		1.462	98 538				H_3BO_3
2a	$H_3BO_3 + 1.5.8 + H_2O$	72	0.37508	3.240	96.38492				
b		84	0.37546	3.261	96.36354	1.7052	36.055	62.1798	H_3BO_3+1.5.8
3a	" " "	96	0.37805	3.2511	96.37035				
b		132	0 3746	3.240	96 3854	2.4818	38.312	59.2062	"
4a	$1.5.8 + H_2O$	72	0.52251	3.4504	96.02709				
b		120	0.51065	3.4447	96.044065				1.5.8
5a	$1.2.4 + 1.5\,8 + H_2O$	96	1.3120	5.428	93.260				
b		120	1.3170	5.4247	93.2583	12.490	44.381	43.129	1.5.8—1.2.4
6a	$1.2.4 + 1.5.8 + H_2O$	108	1.3169	5.429	93.2541				
b		120	1.3189	5.489	93.1921	8.0964	32.372	59.5316	"
7a	$1.2.4 + H_2O$	72	1.015	2.739	96.246				1.2.4
8a	$1.2.4 + NH_4OH + H_2O$	168	18.075	0.9372	80.9878				
b		180	18.10	0.9145	80.9855	19.482	33 294	47.304	"
9	" " "	10	28.623	0.5031	70.8739	25.60	26 03	48.37	"
10	" " "	10	45.21	0.40	54.39	30.54	32.20	36.80	"
11	" " "	10	62.91	0.20	36 89	30.905	40.67	28.425	"

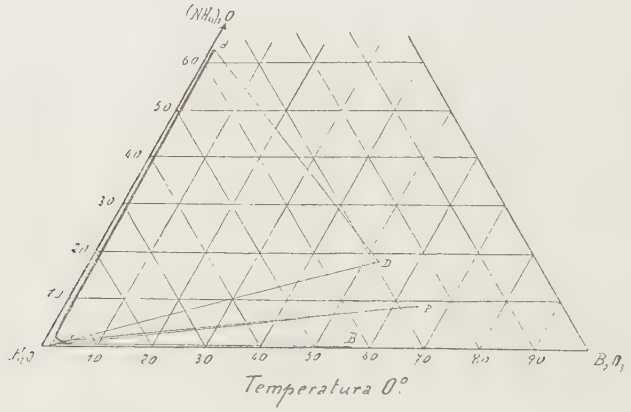


FIG 1.

Segue TABELLA II.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del Resto			
			$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	
		ore							
36*a*	1.2.4.+NH_4OH+H_2O	24	7.1128	2.2366	90.6506				
b		48	7.14216	2.238	90.61984				
c		60	7.1433	2.2105	90 6462	16.673	39.906	43.421	1.2.4
37*a*	» »	24	8 3252	2.065	89.6098				
b		60	8 3428	2 0913	89.5559				
c		84	8 3532	2.092	89.5948	18.486	46.271	35.243	»
38*a*	» »	120	8.900	1.9481	89.1502				
b		132	8.901	1.94904	89.14996				
c		156	8 910	1.9296	89.1604	16.60	39.906	43 494	»
39*a*	» »	96	8.873	2 084	89.043				
b		108	8 946	2 023	89.031				
40*a*	» »	84	9.2536	1.9656	98 7708	18.126	45.97	35.904	»
b		96	9.2644	1.9671	98.7685				
c		108	9.266	1.9763	98.7577	17.176	38.639	44.185	»
41*a*	» »	96	9.4066	1.8801	98.7133				
b		120	9.407	1.8859	98.7071				
c		144	9.4098	1.8975	98.6927	16.055	32.86	51.085	«
42*a*	» »	84	10·109	1.8618	88.0292				
b		96	10.109	1.863	88.028				
c		108	10 102	1.861	88.8037	17.16	39.573	43.267	»
43*a*	» »	144	10.832	1.7897	87.3783				
b		156	10.840	1.7807	87.3793	17.612	38.291	44.097	»
44*a*	» »	96	11.788	1.6774	86.5343				
b		108	11.798	1.6767	86.5253				
c		120	11.790	1.6763	86.5337	16.993	33.587	44.420	»
45*a*	» »	84	11.84	1 6488	86.5112				
b		96	11.86	1.6475	86 50				
c		132	11 86	1 6419	86.4921	18.28	46.546	35.174	»
46*a*	» »	132	15.876	1 3675	82.7565				
b		144	15.881	1 2516	82.8674				
c		156	15.883	1.2518	82.8652	17.45	34.372	48.178	»
47*a*	» »	72	20.026	1.0323	78.9417				
b		120	20.309	1.032	78 659				
c		144	20.312	1.038	78.650				
d		168	20.312	1.0264	78.6616	20.57	37.004	42.426	»
48*a*	» »	72	20.42	0.951	78.629				
b		144	20.450	0.9519	78.5981				
c		156	20.456	0.94694	78.59706	21.25	38.03	40.72	»
49*a*	» »	120	20.72	0,9472	78 3328				
b		156	20.75	0.90731	78.34269	21.399	31 118	47.483	»
50*a*	» »	168	22.776	0.81646	76.40754				
b		180	22.793	0.86818	76 33882				
c		192	22.81	0.8146	76.3754	22.61	35.016	42.374	»
51	» »	8	25.01	0.97	74.02	22.45	34 67	42.88	»
52	» »	10	45.37	0.67	53.96	29 41	37.63	32.96	»
53	» »	10	52.34	0.48	47.18	30.94	36.79	32.27	»

TABELLA II. — Temperatura 10°.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del Resto			
			$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	
		ore							
1	$H_3BO_3 + H_2O$	24		1.9635	98.0365				H_3BO_3
2a	$H_3BO_3 + 1.5.8$	48	0.1576	2.7995	97.0429				
b		120	0.1586	2.7995	97.0419	0.09969	37.13	62.77031	»
3a	» »	24	0.3476	3.7358	95 9166				
b		30	0.3462	3.8143	95 8395				
c		144	0.3495	3.8341	95.8164	0.13408	37.63	62.23592	»
4a	» »	48	0.47936	4 3312	95 18944				
b		72	0.47603	4.3587	95.16527	3.6705	39.608	56.7215	»
5a	» »	96	0.4911	4 4167	95.0922				
b		108	0.4929	4.4713	95.0358				
c		120	0.4935	4.4367	95.0698	2.1633	35.907	61.9297	H_3BO_3—1.5.8
6a	» »	144	0.4969	4 517	94.9861				
b		192	0.4973	4.469	95.0337	4.3078	39.33	56.3622	»
7a	» »	168	0.50054	4.3681	95.13136				
b		192	0.5033	4.3737	95,123	4.251	41.726	54.023	»
8a	» »	144	0.51386	4.4364	95.04974				
b		168	0.51505	4.4454	95.03935	6.6374	45.548	47.8146	1.5.8
9a	$1.5.8 + H_2O$	24	0.6813	4.6949	94 6238				
b		120	0.7060	4.698	94.596	4.9252	33.034	62.0408	»
10a	$1.5.8 + 1.2.4 + H_2O$	144	0.9548	5.2705	93.7744				
b		168	0.96115	5.3055	93.73335				
c		180	0.9575	5.2655	93.777	5 8482	51.841	42.3108	»
11a	» »	24	0.9792	5.4386	93 5822				
b		48	0.9954	5.6274	93 3772				
c		120	0.9973	5.2067	93.796	6.5217	42.712	50.7663	»
12a	» »	48	1.03995	5.4142	93 54585				
b		108	1.0406	5.4813	93.4781	6.256	48.145	45.630	»
13a	» »	48	1.045	5.502	93.453				
b		108	1.045	5.509	93.446	6.3148	43.572	50.1132	»
14a	» »	36	1.2982	6.2078	92.494				
b		48	1.300	6.2074	92.4926				
c		60	1.300	6.2454	92.4543	6.8025	51.334	41.8635	»
15a	» »	24	1.388	6 5692	92.0428				
b		72	1.3887	6.5648	92.0475	7.2396	49.915	42.845	»
16a	» »	60	1.7249	7.6205	90.6546				
b		96	1.7277	7.6221	90.6502	6.459	44.28	49.261	»
17a	» »	24	1.883	7.8436	90.2734				
b		48	1.8932	8.104	90.0028				
c		60	1.9028	8.158	89.9392	5.215	48.356	46.429	»
18a	» »	48	1.9793	8.2516	89.7691				
b		96	1.987	8.2506	89.7624	15.068	47.628	37.304	1.5.8—1.2.4
19a	» »	36	1.9824	8.3295	89.6881				
b		60	1.9834	8.3122	89.7040	6.4515	35.55	57.9985	»
20a	» »	120	1.9897	8.2505	89.7598				
b		156	1.985	8.262	89.753	12.766	41.06	46.174	»

Segue TABELLA II.

N. d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione	Composizione della soluzione			Composizione del Resto			
			$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	$(NH_4)_2O$%	B_2O_3 %	H_2O %	
		ore							
21*a*	1.5.8 + 1.2.4 + H_2O	96	1.9059	7 810	90.2841				
b		120	1.9067	7.825	90.2683				
c		132	1.9126	7.829	90.2584	14.259	39.56	46.181	1.2.4
22*a*	" "	72	1.8762	7.546	90 5778				
b		84	1.8796	7.5996	90.5208				
c		108	1.8852	7.5642	90.5503	15.774	43.704	40.522	"
23*a*	" "	48	1.7213	6.7862	91.4925				
b		60	1 7255	6.8438	91.4307				
c		84	1.732	6.8257	91.4423				
d		144	1.7349	6.795	91.4701	12.332	39.939	47.729	"
24*a*	" "	24	1.7261	6.7636	91.5103				
b		48	1.7311	6.7682	91.5007				
c		72	1.7322	6.774	91.4938	12.92	35.032	52.048	"
25*a*	" "	24	1.6921	6.5976	91.7103				
b		36	1.6956	6.5552	91.7492				
c		60	1.7026	6.567	91.7304	12.482	34.334	53.184	"
26*a*	" "	24	1.653	6.3637	91.9833				
b		60	1.656	6.364	91.98				
c		84	1.659	6.3834	91.9576	16.225	45.65	38.125	"
27*a*	" "	36	1.569	5.7927	92.6383				
b		48	1.573	5.794	92.6329				
c		60	1.5836	5.794	92.6224	13.80	37.93	48.27	"
28*a*	" "	36	1.4225	3.8461	94.7314				
b		48	1.4246	3.873	94.7024	14.297	38.091	47.612	"
29*a*	1.2.4 + H_2O	24	1.402	3.848	94.75				
b		48	1 4036	3.8317	94.7647				
c		60	1.4171	3.802	94.7809				
d		72	1.4177	3.8770	94.7053	13.511	37.037	49.452	"
30*a*	1.2.4 + NH_4OH + H_2O	24	1.528	3.4267	95.0453				
b		36	1.538	3.4179	95 0441	13.168	43.521	43.311	"
31*a*	" "	24	1.811	3.172	95.017				
b		36	1.813	2.935	95.252				
c		72	1.815	2.972	95.213				
d		84	1.855	3.0494	95.0956	16.314	43.369	40.317	"
32*a*	" "	24	2.813	2.738	94.444				
b		72	2.8278	2.740	94.4322				
c		84	2.8304	2.741	94.4286	16.3907	43.569	40.0403	"
33*a*	" "	24	4.7832	2.4454	92.7714				
b		72	4.7854	2.412	92.7656				
c		84	4.789	2.449	92.762	16.75	45.413	37.837	"
34*a*	" "	38	5.0467	2.4733	92.480				
b		48	5.0527	2.4810	92.4663				
c		96	5.0632	2.4732	92.4636	18.215	48.264	33.531	"
35*a*	" "	30	7 109	2.2181	90.6729				
b		60	7.115	2.2047	90.6803				
c		84	7.125	2.2034	90.6716	15.89	44.272	39.838	"

A 0° e a 10° non compariscono nuovi borati di ammonio. Si hanno ancora l'1-5-8 e l'1-2-4 già trovati ad altre temperature. Come si vede dai grafici, i due borati possono sciogliersi in acqua, senza subire decomposizione, alle temperature considerate.

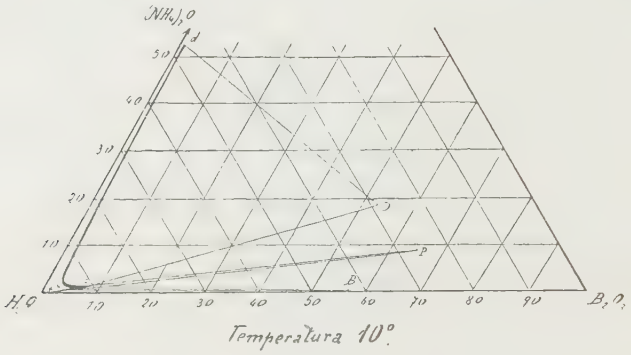


Fig. 2.

La solubilità di essi e dell'acido borico è riportata nelle seguenti tabelle, espressa in grammi del composto anidro e idrato per 100 gr. di soluzione e per 100 gr. di acqua.

Temp. 0°	H_3BO_3 gr.	B_2O_3 gr.	1-5 gr.	1-5-8 gr.	1-2 gr.	1-2-4 gr.
Per 100 gr. soluzione . .	2.5908	1.462	3.9572	5.3757	3.7578	5.1677
Per 100 gr. acqua	2.6597	1.4837	4.1203	5.6812	3.9042	5.449

Temp. 10°	H_3BO_3 gr.	B_2O_3 gr.	1-5 gr.	1-5-8 gr.	1-2 gr.	1-2-4 gr.
Per 100 gr. soluzione . .	3.4794	1.9635	5.3935	7.3266	5.24	7.206
Per 100 gr. acqua	3.6048	2 0036	5.7010	7.9061	5.53	7.766

Lo studio di questo sistema si sta ora completando per temperature più elevate (fino a 90°). Quando tale studio sarà terminato, si esamineranno comparativamente i risultati ottenuti riunendoli nel diagramma temperatura-concentrazione.

Biologia. — *Sulla presenza della Meleagrina nel mare libico.* Nota I di Brunelli Gustavo, presentata dal Socio Battista Grassi (1).

Il Ministero delle Colonie ha inviato in esame all'Ispettorato generale per la pesca alcune perle di piccole dimensioni e un frammento di conchiglia e in seguito tre valve portatemi dal comm. Ottone Schanzer di provenienza libica (Tripoli, Zuara e Buchemez) e che riconobbi senza alcun dubbio da iscriversi al genere *Meleagrina*.

Dapprima fui assai meravigliato di questo reperto, sebbene già nella fauna mediterranea del Carus trovisi menzionata la *Meleagrina Savigny* Monteros. La mia meraviglia diminuì riscontrando che il Dautzemberg aveva già segnalato la *Meleagrina*, oltre che nel mare Egiziano, a Gabes in Tunisia. Il nuovo reperto però è interessantissimo, perchè rappresenta l'anello di una catena che segnerebbe l'itinerario della migrazione della *Meleagrina* attraverso il canale di Suez, donde il Dautzemberg la ritiene migrata in seguito all'apertura dell'istmo, oppure potrebbe prestarsi all'ipotesi contraria della estesa presenza della *Meleagrina* nella costa nord africana, anche innanzi all'apertura dell'istmo, presenza che sarebbe sfuggita alle precedenti indagini dei malacologici e dei biogeografi. Ambedue le opinioni meritano di essere discusse.

La presenza del genere *Meleagrina* nel Mediterraneo è stata segnalata per la prima volta da Gaudion. Vassel ha trovato la *Meleagrina radiata* Desh a Porto Said, poco dopo l'apertura dell'istmo di Suez, e diversi esemplari ne sono stati raccolti anche nei mercati di Alessandria. Alcuni autori hanno descritto questa *Meleagrina* come una specie nuova; nel 1878 Monterosato fu informato che si pescava in abbondanza una ostrica perlifera nel porto di Alessandria, alla quale egli diede il nome di *Meleagrina Savigny*, pur domandando se fosse stata importata dal Mar Rosso, e questo dubbio trovasi menzionato anche nel trattato di Carus sulla fauna mediterranea. Le Meleagrine sono poi state segnalate nel golfo di Gabes da Vassel (1889) e da Chevreux (1892). Nella campagna de la Melita questo ultimo ha trovato delle Meleagrine nella costa a Sud di Sidi Jamur (nella costa ovest dell'isola di Djerba), al largo della Skhira a 22 metri di profondità, all'ovest della penisola di Khedima, nella spiaggia della baia di Surkennis, a nord dell'oued Gabes M. Bavay ha riscontrato (1893) diversi esemplari adulti e giovani aderenti a un cavo sottomarino dell'isola di Djerba.

L'ostrica perlifera si è sviluppata a tal punto nel golfo di Gabes, che in tutta la estensione della baia di Surkennis, M. Chevreux ha osservato un cordone litorale di cinquanta centimetri di spessore, ciò che secondo me è in rapporto con speciali condizioni etologiche batimetriche, in cui determinate specie di Meleagrine prolificano gregariamente. Dautzemberg cercando di risolvere la quistione dell'origine di questa *Meleagrina* ha comparato

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

diversi campioni di provenienza eritrea (mar Rosso, Suez) e delle specie del Mediterraneo provenienti da Alessandria e dal golfo di Gabes. Esso non ha trovato, come esporremo in seguito, alcuna differenza apprezzabile tra le conchiglie di questi campioni e conclude che questo mollusco, la *Meleagrina radiata* Desh. originario del mar Rosso si è introdotto nel Mediterraneo recentemente, dopo la apertura dell'istmo di Suez.

Nessuna meraviglia che questa colonizzazione sia avvenuta, dopo che sappiamo che la migrazione della fauna malacologica a traverso l'istmo è ormai un fatto scientificamente controllato.

Il canale di Suez, aperto dopo il 1869, è assai difficile a passarsi per la maggior parte delle specie a causa, come ricorda Cuénot, della interposizione dei laghi amari ad acque sovrasalate (75 grammi di sale per litro, in luogo di 45 grammi del mar Rosso); ed infatti in trenta anni su 14 specie di pesci tanto del mar Rosso quanto del Mediterraneo, ne sono passate sei sole in un senso o nell'altro e si allontanarono molto poco dalla imboccatura del canale. Una decina di molluschi del mar Rosso sono invece passati nel Mediterraneo e tre soli in senso inverso. Le migrazioni o meglio le dispersioni dei molluschi costituiscono un problema che ha sempre appassionato i biogeografi.

Le condizioni fisico-biologiche della dispersione dei molluschi, specialmente di acqua dolce e terrestri, sono state analizzate dai diversi autori e riassunte nel trattato di Harry Wallis Kew. S'intende che per i molluschi marini gli effetti delle correnti hanno una importanza fondamentale.

Nel caso che ci occupa la dispersione, o meglio la irradiazione della specie, si spiega facilmente con la presenza di correnti costiere, sebbene lo studio idrografico del Mediterraneo non sia ancora completo nella zona litoranea che ci occupa. Come riporta anche il Cuénot nella seconda edizione della sua opera, si è anche supposto che la *Meleagrina radiata* sia migrata nel Mediterraneo attaccata alla chiglia delle navi, è così che sarebbe migrata sino a Malta.

L'ipotesi del Dautzenberg sembra dunque a prima vista la più probabile, sebbene già nel Miocene vi sia stata una colonizzazione del Mediterraneo dalla regione indo-pacifica attraverso il mar Rosso. Certamente un mollusco così appariscente e pregiato fin dai più antichi tempi non si spiega come sarebbe passato inosservato nel secolo XVIII e nella prima metà del secolo scorso, quando gli studî malacologici per giunta erano già in voga.

È vero che Seurat ricorda che le ostriche perlifere esistevano anticamente sulle coste della Mauritania e in particolare del Marocco. Plinio segnala le perle sulla costa della Mauritania, e al XVI secolo se ne fa ancora menzione nella baia di Melillah. Disgraziatamente questi dati come tutte le notizie biologiche di tempi così remoti, debbono accogliersi con beneficio d'inventario. La quistione dell'antica presenza della *Meleagrina* sulle coste mediterranee, ripeto, potrà risolversi coll'ausilio anche della paleontologia.

Non è per muovere alcuna obiezione all'ipotesi del Dautzenberg circa la migrazione della *Meleagrina* dal mar Rosso, ma per esporre lo stato attuale delle nostre conoscenze che io riporto qui alcuni dati.

Il mar Rosso e il Mediterraneo hanno comunicato durante il periodo miocenico. Lo studio della fauna terziaria miocenica e pliocenica del perimetro del Mediterraneo, mostra che questo mare ha ricevuto degli elementi provenienti dall'Oceano indiano, dall'ovest dell'Africa e delle acque che bagnano l'Europa del Nord. Tuttavia dal punto di vista malacologico la Provincia indo-pacifica è ben delimitata e il mar Rosso, che si considera in appendice alla stessa, ha una fauna malacologica assai ricca. Come ricorda il Fischer la dissimiglianza della fauna mediterranea ed eritrea ha colpito tutti i viaggiatori che hanno viaggiato nel mar Rosso. Ma durante lungo tempo un errore, accreditato da Philippi e accettato senza controllo da Forbes e da Woodward, ha fatto prevalere nella scienza questa errata proposizione che il mar Rosso racchiuda il 10 per 100 delle specie comuni al mediterraneo. Su 375 molluschi (questi dati sono anteriori all'apertura dell'istmo di Suez) provenienti dal viaggio di Hemphrich e di Ehrenberg, 73 specie vivrebbero contemporaneamente nel mar Rosso e nel Mediterraneo. Ma Fischer ha constatato che queste pretese specie comuni appartengono esclusivamente alla fauna mediterranea. D'altra parte su 818 specie di Suez, Mac-Andrew non ha trovato che tre specie mediterranee: *Pecten varius*, *Solecurtus coarctatus* e *Volvula acuminata*.

Così che in sostanza anche ammessa una prima migrazione di specie dal mar Rosso nel Mediterraneo nel miocene, questa sembra sia avvenuta entro limiti assai modesti.

Ulteriori studî ci diranno se la *Meleagrina* delle coste nord africane debba ritenersi sicuramente migrata in tempo recente dal mar Rosso. Uno studio approfondito della specie anche dal punto di vista anatomico mi sembra necessario, poichè senza recare offesa ai malacologici, la sistematica a sola base di conchiliologia è una scienza un po' tramontata.

Le sole tre valve inviatemi non permettono in questo senso uno studio del problema. A prescindere da quanto dice il Seurat che molti autori pensano che l'ostrica perlifera delle diverse regioni del globo appartengono alla sola specie *Meleagrina margaritifera*, ciò che ormai nessuno più ammetterebbe, è certo che lo studio delle specie del genere *Meleagrina* anche dal punto di vista etologico merita attenzione

Nel mar Rosso anche gli indigeni distinguono la ostrica delle madreperle (sadaf), *Meleagrina margaritifera*, da quella delle perle (bulbul), che per i sistematici si identifica colla *Meleagrina muricata*, e la quale sarebbe di diametro minore non eccedente i 7 cm. Quello degli esemplari libici da me esaminati misura circa 9 cm., superiore cioè a quello della *Meleagrina muricata* e inferiore a quello della *Meleagrina margaritifera*, le cui valve sono anche di spessore assai più notevole, ma d'altra parte anche se ammettiamo una migrazione recente delle Meleagrine dal mar Rosso, non è da escludersi che nel mar Libico esse presentino qualche particolare carattere di adattamento all'ambiente o biaiometamorfosi.

Fisiologia. — *Sulla deamidazione enzimatica dell'asparagina in diverse specie animali e sul significato fisiologico della sua presenza nell'organismo* (1). Nota di Antonino Clementi, presentata dal Corrisp. Silvestro Baglioni (2).

Nel corso di indagini dirette all'elaborazione di un nuovo metodo per lo studio del fenomeno della deamidazione enzimatica dell'asparagina la mia attenzione è stata attratta dalla mancanza del potere deamidante in alcuni preparati di erepsina intestinale di cane. Poichè mancano notizie circa il fenomeno della deamidazione enzimatica dell'asparagina nel cane e nei carnivori in genere, io fui indotto a ricercare se il fatto osservato rappresenti non un fenomeno fortuito e isolato, ma piuttosto un carattere differenziale tra carnivori ed erbivori. Intrapresi perciò lo studio sistematico della deamidazione enzimatica dell'asparagina nella serie dei vertebrati e degli invertebrati; i risultati delle mie ricerche, che qui riferisco, essendo in accordo nelle loro linee essenziali con la tesi suesposta permettono di formulare una nuova interpretazione circa il significato fisiologico della presenza di questo fenomeno nell'organismo animale.

Il procedimento da me seguito per riconoscere la deamidazione dell'asparagina differisce dai metodi precedenti adoperati dagli altri autori che sono tutti fondati sul dosaggio, mediante distillazione, dell'ammoniaca, che si sviluppa dall'asparagina e rispetto ai quali ha il vantaggio di essere più rapido e di permettere di sperimentare con piccole quantità di asparagina; esso consiste nella *titolazione diretta* al formolo dell'asparagina, e si fonda sul principio che l'azoto amidico dell'asparagina non è titolabile col metodo del formolo, mentre diventa titolabile quando si trasformi in azoto ammoniacale. Nelle nostre esperienze abbiamo adoperata la poltiglia degli organi da esaminare, che si otteneva pestando frammenti di organi in mortaio con polvere di quarzo; un campione della poltiglia veniva mescolato con l'asparagina e un campione uguale in volume veniva posto in termostato alla temperatura di 37°-40° C. dopo aggiunta di toluolo: dopo alcuni giorni si eseguiva la titolazione al formolo.

I fatti assodati nelle ricerche eseguite facendo agire sull'asparagina la poltiglia di organi si possono riassumere sinteticamente in questi termini:

1°) La deamidazione della asparagina è operata da molti organi e tessuti dei mammiferi erbivori (cavia, vitello, antilope) e dei mammiferi onnivori (ratto bianco, maiale), ma non è operata da alcun organo e da alcun tessuto dei mammiferi carnivori (cane, gatto, pipistrello). Tra gli organi quello che con più costanza deamidizza l'asparagina è rappresentato dal fegato: in alcuni casi (cavia) anche il sangue e, propriamente, il siero di sangue può operare la deamidazione dell'asparagina. Gli organi dell'uomo a differenza di quelli di altri onnivori non hanno il potere di deamidare l'asparagina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

2°) La deamidazione dell'asparagina è operata dal fegato e dal rene degli uccelli (gallina, gazza ladra, capinera, civetta e falchetto); gli uccelli in genere si comportano rispetto al fenomeno della deamidazione dell'asparagina come i mammiferi onnivori: in effetti secondo gli A. anche i rapaci, sebbene siano prevalentemente carnivori, possono in mancanza di alimenti di origine animale, cibarsi anche di semi.

3°) La deamidazione dell'asparagina non è operata da alcun organo e da alcun tessuto di Zamensis Viridiflavus, di Emis Europea e di Testudo Graeca sacrificate durante il periodo del letargo: la mancanza di osservazioni in individui sacrificati durante il periodo estivo non mi ha permesso di stabilire se l'assenza del fenomeno sia in questi vertebrati costante o solo conseguente allo stato letargico.

4°) La deamidazione dell'asparagina non è operata da alcun organo e da alcun tessuto di Triton Cr. e di Bufo Vulgaris, i quali, come è noto, sono carnivori.

5°) La deamidazione dall'asparagina non è operata dagli organi di Ciprinus Auritus.

6°) La deamidazione dell'asparagina non è operata da alcun organo o da alcun tessuto dell'organismo degli invertebrati, sia erbivori (Helix pomatia, Cavolaria), sia carnivori (Seppia, Ditiscus).

Le considerazioni degne di maggior rilievo, che crediamo di poter fare in base ai fatti suesposti, sono le seguenti:

a) Il fermento che opera la deamidazione dell'asparagina (*asparaginasi*) contrariamente a quanto era ritenuto fin ora (O. v. Fürth e Friedmann) [1], non è un fermento comune a tutti gli organi e tessuti animali, ma esistono vertebrati presso i quali esso manca, come esistono tessuti nei quali esso è assente. Per quanto si riferisce ai *mammiferi* possiamo enunciare una legge, che ne regola la distribuzione, in questi termini: *il fermento deamidante l'asparagina è generalmente presente nell'organismo dei mammiferi erbivori e in quello dei mammiferi onnivori, mentre è assente nell'organismo dei mammiferi carnivori.* La presenza di un fermento deamidante l'asparagina nella classe dei mammiferi appare dunque come un fenomeno avente rapporti di dipendenza non coi processi di *degradazione metabolica* della *molecola proteica*, come finora si è ritenuto, ma piuttosto colla *natura* dell'*alimentazione* della specie e, propriamente, come un fenomeno di *adattamento biochimico* filogenetico dell'organismo alla *presenza* o all'*assenza nell'alimento dell'asparagina*, la quale, come è noto, si trova in molti alimenti di origine vegetale, mentre manca in quelli di origine animale.

b) Dal punto di vista teleologico la mancanza del fermento, che determina la deamidazione dell'asparagina, nei secreti digerenti (succo intestinale di coniglio, bile di cavia) e la sua presenza negli organi interni o anche nel siero di sangue (cavia) fa pensare, che il fenomeno della deamida-

(1) *O. V. Fürth e Friedmann.* Biochem. Zeitsch. 26, 1900.

zione dell'asparagina è un fenomeno di digestione interna, che ha verosimilmente un significato *nutritivo* o *assimilativo*; infatti l'asparagina viene trasformata per il processo della deamidazione in *acido aspartico*, cioè viene trasformata in un aminoacido, che come tale *normalmente* prende parte alla costituzione chimica dell'edificio molecolare delle sostanze proteiche. L'assenza del fermento nell'organismo dei mammiferi carnivori e la sua presenza in quello dei mammiferi erbivori od onnivori ci darebbe così la spiegazione di un fatto osservato dai fisiologi dell'ultimo ventennio del secolo scorso (Weiske, Kennepohl, Schulze), che è rimasto senza spiegazione fino ad oggi, e cioè, che l'asparagina somministrata ai mammiferi esercita un'azione di risparmio dei proteici più spiccata negli erbivori e negli onnivori, che non nei carnivori, cioè in quei mammiferi, nei quali è presente il fermento deamidante l'asparagina.

c) La mancanza del fermento, che opera la deamidazione dell'asparagina, nel *fegato di cane*, dalle cui proteine durante l'autolisi, secondo Jacoby, si mette in libertà dell'ammoniaca, fa pensare che possono esistere nel fegato di cane fermenti analoghi, ma in ogni caso distinti dal fermento, che opera la deamidazione dell'asparagina, al quale possiamo applicare la denominazione di *asparaginasi* e che l'ammoniaca presente nella molecola proteica possa essere legata anche ad aminoacidi diversi dall'acido aspartico.

d) Da un punto di vista generale si può pensare che per adattamento filogenetico gli *organi interni* (fegato) o *anche il tessuto sanguigno* possono elaborare fermenti atti a scindere sostanze azotate alimentari a costituzione chimica semplice e perfettamente definita, che giungono nel circolo sanguigno dall'intestino, mentre tale attitudine è stata dimostrata finora solo per gli organi digerenti (ghiandole salivari, mucosa intestinale). Verosimilmente questo dell'asparaginasi rappresenta il caso più semplice di tutta una categoria, finora non nota, di fermenti specifici degli organi interni o del tessuto sanguigno formatisi per adattamento biochimico filogenetico dell'organismo animale alla speciale costituzione chimica degli alimenti. La presenza dell'asparaginasi anche nel *siero di sangue* (cavia), ci impone la soluzione di un problema avente speciale interesse per la dottrina dell'alimentazione ed, insieme, per la dottrina dei fermenti chiamati protettivi da Abderhalden, e, propriamente, del problema che si riferisce alla possibilità di determinare la formazione dell'asparaginasi nel siero di sangue o nel fegato dei mammiferi carnivori mediante la somministrazione artificiale prolungata per via orale o per via sottocutanea o per via endovenosa dell'asparagina; ci riserviamo di riferire i risultati delle ricerche aventi attinenza con questo problema e con altre questioni connesse alla biologia del fermento in questione, il cui significato appare diverso e la cui importanza fisiologica appare maggiore di quanto finora sia stato generalmente ammesso.

G. C

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Astronomia. — *Sopra il limite interno della zona asteroidica.* Nota del Corrispondente Giuseppe Armellini (1).

1. In questa breve Nota espongo, come conseguenza dei risultati ottenuti nel mio lavoro sul pianetino *Hungaria* (2), un'osservazione destinata a rettificare un'opinione diffusissima tra gli astronomi sul limite interno della zona degli asteroidi.

2. Come è noto, se escludiamo il pianetino eccezionale *Eros* ed il Gruppo Troiano (*Ettore*, *Achille* ecc.), l'anello asteroidico è compreso tra *Marte* e *Giove* e precisamente tra le distanze medie 1,95 (*Hungaria*) e 4,26 (*Thule*). Il numero dei pianetini scoperti si avvicina ormai al migliaio; ma è assai probabile che essi siano soltanto dei nuclei maggiori disseminati in un vero sciame di corpuscoli che sfuggono alle nostre osservazioni. L'anello presenta poi delle *lacune* che, fino a pochi anni fa, si attribuivano unicamente a *perturbazioni di risonanza*, vale a dire alla commensurabilità del moto medio con quello di Giove.

Newcomb fu il primo, per quanto so, a porre in dubbio questa spiegazione allora universalmente accettata, e la sua acuta previsione onora veramente l'ingegno del grande astronomo americano. Più tardi i nuovi metodi scoperti dal Poincaré, i quali come egli stesso ebbe a dire valgono precisamente in quei casi dove gli antichi fallivano, ed i lavori consecutivi

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1921.

(2) Cfr. Rend. Lincei, seduta del 19 dec. 1920.

per opera di molti astronomi, confermarono le idee del Newcomb e mostrarono che la sola attrazione di Giove non basta per spiegare completamente le lacune dell'anello asteroidico.

« *Il semble donc resulter* — scrive giustamente [1] a questo proposito l'André — *de l'ensemble de ces travaux que très vraisemblablement, si les lacunes n'avaient point existé de l'origine, les perturbations de Jupiter n'auraient pas suffi à les produire et que par suite elles existaient sans doute déjà immediatement après la formation des asteroides* ».

Ben inteso, le lacune sono sempre strettamente connesse con Giove. Soltanto non è forse il pianeta che le abbia prodotte direttamente, ma piuttosto la posizione di Giove e quella delle lacune dipendono da un'unica causa [2] cosmogonica.

3. Ciò posto è importante osservare come si ripeta ora per il limite interno della zona asteroidica una spiegazione analoga a quella data in passato per le lacune. Fino a poco tempo fa, si credeva infatti che l'inclinazione dei pianetini che sono situati alla distanza media 1,95 cioè assai vicino [3] al preteso « Punto di Leverrier » fosse soggetta ad oscillazioni fortissime (per Hungaria p. es. superiori a *cinquantatre gradi*). E poichè l'anello asteroidico propriamente detto termina alla distanza 1,95, gli astronomi spiegano ora questo limite con l'esistenza del « Punto di Leverrier » precisamente come pochi anni or sono spiegavano le lacune dell'anello con la teoria delle perturbazioni di risonanza. Lo stesso André ha accettato senza riserve questa opinione scrivendo [4] che « *cette remarque curieuse* — cioè le perturbazioni straordinariamente forti alla distanza 1.95 — *explique la limitation intérieure de l'anneau*; *ce qui est fort important* ».

4. Ma come è caduta l'antica teoria delle lacune, così anche questa apparentemente brillante spiegazione del limite interno non può più sussistere dopo i nuovi lavori sul pianetino Hungaria e sul Punto di Leverrier. Il prof. Charlier infatti ha portato i cinquantatre gradi della teoria di Leverrier a soli *diciassette* [5] e nella mia citata Nota io ho potuto ridurli a soli *tre gradi e mezzo*. Hungaria ed i pianetini situati a quella distanza cessano quindi di essere *singolari* e la pretesa spiegazione del limite interno dell'anello asteroidico viene quindi a crollare dalle fondamenta.

In altre parole erano state trovate perturbazioni eccezionali alla di-

(1) In connessione con questo fatto è curioso osservare che le distanze 2,34 e 3,58 date dalla mia legge empirica ($D = 1{,}53^n$; cfr. Rend. Lincei, seduta 4 marzo 1917) possono interpretarsi come appartenenti ai pianetini *Vesta* (2,36) e *Camilla* (3,48) oppure anche alle due lacune principali (2,5 e 3,3).

(2) Ch. André, *Les planètes et leur origine*, pag. 102.

(3) Ann. de l'Observ. H., T II.

(4) Op. cit., pag. 104.

(5) Cfr. *Mechanik des Himmels*, vol. I., pag. 428 e seg.

stanza 1.95 perchè si consideravano *i soli primi termini*. Se si tiene conto invece dei *termini superiori* (1) — come è stato fatto dal prof. Charlier nelle equazioni che io ho integrato nella mia citata Nota — le *perturbazioni divengono quasi normali, e quindi insufficienti a dar ragione dell'esistenza del limite interno dell'anello asteroidico.*

5. Riepilogando noi giungiamo alla conclusione che le *particolarità dell'anello asteroidico* (limiti e lacune) non possono essere spiegate con la sola Meccanica Celeste (2) come per tanti anni si era creduto: esse sembrano *dovute a cause cosmogoniche piuttosto che a perturbazioni meccaniche.*

Mineralogia. — *Su cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epitodo* (3). Nota IV del Corrispondente Ferruccio Zambonini (4).

Se si verifica il caso *a* (sostituzione del solo alluminio legato all'ossidrile) avremo la serie *normale* di cristalli misti: se, al contrario, il ferro ferrico prende il posto *anche* di parte dell'alluminio indipendente dall'ossidrile si origineranno i cristalli misti che abbiamo chiamato anomali (5).

Si comprende anche facilmente come possano aversi dei cristalli misti con le proprietà ottiche di termini clinozoisitici, ma con un contenuto in ferro ferrico così elevato, che, se si trattasse della serie normale, sarebbe caratteristico di termini schiettamente epidotici. Tale è il caso dei cristalli di Monte Tovo con 5.1 % Fe_2O_3, della Goslerwand con 5.16 % Fe_2O_3, di Huntington, ecc.

In base a quanto abbiamo esposto, ci possiamo dare ragione del fenomeno, pensando che solo una piccola parte del ferro ferrico contenuto in

(1) Un esempio analogo, divenuto ormai classico, si ha nell'Accelerazione Secolare della luna. Tenendo conto dei soli primi termini (*Laplace*) l'accordo tra teoria ed osservazione sembrava perfetto; ma quando *Adams* volle considerare anche i termini superiori si notò subito un'importante divergenza, che sembra dovuta all'azione delle maree (*Delaunay*).

(2) Sembra invece che il limite superiore dell'anello asteroidico che si trova presso *Thule* alla distanza 4,26 (escludendo il *Gruppo Troiano* che ha un'esistenza separata) si spieghi meccanicamente con le *curve limiti* di Hill. La teoria è però ancora dubbia, ed io mi propongo di esaminare in un'altra occasione questo punto importantissimo dell'astronomia asteroidica.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

(4) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1921.

(5) Poichè il ferro ferrico è isomorfogeno al più alto grado con l'alluminio, si comprende bene come nello stesso giacimento possano trovarsi cristalli misti normali ed anomali, essendo, evidentemente, sufficienti variazioni di poco momento nelle condizioni di formazione, perchè sia favorita la sostituzione di uno o dell'altro tipo di atomi di alluminio della clinozoisite. Mi sembra perfino possibile che in uno stesso cristallo possano aversi parti normali e parti anomale.

quei cristalli sostituisca l'alluminio del gruppo Al(OH), mentre il resto rimpiazzerebbe l'alluminio indipendente dall'ossidrile. La struttura cristallina della clinozoisite risulterà lievemente modificata, perchè dei caratteristici gruppi Al(OH) ben pochi saranno stati sostituiti, e quanto agli altri atomi di alluminio, sui quali principalmente si esercita la sostituzione, essi sono assai più numerosi degli altri (precisamente il doppio), sicchè il loro posto può essere occupato dal ferro ferrico in proporzioni più considerevoli, senza che si determinino delle modificazioni profonde nelle proprietà fisiche dell'edificio cristallino.

Potremo, perciò, dire che nei cristalli misti anomali della serie clinoizisite-epidoto le proprietà « clinozoisitiche » (1) saranno tanto più accentuate, quanto minore sarà la quantità di alluminio unita all'ossidrile che viene sostituita dal ferro ferrico (2).

(1) Per « proprietà clinozoisitiche » intendo appunto il carattere ottico positivo, la birifrangenza debole, gli indici di rifrazione più bassi che nei termini epidotici e pistazitici; n_p nell'angolo ottuso β, ecc. Poichè i cristalli di Monte Tovo con 5,1 % Fe_2O_3 possiedono per n_m un valore inferiore a quello della clinozoisite senza ferro e $2V_{n_p} = 99°35'$ sembra lecito ammettere che l'effetto sulle proprietà ottiche della sostituzione dell'alluminio indipendente dall'ossidrile, è l'opposto di quello determinato dalla sostituzione nei gruppi Al(OH). Ed invero, nei cristalli misti anomali di Huntington, di Monte Tovo, di Camp-Ras ecc. i valori degli indici principali di rifrazione sono inferiori a quelli della clinozoisite tipica (pur presentando per $2V_{n_p}$ dei valori molto più vicini a 90° dei cristalli di Monte Tovo), mentre nella serie normali di cristalli misti gli indici di rifrazione crescono rapidamente col tenore in ferro ferrico.

(2) Da molti si ritiene, che, dopo i recenti lavori sulla struttura dei cristalli, il concetto di molecola abbia perduto ogni valore per le sostanze allo stato cristallino. In realtà, è stato dimostrato che i legami che tengono uniti gli atomi nei reticoli spaziali cristallini sono della stessa natura delle valenze chimiche. Mi limiterò a rammentare i lavori del Padoa, pubblicati nei Rendiconti di questa Accademia nel 1918 e nel 1919, e quelli importantissimi di K. Fajans e von Steiger (Berichte der Deutschen chem. Gesellsch. 1920, LIII, 643 e 666), i quali, indipendentemente da Padoa, hanno mostrato che l'energia dei legami atomici nel diamante e nella grafite è dello stesso ordine di grandezza di quella che si ha negli idrocarburi rispettivamente della serie alifatica e dell'aromatica. Del resto, che i legami atomici della molecola chimica debbano restare conservati allo stato cristallino, risulta senz'altro dal fatto che in molti casi, nei quali i fenomeni non sono turbati da polimerizzazione o da altre cause, il colore che si ha in soluzione liquida, diluita, rimane conservato allo stato solido. Basterà ricordare il cloruro cromico verde e quello violetto, numerosi idrati che hanno colorazione caratteristica in soluzione ed allo stato cristallino, solido, le soluzioni di jodio nel benzolo e nel cicloesano, studiate da Bruni e da Amadori, che sono rosee sia allo stato liquido, che al solido, le soluzioni di nitrosobenzolo in nitrobenzolo, pure esaminate dal Bruni, che conservano un colore verde azzurro brillante nelle soluzioni liquide e nelle solide. Abbiamo, poi, i molteplici esempî di sali con anione colorato, che presentano, sempre che non vi sieno cause perturbatrici, lo stesso colore in soluzione ed allo stato cristallino. Una distinzione fra gli atomi di alluminio che nella formula della clinozoisite appaiono oppure no legati all'ossidrile appare, perciò, giustificata anche negli edifici cristallini del minerale.

Le cose sono, del resto, rese ancora più complicate dalla possibilità di un altro fenomeno. In recenti ricerche di grandissima importanza sia teorica, che pratica, il Tammann [1] ha mostrato che la distribuzione dei componenti di un cristallo misto può essere, limitandoci a considerare i casi estremi e senza entrare in dettagli non consentiti dallo spazio del quale posso disporre, *uniforme* o *normale*, come egli la chiama, ovvero *irregolare*. A seconda che si verifica l'una o l'altra di queste due distribuzioni nel reticolo spaziale, otterremo, a parità di composizione chimica, due cristalli misti, che possiamo ben dire con Tammann stereoisomeri, e che avranno proprietà anche molto diverse, come lo stesso Tammann ha potuto dimostrare non solo per i cristalli misti di alcuni metalli, ma anche per quelli di certe coppie di sali. È da notare che i cristalli misti stereoisomeri di Tammann si differenziano da quelli studiati nella serie clinozoisite-epidoto, per il fatto fondamentale che, mentre nei primi si ha una diversa sostituzione di atomi dello stesso elemento e con uguale funzione chimica [2], nei secondi la sostituzione si esplica ancora su atomi dello stesso elemento (l'alluminio), ma con diversa funzione (legati ovvero no all'ossidrile) [3]. Nei casi studiati da Tammann si ha una steroeisomeria puramente cristallina: nei cristalli misti della serie clinozoisite-epidoto si ha, invece, a che fare con una stereoisomeria chimica e cristallina nello stesso tempo.

È molto probabile che il genere di stereoisomeria cristallina studiato da Tammann abbia scarsa importanza nel gruppo epidoto. Infatti, il Tammann ha trovato che la distribuzione irregolare si verifica quando la formazione dei cristalli misti ha luogo rapidamente ed in condizioni tali da impedire trasposizioni degli atomi nel reticolo.

Ora, i cristalli di epidoto e di clinozoisite si sono certamente formati abbastanza lentamente, a temperatura relativamente alta per rendere possibili gli intensi fenomeni di metamorfismo, in seguito ai quali, appunto, quei cristalli si originarono, sicchè è verosimile che in essi si abbia, per lo meno dominante, la distribuzione normale degli atomi. Ma la distribuzione irregolare dei gruppi Al(OH) divenuti Fe(OH) non può, però, escludersi, sicchè in certi casi può darsi che ad essa debbano ascriversi, almeno in parte, le « anomalie » osservate nella serie clinozoisite-epidoto.

I risultati del presente lavoro tendono a diminuire la portata pratica delle relazioni trovate fra composizione chimica e proprietà fisiche (special-

(1) *Mischkristallreihen und ihre Atomverteilung*. Leipzig 1919 (Anche Zeitsch. für anorg. u. allg. Chemie 1919, CVII).

(2) Così si verifica, per esempio, che nei cristalli misti stereoisomeri di NaCl e AgCl sono atomi di sodio di differente posizione nello spazio quelli che vengono sostituiti dall'argento, ma è evidente che tutti gli atomi di sodio del reticolo spaziale del cloruro di sodio hanno lo stesso valore chimico.

(3) La diversità di funzione degli atomi di alluminio sostituiti può spiegare la forte differenza di colore che si osserva fra certi epidoti con composizione quasi identica.

mente ottiche) in certe serie di cristalli misti naturali. Il loro impiego, infatti, è necessariamente limitato ai cristalli misti « normali », mentre è evidente che, in molti casi, specialmente quando si tratta di microliti formatisi rapidamente, la distribuzione irregolare degli atomi studiata da Tammann appare assai verosimile. Ora, è da notare che nello studio microscopico delle roccie, si usa applicare senz'altro alla determinazione dei microliti, per esempio dei plagioclasi, i risultati dello studio dei grandi cristalli, magari delle geodi, originatisi in condizioni ben diverse, il che non appare, oggi, affatto giustificato, perchè, mentre questi ultimi possiedono molto probabilmente la struttura « normale », manca ogni certezza che altrettanto si verifichi sempre nei microliti.

Anche il tipo di stereoisomeria che abbiamo veduto verificarsi, secondo ogni probabilità, nei cristalli misti della serie clinozoisite-epidoto, è verosimilmente assai diffuso in natura. Intanto, esso può esistere nelle piemontiti e nelle ortiti [1]), nelle quali, anzi, le cose sono complicate dal fatto che l'alluminio può essere sostituito non soltanto dal ferro ferrico, ma anche dal manganese trivalente e dai metalli del gruppo del cerio, lasciando, così, scorgere la possibilità di svariati cristalli misti stereoisomeri con composizione centesimale identica. In generale, si può dire che il tipo in questione di stereoisomeria dei cristalli misti può riscontrarsi in tutti quei minerali nei quali un dato elemento possiede atomi con diversa funzione chimica. Un esempio eminente, che, per la sua importanza, mi propongo di trattare a parte, è dato dai complicati cristalli misti con elementi trivalenti, dei gruppi dei pirosseni e degli anfiboli. Tutti quei minerali, poi, che possono essere considerati come composti di un sale e di un alogenuro o di un idrato dello stesso metallo, si trovano nello stesso caso. Così, per esempio, nei minerali del gruppo humite, la formula dei quali si può scrivere $Mg_2SiO_4 . n\,Mg(F,OH)_2$, il magnesio può essere in parte rimpiazzato dal ferro e, molto subordinatamente, dal manganese. È chiaro che si avranno cristalli misti con proprietà diverse, a seconda che sarà sostituito il magnesio legato al fluoro (o all'ossidrile), ovvero l'altro. Un caso analogo si verifica nella elvina.

Così pure, nella complessa serie davyna-microsommite, nella quale, come ho già notato nella mia *Mineralogia vesuviana*, sembra disperato il tentativo di trovare un nesso preciso fra la composizione chimica e le proprietà ottiche, i cristalli misti stereoisomeri devono essere molto frequenti. Prescindendo da ogni ipotesi, la formula di quei minerali si può scrivere, nel caso dei termini ipotetici puramente sodici, $Na_2Al_2Si_2O_8 . n\,Na_2(CO_3, SO_4, Cl_2)$. Ma il sodio è sempre accompagnato dal calcio e, spessissimo, dal potassio, e questi elementi potranno sostituirsi sia al sodio dell'allu-

[1]) Può esistere, naturalmente, anche nella zoisite, della quale può spiegare quanto di poco chiaro rimane nelle proprietà ottiche, dopo il felice tentativo di Becke di porle in relazione col contenuto in ferro ferrico.

mosilicato, sia a quello unito a CO_3, a SO_4, a Cl [1]. Gli esempî potrebbero moltiplicarsi, ma mi limiterò ad accennare, in un altro gruppo di minerali, all'apatite. Il calcio dell'apatite può essere sostituito dallo stronzio, dal bario, dal piombo, ma non sarà, certo, indifferente, che la sostituzione avvenga nel calcio del fosfato od in quello dell'alogenuro.

Consideriamo la clorapatite pura $3\,Ca_3(PO_4)_2 . Ca\,Cl_2$: la sostituzione parziale del piombo al calcio ci darà dei termini di passaggio alla piromorfite, ma è evidente che due cristalli contenenti la stessa quantità di piombo, ma le formule dei quali debbano scriversi $3(Ca, Pb)_3(PO_4)_2 . Ca\,Cl_2$ e $3\,Ca_3(PO_4)_2 . Pb\,Cl_2$ dovranno necessariamente possedere proprietà fisiche diverse [2].

Da quanto si è esposto nel presente lavoro risulta che la composizione chimica dei cristalli misti della serie clinozoisite-epidoto non può essere determinata sempre sicuramente in base alle proprietà ottiche, il che, di certo, costituisce un forte svantaggio dal punto di vista petrografico. Weinschenk ha proposto di chiamare clinozoisiti quei cristalli misti che si avvicinano per la loro composizione chimica alla zoisite rombica [3], che sono otticamente positivi e possiedono una rifrangenza ed una birifrazione più deboli degli epidoti propriamente detti. In essi si ha, poi, n_p nell'angolo ottuso β.

Siccome, ora, conosciamo con tutta certezza dei cristalli misti che possiedono tutti e tre i caratteri ottici indicati, ma non la composizione chimica richiesta da Weinschenk, essendo essi molto più ferriferi, ne segue che non è possibile riconoscere la clinozoisite di Weinschenk in base alle sole proprietà ottiche. Dal punto di vista pratico, occorre, perciò, modificare la definizione di Weinschenk, e chiamare « clinozoisiti » tutti i cristalli misti otticamente positivi, epidoti e pistaziti quelli negativi, senza preoccuparsi della loro composizione. Poichè è difficile determinare 2 V nelle sezioni sottili, dato il suo valore elevato, per la diagnosi è molto importante la determinazione degli indici di rifrazione e dell'angolo che l'asse ottico emergente da (001) forma con la normale alla faccia. Se questo angolo supera i 35° nell'aria e n_m non sorpassa 1.72 si può essere, almeno per quanto se ne sa fin'oggi, quasi certi di avere a che fare con clinozoisiti, che possono essere, però, sia normali, sia anomali.

(1) Ragionamenti analoghi possono farsi per il gruppo wernerite.

(2) Così pure, io ho mostrato, alcuni anni or sono, che, preparando la clorapatite col metodo di Forchhammer, è possibile sostituire una piccola parte del calcio col sodio. È chiaro che quest'ultimo elemento può prendere il posto sia del calcio del fosfato, sia di quello legato al cloro, sia di tutti e due.

(3) Weinschenk si riferiva alle zoisiti povere in ossido ferrico, come quelle da lui studiate, che ne contenevano 1.07 e 2.78 %. Sono, del resto, le zoisiti più comuni, perchè su 53 analisi raccolte da Eitel, in una quindicina soltanto Fe_2O_3 supera il 4 %. E quasi tutte sono imperfette, perchè prive della determinazione del ferro ferroso: non poche sono molto antiche o di dubbia attendibilità.

Le varietà anomali si distinguono facilmente da quelle normali per il valore di n_m, spesso più basso di quello della clinozoisite pura, priva di ferro, e, in ogni caso, inferiore a quello deducibile dal valore trovato per 2 V. Esse possiedono, inoltre, almeno in generale, una birifrangenza un po' più alta delle clinozoisiti normali (1). Infine, per lo meno nelle lamine non eccessivamente sottili, presentano, per lo più, estinzione completa anche in luce bianca, il che non si verifica, come è noto, nelle clinozoisiti tipiche (2).

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche.* Nota di Giuseppe Belardinelli, presentata dal Socio S. Pincherle (3).

Le recenti Note del sig. Richard Birckeland pubblicate nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (4) sulla risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche, mi danno occasione di far notare come i suoi risultati siano contenuti in quelli indicati da tempo dal compianto prof. Capelli (5) e completati in una mia Memoria pubblicata recentemente negli Annali di Matematica (6). Il Capelli considera l'equazione algebrica generale:

$$(1) \qquad \theta(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$

e dà delle variazioni $p_0\, p_1 \ldots p_n$ rispettivamente ai coefficienti $a_0\, a_1 \ldots a_n$ ed

(1) Il trovarsi n_p nell'angolo ottuso β non può considerarsi come una caratteristica sicura della clinozoisite. Così, i cristalli di val Maigels con 5.79 % Fe_2O_3 e $2V_{n_p} < 90°$ presentano n_p nell'angolo ottuso β, secondo Grubenmann. Altrettanto accade per i cristalli dell'Inverness-shire, positivi per la luce del tallio, ma negativi per quella del sodio, e per quello del Monte Bianco studiato nel presente lavoro.

(2) È opportuno notare, che la possibilità di esistenza di cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto è indipendente da qualunque interpretazione della formula bruta della clinozoisite. Poichè, infatti, in essa esistono tre atomi di alluminio (sei se si prende la formula doppia), si comprende senz'altro come il ferro ferrico possa sostituire, nell'edificio cristallino, atomi di alluminio in posizione diversa, dando luogo a cristalli misti stereoisomeri. Ammettendo la interpretazione di Groth della formula della clinozoisite la spiegazione dell'esistenza di cristalli misti stereoisomeri è resa più perspicua ed elegante.

(3) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

(4) Tomo 171 (1920), pag. 778 e pag. 1370. Tomo 172 (1921), pag. 309.

(5) Rend. della R. Accad. Scienze fis. e matem. di Napoli, 1907.

(6) Annali di matematica, Tomo XXIX, Serie III (1920), pag. 251 e segg.

ottiene l'equazione trasformata

$$(2) \qquad f(y) = (a_n + p_n)\, y^n + \\ + (a_{n-1} + p_{n-1})\, y^{n-1} + \cdots + (a_1 + p_1)\, y + (a_0 + p_0) = 0.$$

Indicando con ω_0 una radice semplice e finita della (1), la (2) determina quel ramo (funzione analitica monodroma) delle $p_0\, p_1 \ldots p_n$ che per $p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ assume il valore ω_0, ramo che in un campo (R) definito da $\mod p_i < \mathrm{R}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sarà rappresentato da uno sviluppo della forma

$$(3) \qquad y = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}\, p_0^{\alpha_0}\, p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

dove le α assumono valori interi positivi o nulli qualsivogliano. Determina poi le condizioni di convergenza della serie (3) ed il coefficiente $\mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ ed ottiene:

$$(4) \qquad \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \frac{\alpha - 1!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c y^\beta \left[-\theta(y) \right]^{-\alpha} dy \right)$$

ove $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$ e $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e

$$(5) \qquad \mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{\alpha!}{\alpha_0!\, \alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!\, b_1^\alpha} \sum_{k \cdot \alpha} \binom{\beta}{\alpha - k - 1} \omega_0^{\beta + k - \alpha - 1} \times \\ \times \frac{(-1^h)\, h + \alpha - 1!}{b_1^h} \frac{b_2^{h_2} b_3^{h_3} \ldots b_n^{h_n}}{h_2!\, h_3! \ldots h_n!}$$

in cui $k = h_2 + 2h_3 + \cdots + (n-1)\, h_n$ e $h = h_2 + h_3 + \cdots + h_n$ e $b_\varrho = \theta^{(\varrho)}(\omega_0) : \varrho!$ ove $\theta^{(\varrho)}$ sta ad indicare la derivata ϱ-esima calcolata nel punto ω_0.

Nella mia Memoria stabilisco differenti forme del coefficiente $\mathrm{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ e studio l'integrale [1]

$$(6) \qquad \psi(\omega_0) = \int_c \frac{\varphi(y)\, dy}{(y - \omega_0)^\alpha}$$

esteso ad un cerchietto c che circonda la radice ω_0 e non contenente nell'interno altre radici della $\theta(y) = 0$, dove α è intero positivo e possibile l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno d'integrale.

Indicando con $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$ le altre radici della $\theta(y) = 0$ e ponendo che $\varphi(y)$ sia tale che

$$(7) \qquad \mathrm{B}_n\, \varphi'(y) + \mathrm{B}_{n-1}\, \varphi(y) = 0$$

[1] Pincherle S., *Sulle funzioni ipergeometriche*. Giorn. Battaglini, 1894, pag. 209.

ove

$$B_n = y(y-\omega_1)(y-\omega_2)\dots(y-\omega_n)\,.$$

$$B_{n-1} = -\beta \prod_{i=1}^{i=n-1}(y-\omega_i) +$$

$$+\alpha \sum_{i=1}^{i=n-1}(y-\omega_1)(y-\omega_2)\dots(y-\omega_{i-1})(y-\omega_{i+1})\dots(y-\omega_n)$$

ne viene

$$\varphi(y) = y^{\beta}(y-\omega_1)^{-\alpha}\dots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}$$

ed

$$(8)\qquad A_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n} = \frac{\alpha-1\,!}{\alpha_0\,!\,\alpha_1\,!\dots\alpha_n\,!}\,\frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+n-2)\dots(\alpha-1)}{2\pi i\,\alpha_n^{\alpha}}\,\psi(\omega_0)\,.$$

Poichè se $\varphi(y)$ è l'integrale di un'equazione differenziale del primo ordine (7), l'integrale (6) è l'integrale dell'equazione differenziale lineare d'ordine n del Pochammer [1]:

$$B_n\,\psi^{(n)} + \left(B_{n-1} + \binom{\alpha+n-2}{1} B_n'\right)\psi^{(n-1)} +$$

$$+\left((\alpha+n-2)\,B_{n-1}' + \binom{\alpha+n-2}{2} B_n''\right)\psi^{(n-2)} + \dots +$$

$$+\left(\binom{\alpha+n-2}{n-1} B_{n-1}^{(n-1)} + \binom{\alpha+n-2}{n} B_n^{(n)}\right)\psi = 0$$

enuncio il teorema che i coefficienti $A_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}$ dello sviluppo in serie di una radice di un'equazione algebrica di grado n sono funzioni ipergeometriche del Pochammer di ordine n. Considero poi l'equazione trinomia

$$(9)\qquad f(y) = y^n + py^r + q = 0$$

ottenuta dall'equazione

$$\theta(y) = y^n + q = 0$$

per una variazione p al coefficiente di y^r che in $\theta(y)$ è uguale allo zero, e determinati i punti critici e formata la stella di Mittag-Leffler ottengo la funzione algebrica in serie di polinomi che la rappresenta in tutto il campo di validità. Indicando con $\varphi_0(p)\,,\,\varphi_1(p)\,,\dots,\,\varphi_{n-1}(p)$ le n radici della (9) ho:

$$\varphi_n(p) = \sum_0^{\infty}\left(\lambda_{\alpha_0}c_0 + \lambda_{\alpha_1}c_1 p + \dots + \lambda_{\alpha_{s_\alpha}}c_{s_\alpha}p^{s_\alpha}\right)$$

[1] Pochammer, Journal de Crelle, Tomo 71 (1870), pag. 324.

ove

$$c_\alpha = \frac{\omega_\eta^{r\alpha+1}}{\alpha q^\alpha n} \binom{\frac{r\alpha+1}{n} - 1}{\alpha - 1} \quad (\eta = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

ed $\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1}, \ldots \lambda_{\alpha_{s_\alpha}}$ numeri che vengono una volta tanto determinati. Poi ottengo le radici dell'equazione

$$y^n + my^s + py^r + q = 0$$

mediante sviluppi in serie di polinomi i cui coefficienti sono funzioni ipergeometriche di $\varphi_0(p)\,\varphi_1(p) \ldots \varphi_{n-1}(p)$ serie di polinomi procedenti secondo le potenze di m. E così di seguito sino all'equazione di grado n avente i coefficienti prefissati per modo che stabilisco un metodo generale per la risoluzione dell'equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche: risultati in cui sono contenuti quelli del sig. Birckeland. Infatti, considerando l'equazione algebrica di grado n sotto la forma

$$y = y^n - (p_1 + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1})$$

ed indicando con y_η $(\eta = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ le n radici, egli ottiene

$$(10) \quad y\eta = \omega^\eta + \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \omega^{s\eta}\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} (\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n-1})$$

ove ω è una radice primitiva dell'equazione $y^{n-1} = 1$, la somma $\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$ estesa ai valori $0, 1, \ldots, n-1$ per tutte le α, ed è

$$\xi_\lambda = p_\lambda^{n-1} \qquad s = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + (n-2)\,\alpha_{n-1} - \alpha_1 + 1$$

e

$$(11) \quad A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}\, \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Come vedesi, $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$ è una formazione particolare di (5) ed è evidente che

$$(12) \quad \frac{K_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}}}{K_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}}, \quad \frac{K_{\alpha_1, \alpha_2+1, \alpha_3, \ldots \alpha_n}}{K_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}}, \ldots, \frac{K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}+1}}{K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}}$$

sono funzioni razionali dell'indice n.

Definendo come si fa da molti autori, come funzioni ipergeometriche quelle funzioni di più variabili che sviluppate in serie come le (11) hanno tutti i rapporti (12) dei coefficienti funzioni razionali dell'indice n, si vede che le $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$, sono funzioni ipergeometriche e ciò non è che una conseguenza del mio teorema per il quale i coefficienti sono funzioni ipergeometriche generalizzate nel senso di Pochammer.

Matematica. — *Divisori di un numero.* Nota di Pier Andrea Fontebasso, presentata dal Socio T. Levi-Civita (1).

1. La ricerca dei divisori di un numero è certamente uno degli argomenti più importanti della teoria dei numeri e, come insegna l'Aritmetica elementare, essa si effettua applicando il noto Crivello di Eratostene. Lasciando i numeri pari (potendo sempre ridurre la ricerca dei divisori di un numero pari alla ricerca dei divisori di un numero dispari) si sa che la determinazione di tutti i divisori di un numero dispari N è al più dell'ordine $E\frac{K}{2}$, essendo $K = E\sqrt{N}$.

Io mi propongo nella presente Nota di indicare un nuovo algoritmo costruttivo di tutti i divisori di un numero dispari N.

In verità se il nuovo metodo presenta grande vantaggio per la rapidità con la quale si effettuano i successivi tentativi, non presenta sempre un vantaggio rispetto al loro numero, perchè può in definitiva risultare dell'ordine $\frac{N+1}{2} - K$.

Però il procedimento che esporrò è, a mio parere, di un qualche interesse oltre per il modo col quale procede, anche perchè consente di assegnare con un minor numero di tentativi di quelli richiesti col metodo ordinario, i divisori complementari a, b $(a > b)$ che soddisfano alle condizioni $a < 2K$ o $a + 2b < 3K$ secondo che col metodo classico si proceda nel senso da 1 a K o viceversa.

2. Teorema. — *Dato un numero dispari* N, *posto*

$$E\sqrt{N} = K$$
$$R \text{ (resto)}$$

si formi la successione

$$(1) \qquad 2K + 1 - R\ ;\ 2K + 3\ ;\ 2K + 5\ ;\ \ldots\ldots\ N$$

e da questa l'altra

$$(2) \qquad 2K + 1 - R\ ;\ 4K + 4 - R\ ;\ 6K + 9 - R\ ;\ \ldots\ldots$$

(1) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

i cui termini sono il primo termine della (1), *la somma dei primi due, la somma dei primi tre ecc., la somma di tutti i termini. Ad ogni termine della* (2) *che è quadrato* (1), *corrisponde una coppia di divisori complementari disuguali di* N *e propriamente se è quadrato l'emmesimo termine* $m^2 + 2mK - R$, *ad esempio*

$$m^2 + 2mK - R = n^2, \tag{3}$$

$K + m \pm n$ *sono due divisori complementari di* N.

Reciprocamente, ad ogni coppia di divisori di N, *complementari e disuguali, corrisponde nella* (2) *un termine che è quadrato e propriamente se i divisori sono* a, b $(a > b)$ *è quadrato il termine della* (2) *che è somma di* $\frac{a+b-2K}{2}$ (2) *termini della* (1); *da questo quadrato si ha la coppia di divisori* a, b.

Per dimostrare la prima parte del Teorema, cioè che $K + m \pm n$ sono due divisori complementari di N, basterà provare che il loro prodotto è uguale ad N.

Infatti:

$$\begin{aligned}(K + m + n)(K + m - n) &= K^2 + m^2 + 2mK - n^2 \qquad \text{e per la (3)}\\ &= K^2 + m^2 + 2mK - m^2 - 2mK + R\\ &= K^2 + R\\ &= N\end{aligned}$$

come appunto si doveva dimostrare.

Siano ora a, b $(a > b)$ due divisori complementari di N e proviamo che il termine della (2) che è somma di $\frac{a+b-2K}{2}$ termini della (1) è un quadrato.

Infatti, ricordando che l'ennesimo termine della (2) è dato da $m^2 - 2mK - R$ ponendo $m = \frac{a+b-2K}{2}$, si ha il termine della (2)

(1) Si otterrà sempre almeno un quadrato, perchè tale è certamente la somma di di tutti i termini, somma che è uguale ad $\left(\frac{N-1}{2}\right)^2$.

(2) $\frac{a+b-2K}{2}$ è uguale o minore al numero dei termini della (2), perchè essendo $a + b \leqq N + 1$ si ha anche: $\frac{a+b-2K}{2} \leqq \frac{N-2K+1}{2}$ ed è appunto questo valore il numero dei termini della (2).

$$\left(\frac{a+b-2K}{2}\right)^2 + 2K \cdot \frac{a+b-2K}{2} - R =$$

$$= \frac{a^2+b^2+4K^2+2ab-4aK-4bK+4aK+4bK-8K^2-4R^2}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4(K^2+R)}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4N}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4}$$

$$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

che è un quadrato.

Da questo quadrato, operando come si è detto, si hanno i divisori

$$K + \frac{a+b-2K}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{e} \quad K + \frac{a+b-2K}{2} - \frac{a-b}{2}$$

cioè, riducendo, rispettivamente a, b come appunto si doveva provare.

3. Esempio. Per $N = 59055827$ si ha:

$$E\sqrt{59055827} = 7684$$
$$11971 \text{ (resto)}$$

formata la successione analoga alla (2) si trova che il secondo termine 18769 di questa è un quadrato e propriamente il quadrato di 137:

$$7684 + 2 \pm 137 = \begin{cases} 7823 \\ 7549 \end{cases}$$

saranno due divisori complementari del dato numero e propriamente due divisori primi.

4. Osservazione. Indicando con a, b due divisori complementari di N ottenuti dall'emmesimo termine della (2) quadrato di n si ha

$$a = K + m + n$$
$$b = K + m - n$$

dalle quali

$$(4) \qquad m = \frac{a+b}{2} - K$$

$$n = \frac{a-b}{2}.$$

La (4) ci dice che il *numero dei tentativi per trovare una coppia di divisori complementari di un numero dispari* N *è uguale alla differenza fra la media aritmetica e la parte intera della media geometrica dei divisori stessi.*

5. Da quanto precede si ricava la regola per trovare tutti i divisori di un numero dispari N, notando che se il numero è un quadrato, oltre i divisori trovati bisogna considerare il divisore K.

Si ha poi che *la condizione necessaria e sufficiente perchè un numero* N *sia primo è che la* (2) *abbia quadrato solo l'ultimo termine.*

6. Ricordando che se il prodotto di due numeri è costante, la loro somma è tanto minore quanto è minore la loro differenza, indicando, ad esempio, con

$$1\,,a\,,b\,,c\,,d\,,\mathrm{N}$$

tutti i divisori di N disposti in ordine di grandezza, dalla (4) si ha che nella loro determinazione si troveranno successivamente le coppie di divisori $b\,,c\,;\,a\,,d\,;\,1\,,\mathrm{N}$ cioè, incominciando dalla coppia più centrale, le coppie successive di divisori equidistanti dagli estremi.

Da ciò si ricava che se il numero N non è divisibile per nessun numero primo inferiore ad un numero primo p, per trovare i divisori di N, l'unità ed N esclusi, basta limitare la (2) ad un numero di termini dato da

$$\mathrm{E}\,\frac{p+\dfrac{\mathrm{N}}{p}}{2}-\mathrm{K}\quad\text{cioè}\quad\mathrm{E}\,\frac{p^2+\mathrm{N}}{2p}-\mathrm{K}\,.$$

7. Proviamo ora che il metodo esposto presenta dei vantaggi, oltre che per il procedimento più rapido nei varî tentativi, anche per il numero di questi per coppie di divisori complementari $a\,,b$ $(a>b)$ che soddisfano alle relazioni:

$$(5)\quad a<2\mathrm{K}\,;\qquad(6)\quad a+2b<3\mathrm{K}$$

secondo che col procedimento classico si proceda da sinistra a destra o viceversa.

Infatti, nel primo caso il numero dei tentativi per determinare $a\,,b$ è $\mathrm{E}\,\dfrac{b}{2}$, col nuovo metodo $\dfrac{a+b}{2}-\mathrm{K}$ e poichè dalla (5) si ha

$$a+b-2\mathrm{K}<b$$

sarà anche

$$\frac{a+b}{2}-\mathrm{K}<\mathrm{E}\,\frac{b}{2}\,.$$

Nel secondo caso sarà $E\frac{K-b}{2}$ il numero dei tentativi col vecchio metodo, e poichè dalla (6) si ha

$$a < 3K - 2b ,$$

sarà

$$\frac{a+b}{2} - K < \frac{3K-2b+b}{2} - K .$$

cioè

$$\frac{a+b}{2} - K < E\frac{K-b}{2} .$$

È chiaro che affinchè il nuovo metodo sia vantaggioso in ogni caso, bisogna che siano soddisfatte nello stesso tempo le (5), (6), ciò che avverrà in innumerevoli casi.

Fisica. — *Sul luogo fisico delle frangie nella doppia rifrazione accidentale meccanica di un liquido in moto piano permanente* (1). Nota del dott. Aldo Pontremoli, presentata dal Socio Corbino (2).

In un lavoro, già da tempo licenziato e che sta per apparire, ho tentato di giungere ad una teoria della doppia rifrazione accidentale meccanica dei liquidi deformati in modo tale che l'asse dell'ovaloide di Fresnel, iniziale indeformato (secondo il quale si osserva), non si alteri durante il moto permanente del liquido stesso.

Questa condizione restrittiva, introdotta allo scopo di poter considerare il caso in cui tutti i piani perpendicolari all'asse di osservazione siano sede di fenomeni uguali e ugualmente distribuiti, equivale analiticamente alla condizione che le grandezze impiegate non siano funzione delle coordinate dell'asse di osservazione.

Dall'applicazione dei postulati di Neumann e attraverso i concetti fondamentali di Maxwell arrivammo ad esplicitare la birifrangenza, osservata tra nicols incrociati in un punto del liquido, in funzione delle velocità locali di dilatazione e di scorrimento, mediante una formula

$$(1) \qquad \Delta_z = \frac{\pi s_z n^3}{\lambda c^2} \cdot pT \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di Fisica di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

dove Δ_z è la birifrangenza nel punto O (osservata secondo un asse Oz), u, v, le componenti della velocità locale del liquido rispettivamente secondo gli altri due assi Ox, Oy, di un triedro fondamentale fisso, s_z lo spessore di liquido attraversato dal raggio emergente nel punto, λ la lunghezzza d'onda della luce monocromatica impiegata, n l'indice di rifrazione del mezzo indeformato, p una costante elasticoottica, T il tempo di rilassamento, c la velocità della luce.

E a determinare l'angolo Φ_z tra il sistema di assi fissi e il sistema degli assi principali di dilatazione Ox_0, Oy_0, cambianti da punto a punto, della particella O (intesa nel senso di Helmoltz) si è posta la relazione

$$(2) \qquad tg^2\Phi_z = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}} .$$

Applicando poi la nota formula che lega la intensità I e I_0 della luce rispettivamente incidente ed emergente, tra nicols incrociati, da un mezzo birifrangente

$$(3) \qquad I = I_0 \operatorname{sen}^2 2(\Phi_z - \varphi)\operatorname{sen}^2 \frac{\Delta_z}{2}$$

dove φ è l'angolo tra il sistema di assi fissi e il sistema delle traccie delle sezioni principali del polarizzatore e dell'analizzatore sul piano fisso XY, siamo giunti alla determinazione della esistenza di due famiglie di frangie nere, in virtù delle condizioni di annullamento della (3)

$$\operatorname{sen} 2(\Phi_z - \varphi) = 0$$
$$\operatorname{sen} \frac{\Delta_z}{2} = 0 ,$$

Donde i luoghi, funzioni di x, y e delle costanti

$$(4) \quad \text{per la I famiglia} \qquad \Phi_z - \varphi = \frac{k\pi}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

$$(5) \quad \text{per la II famiglia} \qquad \Delta_z = 2k\pi$$

Era interessante appurare se e a quali condizioni particolari di deformazione potessero eventualmente corrispondere le particelle di cui queste due famiglie di frangie nere sono il luogo.

Si osserva intanto dalla (4) e dalla (5) che mentre il luogo della prima famiglia è unicamente funzione della posizione della sezione principale del polarizzatore e delle velocità di deformazione, il luogo della seconda famiglia

è indipendente dalla posizione del piano di polarizzazione, ma è funzione delle costanti fisiche del liquido, della lunghezza d'onda della luce impiegata, dello spessore attraversato dalla luce incidente, oltre che di dette velocità.

Le frangie della prima famiglia saranno quindi comuni e tutti i liquidi, per i quali valgano i principii inizialmente postulati, ove essi siano soggetti ad una medesima deformazione; esse saranno inoltre generalmente riconoscibili [salvo che per $\Phi_z \neq f(x,y)$], perchè si sposteranno ruotando col variare dell'angolo φ tra il polarizzatore e l'asse fisso Ox.

Per ipotesi inoltre $(\Phi_z - \varphi)$ è l'angolo formato tra la traccia della sezione principale del polarizzatore e uno degli assi principali di dilatazione, si ha pertanto immediatamente in virtù della (4) che « le frangie della « prima famiglia sono il luogo delle particelle un cui asse principale di di- « latazione è perpendicolare alla traccia del piano di polarizzazione ».

Nel caso $\Phi_z \neq f(x,y)$, esistendo birifrangenza, le particelle saranno evidentemente tutte ugualmente orientate sugli assi fissi; qualora poi si manifestino delle frangie della prima famiglia, esse non potranno essere che il luogo di particelle indeformate, e le frangie non muteranno col piano di polarizzazione.

Facendo coincidere gli assi fissi colle traccie dei piani di polarizzazione, essendo allora $\varphi = 0$ e non potendo essere infinita la differenza delle velocità di dilatazione, si ha dalla (2) come luogo delle frangie della prima famiglia l'equazione $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, la quale non è che un caso particolare della proposizione suesposta.

Per appurare il luogo fisico delle frangie della seconda famiglia, anzichè agli assi fissi, si riferisca la (5) agli assi principali di dilatazione (mutabili da punto a punto): si ponga a tal uopo nella (2) $tg\, 2\,\Phi_z = 0$, da che si ricava essere nulla, come era da prevedersi, rispetto ai nuovi assi, per ciascuna particella, la velocità di scorrimento, e quindi lo scorrimento.

Siano u_0, v_0 le componenti locali della velocità della particella O rispetto a Ox_0, Oy_0 dalla (1) e dalla (5) si avrà rispetto ai nuovi assi

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = \pm \frac{k^2}{A^2}$$

dove A è la costante d'esperienza fuori radicale nella (1) divisa per 2π.

Quest'ultima relazione è pertanto la condizione di esistenza di una frangia della II famiglia, dianzi caretterizzata dalla (2), nel punto O.

Introducendo l'equazione di continuità, pei moti piani che consideriamo:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0,$$

si ricava immediatamente per tutte le particelle costituenti una stessa frangia

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \pm \frac{1}{2} \frac{k^2}{A^2}$$

dove u_i, v_i sono le componenti della velocità di una particella in x_i, y_i, rispetto ai suoi assi principali Ox_i, Oy_i.

Potremo affermare pertanto che « ogni frangia della II famiglia è il « luogo di particelle che, riferendosi ai rispettivi assi principali di dilata- « zione, hanno velocità di dilatazione costanti e di determinati valori « critici, o anche per note proporzionalità, soggiacciono a tensioni principali « costanti e di determinati valori critici ».

Per $k = 0$, è

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = 0 ,$$

ossia le velocità di dilatazione, e quindi le tensioni, rispetto agli assi principali di dilatazione, sono identicamente nulle per tutte le particelle costituenti la frangia di ordine zero. Tali particelle sono quindi evidentemente indeformate e la posizione di tale frangia è caratteristica della deformazione applicata, ma non delle costanti fisiche del liquido, dello spessore attraversato dalla luce incidente, nè vi ha dispersione al variare della lunghezza d'onda.

Dalle formule suesposte è possibile, pei moti considerati, trarre anche sperimentalmente da dati ottici, nozione sull'orientamento delle particelle in ciascun punto.

Si ha infatti dalla (3) per nicols incrociati, detta $I_{'}$, $I_{''}$ la intensità della luce rispettivamente emergente in uno stesso punto per $\varphi = 0°$ e $\varphi = 45°$,

$$I_{'} = I_0 \operatorname{sen}^2 2\,\Phi_z \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta_z}{2}$$

$$I_{''} = I_0 \cos^2 2\,\Phi_z \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta_z}{2} .$$

da cui

$$\operatorname{tg}^2 \Phi_z = \pm \sqrt{\frac{I_{'}}{I_{''}}}$$

La formula è indeterminata, come è ovvio, solo pei punti appartenenti alle frangie della II famiglia.

Potremo quindi affermare che « la tangente del doppio dell'angolo, che « gli assi principali di dilatazione di una particella in un punto formano

« cogli assi fissi scelti ad arbitrio, è data dalla radice quadrata del rapporto « fra le intensità delle luci emergenti nel punto, rispettivamente quando « l'azimut della sezione principale del polarizzatore rispetto agli assi fissi è « 0° e 45°. La regola è valida ovunque, eccetto pei punti delle frangie « della II famiglia ».

È però opportuno osservare che anche in tal caso si potrà generalmente determinare l'orientamento delle particelle, per ragioni di continuità, non essendo le frangie della II famiglia luogo di singolarità alcuna rispetto all'orientamento.

Desidero ringraziare il prof. O. M. Corbino per il suo interessamento allo svolgersi di questo tema.

Petrografia. — *Sopra un basalto e un calcare a glauconite di Campofiorito presso Palermo* (1). Nota di P. Comucci, presentata dal Corrisp. F. Millosevich (2).

In questa breve Nota descrivo due rocce di Campofiorito presso Palermo messe a mia disposizione dal prof. De Stefani. L'una è un basalto, l'altra una roccia calcarea di aspetto arenaceo, contenente, in forma di minuta diffusione, abbondante glauconite.

Macroscopicamente il basalto appare compatto ed uniforme, finamente microcristallino, quasi afanitico di colore grigio nerastro.

Al microscopio risulta una struttura che direi in parte intersertale e in parte ofitica, sia perchè l'augite se in massima parte è allotriomorfa si presenta anche in prismetti idiomorfi, sia perchè la sostanza vetrosa riempie gli spazî angolosi lasciati dai componenti essenziali, plagioclasio e pirosseno, assumendo aspetto cuneiforme.

Dei minerali costituenti tale basalto il più abbondante è il plagioclasio in liste idiomorfe non piccole, intrecciate fra loro del tutto inalterate.

Più spesso gli individui di plagioclasio sono geminati con le due leggi insieme combinate albite-carlsbad, cui talvolta si unisce la legge del periclino. La rifrazione è di molto maggiore di quella del balsamo anche rispetto ad α'.

Per le estinzioni simmetriche delle lamine geminate con legge dell'albite e normali A(010) ho avuto valori diversi, in alcuni casi aggirantisi fra 20° e 26°, in altri, più frequenti assai, valori compresi fra 33° e 38°. Sembra dunque che il plagioclasio, pure essendo un termine di natura ba-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

sica, abbia composizione assai variabile da un termine labradoritico piuttosto acido ad un termine quasi bitownitico. Questo carattere è confermato dalle misure delle estinzioni ottenute per geminati doppî albite-carlsbad, per le quali ho ottenuto:

I	II	
34°	20°	55 % di anortite
35	20	56 » »
36	18	57 » »
36	20	58 » »
32	28	60 » »
40	23	68 » »
38	14	70 » »

L'elemento pîrossenico è un'augite a lieve tinta violacea e quindi debolmente titanifera, in parte allotriomorfa e riempiente gli interstizî fra le liste feldispatiche, in parte idiomorfa in individui prismatici. In alcune lamine più spesse si ha un lievissimo accenno a pleocroismo. La rifrazione e birifrazione sono sempre molto forti. Per un inizio di alterazione assume talvolta un tenue colore verdastro e una lieve diminuzione della sua birifrangenza, ma in generale è freschissima. Nelle lamine di sfaldatura prismatica le massime estinzioni misurate hanno raggiunto il valore di 43°-44° $c:C$. Peridoto sembra che manchi del tutto e lo conferma il tenore relativamente basso di MgO avuto nell'analisi.

Come ho già accennato, è presente invece un vetro di colore avana e devetrificato. Più abbondante è poi una sostanza giallastra o verde costituita da un insieme di fitte e finissime fibrille e scagliuzze birifrangenti con aspetto quasi sericitico. In alcune laminette di dimensioni un pochino maggiori ho potuto riconoscere pleocroismo assai forte dal verde giallognolo al verde cupo ed estinzioni a 0°.

Parmi si tratti di materiale celadonitico assai comune, come è noto, in rocce vulcaniche basiche. La presenza, ed in piccola quantità, della potassa trovata nelle roccie avvalorerebbe tale ipotesi. In altri punti il materiale celadonitico è misto a calcite di origine estranea che poi forma da sola esili venuzze nella roccia, la quale dà effervescenza palese con acido cloridrico a freddo. In alcuni casi sembra quasi che il materiale celadonitico provenga dalla decomposizione della sostanza vetrosa, e il fatto che i principali costituenti cristallizzati di questo basalto sono poco o punto alterati confermerebbe questo supposto.

L'analisi della roccia ha dato i risultati seguenti:

SiO_2	47,81
TiO_2	1,90
Al_2O_3	16,47
Fe_2O_3	10,90
FeO	1,37
MnO	—
CaO	9,78
MgO	2,30
K_2O	1,20
Na_2O	4,41
H_2O	2,82
CO_2	1,15
P_2O_5	—
	100,11

Dai risultati analitici, con eliminazione della calcite presente, calcolata in base al quantitativo avuto di CO_2, e dell'acqua, si ricava la seguente formula magmatica secondo il metodo di Osann:

S	A	C	F	N	*a*	*c*	*f*
51,41	11,76	10,90	19,92	8,51	5,52	5,12	9,36

Secondo Loewinson-Lessing la formula magmatica sarebbe:

$$SiO_2 : R_2O_3 : RO = 3,56 : 1 : 1,34$$
$$\alpha = 1,64 \qquad \beta = 66$$
$$R_2O : RO = 1 : 2,68$$
$$NaO : K_2O = 1 : 0,142.$$

Nella roccia calcarea fu separata la glauconite in stato puro, prima trattando la polvere della roccia con acido acetico assai diluito per asportare tutta la calcite e in seguito frazionando la polvere residua mediante il liquido del Thoulet ridotto alla densità di 2,70: la glauconite andava a fondo molto lentamente, cosicchè è da presumere che la densità di essa di pochissimo superi un tale valore. Rimaneva a galla nel liquido del Thoulet una polvere piuttosto scarsa biancastra formata probabilmente di frammenti di quarzo, riconoscibili qua e là anche al microscopio, e da uno scarso residuo argilloso-ocraceo che rimane indietro anche quando si tratta la roccia con acido cloridrico di media concentrazione.

La ricerca del magnesio nel calcare dava risultato negativo. Per la ricerca di P_2O_5 la roccia fu trattata a bagnomaria con acido nitrico e quindi al filtrato fu aggiunto molibdato ammonico: ottenni una reazione decisamente positiva. Il fosfato è contenuto esclusivamente nel calcare perchè la glauconite, trattata separatamente, non dava affatto reazione.

L'analisi quantitativa della Glauconite diede i risultati seguenti:

	%	Rapporti molecolari
SiO_2	46,70	0,778
Al_2O_3	5,52	0,055
Fe_2O_3	21,62	0,135
FeO	2,42	0,033
CaO	0,63	0,011
MgO	4,16	0,103
K_2O	6,97	0,073
Na_2O	1,73	0,028
H_2O	11,48	0,637
	101,23	

Rispetto alla formula della glauconite è noto che le analisi, essendo discordi fra loro, non conducono a una composizione ben definita. Dell'analisi riportate nel trattato di Hintze ne ho considerate soltanto 12, cioè tutte quelle nelle quali fu eseguita separatamente la determinazione del ferro ferroso e ferrico, necessaria per la discussione della formula. I rapporti molecolari, fatti $SiO_2 = 1$, non dànno nessuna costanza tanto rispetto al complesso delle basi trivalenti, quanto delle bivalenti e delle monovalenti, anche comprendendo l'acqua fra quest'ultime. Nè maggiormente costante risulta il rapporto fra la silice da una parte e il complesso di tutte le basi, e nemmeno è riuscito il tentativo di interpretare questo rapporto variabile fra acido e base come conseguenza della mescolanza in proporzioni variabili di due silicati, uno più basico, per esempio ortosilicato, ed uno più acido, per esempio metasilicato. Non credo che meriti insistere su tali tentativi che, nel momento presente, darebbero luogo a resultati complicati, per di più senza una base sufficiente sperimentale.

Al microscopio i granuletti di glauconite appaiono sempre di colore verdastro, ma non affatto pleocroici: hanno forma ovale, tondeggiante e il diametro nei più grossi supera di poco mezzo millimetro. Adoperando forti ingrandimenti risultano formati di squamette birifrangenti, fittamente serrate ed intrecciate fra di loro; quindi la loro struttura può dirsi criptocristallina. La roccia calcarea poi, inchiudente il minerale, appare riccamente fossilifera e precisamente ricca di resti di conchiglie di foraminifere. Mi è stato

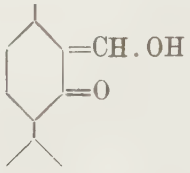
possibile identificare i generi seguenti: *Triloculina*, *Biloculina*, *Globigerina*, *Testilaria*, *Nummulites*, *Ortofragmina* ed inoltre frammenti di alga *Nullipora*.

La presenza contemporanea dei due generi *Nummulites* ed *Ortofragmina* autorizzano a collocare questa roccia nel terziario inferiore e precisamente nell'eocene.

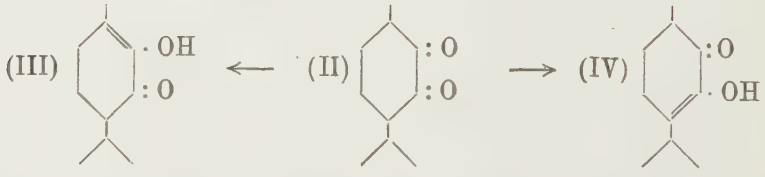
Come è stato riscontrato diverse volte, anche in questo caso nell'interno delle piccole conchiglie di foraminifere si osservano delle piccole concentrazioni di glauconia.

Chimica. — *Sopra la tautomeria della buccocanfora e una trasformazione del mentone in tetraidrocarvone* [1]. Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli [2].

Nel 1906 Semmler e Mc Kenzie [3], facendo agire l'ozono in presenza d'acqua sull'ossimetilenmentone (I)

(I) 

ottennero artificialmente, per la prima volta, la buccocanfora o diosfenol, componente dell'essenza di *Diosma crestata*. Poichè essa dà una monossima, è solubile negli alcali caustici acquosi e forma monoeteri alchilici e acidilici, quegli autori ritennero che, invece della struttura di *p*-mentandione 2-3 (II) prevedibile dalla reazione, convenisse alla sostanza una delle forme enoliche (III o IV) del chetone stesso:



E scelsero la formola (III) perchè la buccocanfora, ossidata con ozono

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

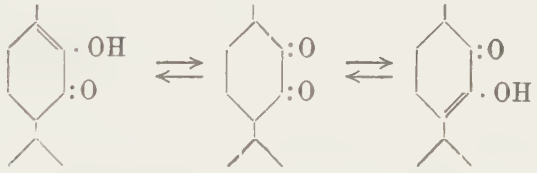
(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(3) *B.* *39*, 1158.

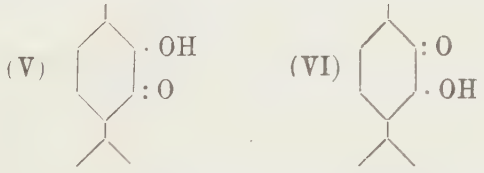
in presenza d'acqua, fornisce acido α-isopropil-γ-acetil-n-butirrico:

$$(CH_3)_2:CH\,.\,CH\,.\,CH_2\,.\,CH_2\,.\,CO\,.\,CH_3$$
$$\Big|$$
$$CO\,.\,OH\,.$$

Non si può, tuttavia, escludere che la buccocanfora agisca anche secondo altre forme, ad esempio la IV, perchè di nessuno dei derivati sopradetti fu ripetuta l'ossidazione con ozono, per accertare se conservassero la struttura della sostanza primitiva (1). D'altra parte, si può rilevare che la buccocanfora, sebbene possegga la molecola asimmetrica si conosce solamente sotto la forma inattiva, mentre è evidente che dall'ossimetilenmentone (I) si dovrebbe, ove mantenesse sempre la struttura III, poter ottenere otticamente attiva; tutto, invece, si spiega ammettendo che si racemizzi in un passaggio tautomerico come il seguente:



Mi sono proposto di chiarire la questione, sperimentando sulla buccocanfora con processi di riduzione. Difatti, addizionando due atomi d'idrogeno a una molecola di questa sostanza si perverrà a un ossimentone (V), se essa conserva la formola attribuitale da Semmler e Mc Kenzie; e invece a un ossitetraidrocarvone (VI) se agisce sotto l'altra forma enolica:

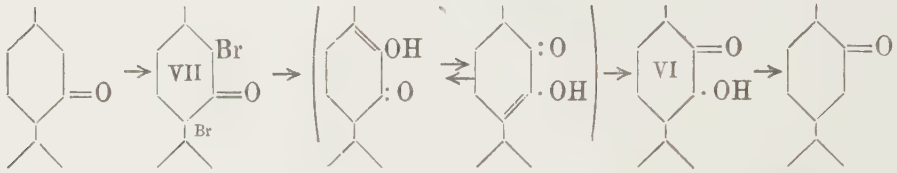


e all'uno o all'altro chetoalcool, se agisce come dichetone; naturalmente si potrà, anche, pervenire al miscuglio dei due prodotti di riduzione. È ovvio che la formazione dell'ossitetraidrocarvone (VI) — da solo o con l'isomero — è l'unica istruttiva e stabilirebbe la proprietà della buccocanfora d'agire tautomericamente: con la formola III rispetto a l'ozono, e con le altre, II e IV, o una di esse, rispetto all'idrogeno.

(1) Ultimamente O. Wallach e M. Gerhardt (Liebig's Ann. *414* 346 [1917]) hanno segnalato una forma di buccocanfora che fonde a 38° e che con facilità si muta nell'altra generalmente descritta che fonde a 82°.

Ho eseguito la riduzione parziale della buccocanfora, valendomi del metodo catalitico, cioè facendola reagire, in presenza di nero di platino, con la quantità equimolecolare d'idrogeno. Si perviene a varii prodotti; ma fra di essi, appunto, si ha l'ossitetraidrocarvone (VI), che ho identificato trasformandolo nel chetone fondamentale.

Poichè la buccocanfora si può ottenere dal mentone, il sudetto risultato costituisce un passaggio da questo chetone al tetraidrocarvone, ciò che, per quanto sappia, non si era ancora osservato. Ora, come ho dimostrato già dal 1913 (1), la buccocanfora si può avere dal mentone, oltre che per il tramite del derivato ossimetilenico (I) anche per il tramite del derivato $\alpha\alpha'$ bibromurato (VII): con le mie nuove esperienze risulta quindi realizzata questa serie di passaggi:



mentone tetraidrocarvone

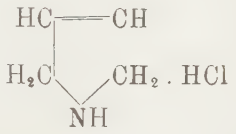
D'altra parte, omologhi della buccocanfora, o diidropirocatechine (2), si possono preparare, sempre a traverso gli $\alpha\alpha'$ bibromoderivati, da varî cicloesanoni omologhi del mentone. Si vede subito che, riducendo parzialmente tali diidropirocatechine, sarà poi possibile passare a cicloesanoni isomeri con quelli da cui esse presero origine e, a ogni modo, stabilire se esse, o quali fra esse, possono reagire tautomericamente, come la buccocanfora, e prestarsi allo spostamento del carbonile, per mezzo della sudetta serie di passaggi.

Il lavoro sarà presto pubblicato per esteso nella *Gazzetta chimica*.

(1) Questi Rendiconti XXII, serie 5ª, 2° sem., pag. 569.
(2) Questi Rendiconti XXVIII, serie 5ª, 2° sem., pag. 30.

Chimica biologica. — *Pirrolo e melanuria* [1]. Nota V di Pietro Saccardi, presentata dal Socio A. Angeli [2].

Allo scopo di estendere ancora le ricerche comparative sul comportamento dei diversi composti pirrolici nell'organismo animale ho esperimentato il *cloridrato di pirrolina* [3]:



sostanza cristallina, solubilissima in acqua, solubile in alcool e pochissimo nei solventi anidri. La soluzione acquosa ha reazione neutra e non dà la diazoreazione di Ehrlich, quella di Thormählen nè reagisce con gli ossidanti in uso per svelare il melanogeno.

Le prove di ossidazione intraorganica furono fatte su di un coniglio di pelo bigio del peso di kgr. 2,100 a cui s'iniettarono, in soluzione acquosa sterile lievemente alcalina, dapprima cgr. 8 di cloridrato di pirrolina (sospettandosi questa sostanza più venefica degli altri composti pirrolici testè studiati). L'iniezione si mostrò indolora e nulla fu riscontrato a carico dell'organismo nè dell'area iniettata. Dopo 8 ore l'orina, raccolta ed analizzata, fu trovata normalissima, solo tende a diventar bruna all'aria e reagisce in modo positivo soltanto con i reattivi del melanogeno e cioè:

(I) *Reazione di Thormählen*, positiva e lieve.
(II) *Con acido nitrico concentrato* (*Heller*), anello bruno ed annerimento totale agitando i due liquidi.
(III) *Con acido nitroso*, anello nero ed annerimento del miscuglio.
(IV) *Con miscela cromica*, imbrunimento del miscuglio.
(V) *Con acqua di cloro*, imbrunimento del miscuglio.
(VI) *Diazoreazione di Ehrlich*, positiva, ma non forte.
(VII) *Con cloruro ferrico ed acido cloridrico*, imbrunimento del miscuglio ed anello bruno come sopra.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della L. Università di Camerino.
(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.
(3) Il pirrolo, in *Pirrolo e melanuria*, Nota III, Gazzetta Chimica Italiana, anno L parte II, fasc. 3°, pag. 121; l'α-α-dimetilpirrolo, in *Pirrolo e melanuria*, Nota IV.

Queste orine non dànno alcun precipitato col tempo dopo trattamento con i suddetti reattivi.

Dopo 2 ore ancora furono raccolte altre orine che dettero uguali risultati. Il dì dopo fu iniettata pari dose (cgr. 8) di cloridrato di pirrolina. L'animale sta bene, le orine sono normalissime, solo mostrano un poco più accentuate le suddette reazioni.

A distanza di 24 ore furono iniettati cgr. 10 di cloridrato di pirrolina. L'orina è ancora normale, tolleranza buona, fenomeni locali inesistenti. Le reazioni di ossidazione si mostrano più forti. Concentrando l'orina, questa, acidificata con acido cloridrico, dà con cloruro ferrico in capo ad alcune ore un precipitato bruno. La diazoreazione è forte, il Thormählen è lieve. Avendo notato che le orine imbrunite non dànno più un Thormählen ben netto e che d'altronde le orine di coniglio fin dall'emissione cominciano ad imbrunire le ho raccolte sotto uno strato d'olio in bottiglia azzurra. Ciò non ostante il Thormählen non è più deciso di prima.

A distanza di altre 24 ore furono iniettati cgr. 20 di cloridrato di pirrolina in soluzione come sopra. Neppure ora si mostrarono fatti patologici locali o generali, tutte le reazioni sopra descritte, compreso il Thormählen questa volta, furono forti e nette.

Soltanto a dosi piuttosto forti adunque il Thormählen è proporzionale alle altre reazioni giacchè, a dosi minori di cgr. 20, le orine sono veramente melanotiche; anche la diazoreazione vi è ben netta e l'orina imbrunisce all'aria come dopo iniezioni di pirrolo o di α-α-dimetilpirrolo, ma il Thormählen vi è insolitamente scarso. È noto inoltre che se l'orina viene bollita o scaldata per un certo tempo, o tenuta a sè fino ad annerimento perde sempre la proprietà di dare il Thormählen tanto dopo iniezioni di cloridrato di pirrolina quanto degli altri composti pirrolici precedentemente studiati per inferire che non vi sia da fare grande affidamento sulla reazione di Thormählen come positiva pel melanogeno e che tale reazione sia forse dovuta a sostanze di natura pirrolica ed assai instabili all'aria ed alla luce.

Al pari di tutte le altre orine melanotiche umane ed animali, naturali ed artificiali, anche questo melanogeno non passa in etere.

Inoltre succhi sterili di fegato, milza e patata tenuti in termostato a 38° con gr. 0,50 cad. di cloridrato di pirrolina non hanno dato colorazione alcuna neppure dopo diversi giorni. Però potrebbe anche darsi che il cloridrato di pirrolina, essendo un sale, possa esser nocivo agli enzimi della patata e delle ghiandole sperimentate.

Riassumendo:

Il pirrolo dà un Thormählen classico, bellissimo, dà neri per azione enzimatica ed annerimento e granulazioni al bulbo dei peli e nello strato vascolare del derma.

L'α-α-dimetilpirrolo dà un falso Thormählen (lab-Thormählen), una colorazione rossa per via enzimatica ed annerimento del bulbo del pelo.

Il cloridrato di pirrolina non dà nè il Thormählen, nè colorazione alcuna per ossidazione enzimatica, anzi la prima reazione stenta a manifestarsi nelle orine dopo iniezioni di piccole dosi di questa sostanza, dà poi anche annerimento della pelle ed è notevole il fatto che la graduazione del reagire delle orine verso il Thormählen è proporzionale alla facilità di ossidazione di queste tre sostanze rispetto alle azioni degli enzimi. Non trovo modo di giustificare o di spiegare questo diverso comportamento rispetto al Thormählen non sapendosi ancora quali composti pirrolici siano capaci di dare tal reazione ed ignorandosene anche il meccanismo. Devo quindi limitarmi a fatti puramente descrittivi.

Noto infine che anche il cloridrato di pirrolina, che non mostrasi quindi più tossico del pirrolo e dell'α-α-dimetilpirrolo, finisce per pigmentare in nero l'area iniettata esposta alla luce. La parte limitrofa, coperta da peli resta invece incolora come, del resto, qualunque area non iniettata a cui contemporaneamente alla prima iniezione fu tolto il pelo.

È evidente adunque che nella pigmentazione di queste aree prende parte la luce (sono noti infatti fenomeni di dermofotomelanina in individui normali) e pare veramente che questi composti, propinati sottocute di organismi sani, non siano ossidati fino a pigmento nero (melanina) altro che da cellule a funzione specificatamente pigmentogena come le cellule degli apparecchi tricogenici. Non sarebbe quindi fuori luogo il pensare che la pelle degli animali albini, dotati cioè di lieve potenza ossidante, e di cui le cellule tricogeniche non sono capaci di dare pigmento sia del pari inadatta ad annerirsi per iniezioni sottocutanee dei suddetti composti. Mi riserbo queste prove, insieme ad esperimenti di cataforesi, ad ulteriori lavori.

Noto in ultimo come assai probabile che le sezioni istologiche che verranno eseguite nella pelle annerita mostrino pigmentazione di bulbi piliferi o granuli di pigmento analogamente alla pelle di animali iniettati di pirrolo o di α-α-dimetilpirrolo, poichè è permesso pensare che tutti quei composti pirrolici che per ossidazione intraorganica dànno melanogeno nelle orine siano capaci anche di subire analoghi processi ossidativi locali nelle aree iniettate.

Ringrazio doverosamente il prof. Angeli per un campione di cloridrato di pirrolina da lui cortesemente posto a mia disposizione.

Biologia. — *Sulla specie mediterranea del genere Meleagrina.* Nota II di Gustavo Brunelli, presentata dal Socio Battista Grassi (1).

La quistione della specie Mediterranea delle *Meleagrina* non mi pare a dire la verità ancora risolta.

Dautzenberg riferisce le controversie che qui sotto riportiamo.

« Questo mollusco, introdotto nel Mediterraneo dopo l'apertura dell'istmo di Suez è stato bene figurato da Savigny (pl. XI, figg. 8 e 9 del suo grande Atlante).

Audouin sull'*Explication sommaire* di questa opera si limita a dire « la fig. 8 è un'altra specie dello stesso genere (che la *Meleagrina margaritifera*) e la fig. 9 è una Avicula che sembra essere stata distinta dagli autori inglesi ».

Issel dando nel 1869, nel suo importante lavoro *Malacologia del mar Rosso*, la lista dei nomi da attribuirsi alle figure di Savigny ha considerato le figg. 8 e 9 come rappresentanti di esemplari giovani di *M. margaritifera*. M. Vassel, *Note sur les Faunes de l'Isthme de Suez*, p. 50, adotta l'opinione di M. Issel, ma aggiunge: « A Suez si chiama Huître perlière una Avicula che mi sembra essere quella che Vaillant da designato come *Avicula radiata* Desh e che Savigny ha figurato nelle sue tavole, etc. ». Più lontano egli dice ancora « Io ho trovato la *Meleagrina* di Suez vivente in gran numero a Porto Said nell'aprile 1886, essa prospera vicino alla superficie dell'acqua come a Suez ».

Effettivamente è al prof. Vaillant che noi dobbiamo la prima attribuzione di un nome speciale alle figg. 8 e 9 di Savigny. In un lavoro intitolato: *Recherches sur la Faune malacologique de la Baie de Suez* pubblicato nel 1865 nel Journal de Conchiliologie, esso ha ripreso, secondo l'avviso dello stesso Deshayes, che ce ne dà l'assicurazione, il nome di *Avicula radiata* Deshayes (Encyclopédie méthodique, III, pag. 102, n. 129). La descrizione data da Deshayes è disgraziatamente troppo poco precisa, perchè ci sia possibile riconoscere senza esitazione la conchiglia di cui ci occupiamo; essa non è d'altra parte accompagnata da alcun riferimento e l'habitat non è indicato. Di più Deshayes sembra aver radiato questa specie perchè non ne parla più nella seconda edizione degli *Animaux sans vertèbres*. La collezione Deshayes, conservata a l'École des mines, non racchiude il tipo dell'*Avicula radiata*, ma noi abbiamo riscontrato un esemplare senza

(1) Presentata nella seduta del 16 marzo 1921.

etichetta che appartiene incontestabilmente alla specie di Suez (fig. 8 di Savigny). In queste circostanze malgrado l'incertezza, dice il Dautzenberg, relativamente all'identificazione dell'*A. radiata*, noi abbiamo adottato questo nome, più antico di quelli attribuiti da Reeve, Swainson etc. a delle forme estremamente vicine, se non identiche dell'Oceano indiano e dell'Oceano pacifico.

Quando il dott. Tiberi ricevette da Alessandria le prime Meleagrine pescate nel Mediterraneo, egli credette che si trattasse di una specie nuova, caratteristica di questo mare e ne distribuì alcuni esemplari sotto il nome di *Meleagrina Conemosi*.

Il Monterosato sostituì nel 1884 al nome restato manoscritto di Tiberi, quello di *Savigny* che ha l'inconveniente di essere stato precedentemente impiegato da Deshayes per un altro genere di mollusco troppo vicino l'Avicula. Fin qui il Dantzenberg. Dopo tante discussioni il mio modesto avviso è che la Meleagrina del Mediterraneo non sembra potersi identificare con la *Meleagrina muricata*, e se essa rappresenti esemplari giovani di *Meleagrina margaritifera* d'altra parte è dubbio che sarà facilmente eliminato.

È certo che anche gli esemplari da me esaminati, non hanno le dimensioni che suole raggiungere la *Meleagrina margaritifera*, ma intorno a ciò mi riserbo ogni giudizio, potendo ciò essere in relazione coll'età. Senza alcun dubbio la questione più importante che non mi sembra sufficientemente illustrata dagli autori è se questa specie possa senz'altro identificarsi a quelle del Mar Rosso. Intanto dai dati etologici non comprendo come il Dautzenberg non abbia rilevato contraddizioni con quanto scrive che la *Meleagrina margaritifera* nel mar Rosso non vive gregaria, mentre in Tunisia avrebbe formato addirittura dei banchi.

Resterebbe poi sempre importante dal punto di vista biogeografico assodare se delle due specie di *Meleagrina* del Mar Rosso una sola sia immigrata nel Mediterraneo e perchè. Come si vede vi è ancora materia di indagine, poichè sono solo le specie eurialine che possono avere passato l'istmo di Suez. Se delle due specie di Meleagrine del Mar Rosso una sola è passata nel Mediterraneo, conviene ammettere che una sola specie sia eurialina e le altre no, ciò che potranno dirci delle indagini fisio-etologiche. Così pure, come ho accennato, si dice che nel Mar Rosso la *Meleagrina margaritifera* viva isolata e a poca profondità, e invece la *muricata* più profondamente e gregaria. In che rapporto stanno questi dati rispetto alla Meleagrina mediterranea?

A prescindere dalla discussione scientifica del valore sistematico e biogeografico delle Meleagrine nelle coste libiche, dal punto di vista pratico ciò che sin d'ora merita attenzione è la possibilità di stabilirvi un razionale sfruttamento.

Ed infatti dopo che Saville Kent ha mostrato che la *Meleagrina mar-*

garitifera può facilmente allevarsi in aquarium, molti sono gli autori che hanno discusso sulle possibilità di allevamenti artificiali delle Meleagrine, o quanto meno di parchi di cultura.

Ricordiamo che Sir James Hudson ministro plenipotenziario di S. M. la imperatrice d'Inghilterra in Italia, che da molto tempo seguiva con interesse gli studî del Comba, ottenne che il Governo italiano disponesse per la costruzione di un acquario in Torino onde precisare tali esperimenti. Però siccome la somma disponibile riusciva insufficiente, egli a proprie spese fece venire dall'arcipelago Dahlak delle ostriche perlifere vive e l'esperienza ebbe esito favorevole.

Il Comba indicò allora come adatte per tali allevamenti le coste della Calabria, ma dopo la presenza accertata della Meleagrina nelle nostre colonie africane del Mediterraneo, i termini del problema ci sembrano favorevolmente spostati. Visto che la Meleagrina si riproduce spontaneamente sulle coste libiche, occorre studiare le condizioni di salinità e di temperatura e le isobate di colonizzazione, ove esse si riscontrano, e importare dei riproduttori delle diverse specie di Meleagrina dalle isole Dahlac del mar Rosso, ciò che non sembra offrire alcuna difficoltà.

Riterremmo decoroso anche per le nostre tradizioni scientifiche, dopo che fu proprio il naturalista italiano De Filippi a scovrire la genesi naturale delle perle, in studî ormai divenuti celebri e che non staremo a menzionare, che la cultura dell'ostrica perlifera venga ripresa nei nostri mari coloniali colla fondazione di un vero osservatorio biologico, e di parchi di allevamento. Se le condizioni del mar Rosso non si prestano, per gli ostacoli che vi sarebbero da parte degli indigeni, non è escluso che un simile tentativo, come dai risultati anzidetti, possa venir condotto nella nostra colonia libica.

BIBLIOGRAFIA

1. — Carus, *Prodromus Faunae mediterraneae* — Savy. Paris, 1881.
2. — Comba P., *La madreperla*, Tipografia operaia, Torino, 1898.
3. — Dautzenberg Ph., *Compagne de la Melita, Mollusques recueillis sur les côtes de la Tunisie et de l'Algérie.* Mém de la Société Zoologique de France, tome VIII, Paris, 1895.
4. — Fischer P., *Manuel de Conchyliologie*, Librairie F. Savy, Paris, 1881.
5. — Parazzoli G., *Proposta di formazione di un Comitato promotore per la pesca delle madreperle e delle perle nel mar Rosso*, Tip. Golio, Milano, 1894.
6. — Salvadei G., *La pesca e il commercio delle perle e della madreperla nell'Eritrea.* Atti del V Congresso intern. di pesca, Roma, 1911.
7. — Seurat L. G., *L'huitre perlière-Nacre et Perles*; *Encyclopédie scientifique*, Masson Editeur, Paris.
8. — Tillier, *Le canal de Suez et sa faune ichtyologique.* Mém. Soc. Zool., France, 16-1902.
9. — Tillier et Bavay, *Les mollusques testacés du canal de Suez.* Bull. Soc. Zool., France, 30, 1905.
10. — Wallis Kew Harry, *The Dispersal of Shelles.* Keyan Paul. Trench. Trubner, 1893.

Batteriologia agraria. — *Per la conoscenza dei rapporti fra microrganismi e pianta verde* [1]. Nota di RENATO PEROTTI, presentata dal Socio R. PIROTTA [2].

Fino dal 1910, mi si dette occasione d'iniziare lo studio dell'attività dei microrganismi umicoli in rapporto al « clima-terreno » che ad essi si offre per la mobilizzazione dell'azoto, dell'acido fosforico e della potassa.

Fino d'allora espressi il desiderio che si prendesse atto [3] come, non essendosi tenuto alcun conto dell'intervento dei fattori biologici del terreno coltivabile, sia la teoria dell'umo, sia quella minerale non spiegassero molti fatti inerenti alla pratica della concimazione e che si dimostrasse perciò necessario fare ricorso ad altre induzioni che sarebbe stato possibile di coordinare in una nuova *teoria microrganica* della concimazione.

Durante i dieci anni trascorsi, non ostante il non piccolo disturbo derivante all'indagine scientifica dagli avvenimenti guerreschi, intesi a svolgere il programma di ricerche allora tracciato che essenzialmente consiste nella determinazione dell'influenza dell'umo sulle attività vitali dei microrganismi del suolo per la produzione, regolata nella quantità e nel tempo, delle sostanze minerali a profitto dello sviluppo della pianta verde.

Questo fatto avrebbe dovuto basarsi sul riconoscimento di una grande legge che fa dei microrganismi degli esseri legati da più o meno stretti rapporti alla pianta superiore. Però, mentre per taluni microrganismi questi rapporti sono evidenti e già da lungo tempo assodati, per altri — e sono forse i più — detti rapporti ci sono sconosciuti od imperfettamente noti.

Così è acquisito alle nostre conoscenze il significato biologico del *Bac. radicicola* Bey. e sue razze nelle radici delle leguminose. Ma questo fatto, caratteristico in sommo grado, e che dimostra un rapporto così stretto fra i simbionti che sembra spinto all'ultimo limite, è rimasto una conoscenza quasi isolata nelle dottrine della biologia vegetale, conoscenza della quale, si può dire, per i batteri non si ha altro riscontro.

Eppure, mi venne fatto di pensare, che da una forma adattata ad un ambiente così singolare di vita, alle forme microrganiche autotrofe o quanto meno non simbionti non potessero non esistere *tutti gli stadi intermedi* di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia agraria della R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

(3) Perotti R. *Le condizioni del clima-terreno per l'induzione dell'azoto e la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo.* Rend. Soc. chimica italiana, vol. II, fasc. 6°.

adattamento, per cui microrganismi e piante verdi siano riusciti a trovare successivi, sempre più perfetti gradi di equilibrio simbiontico per il loro mutuo trofismo.

Penso che uno di detti stadi intermedi debba essere assegnato ai bacilli radicali della *Diplotaxis erucoides* D. C. (1) e probabilmente delle altre crucifere secondo i risultati di mie ricerche che a suo tempo verranno interpretati.

Per ora limito l'oggetto della presente Nota a riferire di un altro grado di rapporti fra pianta verde e microrganismi che mi sembra possibile di fissare e che potrebbe ritenersi fra i più semplici, se non il primo, nella intera scala delle relazioni simbiontiche.

Presi le mosse della preparazione di decotti di piante appartenenti a tre famiglie molto differenti e fra le quali si comprendono le piante coltivate più importanti: crucifere, leguminose e graminacee. Delle prime scelsi la *Diplotaxis erucoides* D. C., delle seconde la *Vicia faba* L. e delle terze il frumento ed un miscuglio di diverse graminacee di prato naturale.

Gr. 50 delle piante, ben lavate, furono seccati all'aria e messi a digerire in pentola di Koch per un'ora con cm. c. 1000 di acqua di condottura.

Questa digestione, in vaso chiuso da cotone, fu ripetuta per tre giorni consecutivi e per la durata di un'ora ciascuna volta.

Le tre bevute contenenti i decotti furono, infine, sterilizzate ancora una volta in corrente di vapore e furono inoculate ciascuna con cm. c. 10 di uno stemperamento acquoso di terreno da giardino, preparato con gr. 200 di terra in cm. c. 400 di acqua. Si coltivarono a 20° C.

L'esame macroscopico delle colture brute in tal modo allestite, eseguite entro i primi dieci giorni, permise di accertare che il meno rigoglioso sviluppo microrganico si ebbe nel decotto di crucifera, mentre più rigoglioso fu in quello di graminacee e, più ancora, in quello di leguminosa; nei quali due ultimi si osservavano i caratteri di un'attivissima fermentazione.

La misura delle attività microrganiche delle tre colture, impiegandone $^1/_{10}$ di cm. c. quale materiale d'innesto, fu eseguita:

per il *potere di ammonizzazione*, inoculando cm. c. 10 di una soluzione di peptone Witte all'1.5 %: esame dopo quattro giorni;

per il *potere di nitrificazione*, inoculando cm. c. 25 di una soluzione acquosa al 4 ‰ di solfato ammonico, 1 ‰ di fosfato bipotassico e 4 % di carbonato di magnesio: esame dopo 20 giorni;

per il *potere di denitrificazione*, inoculando cm. c. 50 della soluzione di Giltay: esame fino al ventesimo giorno;

(1) Perotti R. *Su la presenza di una specie batterica nelle radici della Diplotaxis erucoides* D. C. Rend. Acc. Lincei XXVIII, serie 4ª, 1° sem., fasc. 9°, pag. 331; *Ulteriori ricerche sui bacilli radicali della Diplotaxis erucoides* D. C. Rend. Acc. Lincei, XXIX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 11°, pag. 361.

per il *potere di assimilazione dell'azoto elementare*, inoculando cm. c. 250 di una soluzione acquosa al 20 ‰ di mannite, 0.2 % di fosfato bipotassico in presenza di creta: esame dopo 40 giorni.

I risultati sono consegnati nella seguente tabella:

	N.° delle prove	Colture da crucifera	Colture da leguminosa	Colture da graminacee
Potere di ammonizzazione.	1	0.306	0.544	0.170
NH_3 prodotta: gr. per litro.	2	0 425	0.663	0.119
	3	0.352	0.595	0.136
	4	0.228	—	0.153
Medie	. . . .	**0.328**	**0.600**	**0.144**
Potere di nitrificazione.	1	0.060	0.055	0.075
HNO_3 prodotto: gr. per litro.	2	0.045	0.030	0.105
Medie	. . . .	**0 052**	**0.042**	**0.087**
Potere di denitrificazione.	1	∞	∞	∞
Ore richieste per la totale scomparsa della reazione del nitrato.	2	∞	∞	∞
	3	∞	∞	∞
	4	∞	∞	∞
Medie	. . . .	∞	∞	∞ (1)
Potere di assimilazione dell'azoto.	1	0.168	0.238	0.350
N fissato: gr. per litro.	2	0.224	0.154	0.504
Medie	. . . .	**0.196**	**0.196**	**0 427**

Queste cifre, nonostante le riserve con cui deve essere accettato il metodo in uso, hanno un valore comparativo che rende lecito di affermare come, in presenza di residui di corpi vegetali appartenenti a diverse specie, le principali funzioni microbiochimiche del terreno sono variamente e notevolmente influenzate. *La pianta verde quindi crea ai microrganismi nel suolo un ambiente vario, a seconda della natura e composizione del suo corpo.*

(1) Il segno ∞ indica che, al ventesimo giorno, la reazione dei nitrati nel liquido colturale era ancora positiva.

Il potere di ammonizzazione è risultato massimo nelle colture da leguminosa, minimo in quella da graminacee. Il potere di nitrificazione presenta invece valori opposti: è risultato massimo in coltura da graminacee, minimo in quelle da leguminosa. Nelle colture da crucifera si hanno in entrambi i casi valori intermedi.

Il potere di denitrificazione è risultato indeterminabile e da ritenersi praticamente nullo sia nella coltura da crucifera, sia da quelle da leguminosa e da graminacea.

Il potere di fissazione dell'azoto elementare ha presentato il suo massimo valore nelle colture da graminacee.

All'esame delle colture brute, eseguito al ventesimo giorno, si constatò essere abbondantissimo lo sviluppo d'ifomiceti nelle colture da leguminose, scarso in quello da graminacee, quasi nullo in quello da crucifere.

Possiamo dedurre che, nelle colture brute allestite con materiali di diverse specie vegetali superiori, le forme di ammonizzanti, nitrificanti, denitrificanti ed oligonitrofile abbiano avuto *diverso sviluppo* o che siano venute a trovarsi *in diverso stato di attività*. Là dove maggiore era la sostanza organica nelle colture brute maggiore è risultata l'attività degli ammonizzanti, minore quella degli oligonitrofili e viceversa. In tutti i casi poi le condizioni di sviluppo create ai denitrificanti sono risultate sfavorevoli.

La diversità di sviluppo batterico determinato dalla natura della specie vegetale coltivata è stata posta in evidenza anche a mezzo dell'esame batteriologico.

Con un'ansa del materiale proveniente da ciascuna delle tre bevute opportunamente diluito in acqua sterile, si allestirono colture a piatto su agar fagioli. Subitamente si dimostrò che il numero delle colonie sviluppate nelle colture da leguminose fu molto superiore a quello delle altre.

Al ventesimo giorno, nelle colture di crucifere si accertò lo sviluppo di due sole specie batteriche, in quelle da leguminose di tre; ma tanto in un caso che nell'altro una sola era dominante. In quelle da graminacee, infine, si erano sviluppate quattro specie batteriche, di cui dominanti due. Evidentemente la natura chimica della crucifera e della leguminosa determinarono liquidi colturali aventi un potere maggiormente selezionante che non quello delle graminacee.

Dunque, la pianta verde, per la sua composizione, determina un climaterreno variamente e nettamente favorevole o sfavorevole allo sviluppo ed al funzionamento di determinate specie batteriche, sì che le une si moltiplicano e sono rese attive maggiormente che le altre. Per questo fatto sono in diverso modo influenzate le proprietà microbiochimiche del suolo, quali l'ammonizzazione, la nitrificazione, la denitrificazione e l'assimilazione dell'azoto elementare.

La pianta verde, non può non risentire l'influenza di questo fatto, nel

quale viene ad essere, in parte maggiore o minore, regolato il suo sviluppo; e, di conserva, il microrganismo non può rimanere indifferente all'influenza esercitata dalle modalità di sviluppo della pianta. Di quì l'insorgere di un primo grado di rapporti specifici tra pianta verde e microrganismi che potremmo ritenere simbiontici.

Essi si eserciterebbero per ciascun gruppo di piante affini in una determinata sfera di terreno che potrebbe chiamarsi *edafosfera*.

Mi propongo di mettere in evidenza, con ulteriori ricerche sperimentali, come, attraverso varî gradi di passaggio, questi rapporti divengono intimi e necessari.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi:* VII. *Sulla ricomparsa del potere amilolitico della saliva umana, abolito dall'acido cloridrico* (1). Nota di Dario Maestrini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni (2).

Ordinariamente, quando la ptialina, rimasta a contatto di una soluzione acida, non dà, dopo neutralizzazione, per qualche ora, alcun segno di attività, suol dirsi ch'è distrutta.

Alcune mie recenti osservazioni però dimostrerebbero che, rimanendo questo enzima a contatto di soluzioni anche fortemente acide, non sempre può dirsi completamente distrutto: ho difatti osservato che, facendo restare la ptialina a contatto di soluzioni di HCl, a titoli, già ritenuti capaci di distruggerla, si può, a distanza varia di tempo (2-10 giorni), dopo neutralizzazione, assistere alla ricomparsa del suo potere enzimatico, che mi è parso alquanto più celere e più intenso, qualora, subito dopo neutralizzazione, si fosse aggiunta salda d'amido. Contemporaneamente al ritorno del potere amilolitico, ho osservato nel liquido neutralizzato, una lieve diminuzione nella conduttività elettrica.

Riferisco qualche esperienza:

1-I-1921.

Saliva mista umana neutralizzata, filtrata cc. 0,5 + cc. 25 di acqua distillata purissima + cc. 25 di HCl (sol. 0,9° %). Acidità della miscela in g. di HCl = 0,44° %. Dimora per 5 ore in termostato (35° — 40° C.). Si neutralizza con KOH N/10, si aggiungono cc. 25 di salda di amido (3 %), e si riporta in termostato, previa aggiunta di teluolo. Potere riducente di 1 cc. di miscela, espresso in mg. di zuccheri riducenti.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1921.

dopo 1 h. = 0,0.
» 5 h. = 0,0.
» 10 h. = tracce di zuccheri riducenti.
» 12 h. = 0,3.
» 3 giorni = 2,7.

4-I-1921.

Saliva mista umana neutralizzata, filtrata cc. 2 + cc. 25 di acqua distillata purissima + cc. 25 di HCl (sol. 1,3° %). Acidità della miscela, in g. di HCl = 0,6° %. Dimora per due ore in termostato (35° — 4° C.). Si neutralizza con KOH N/10, si aggiungono cc. 25 di salda d'amido, si aggiunge teluolo e si riporta in termostato.

Potere riducente di cc. 1 di miscela, espresso in mg. di zuccheri riducenti.

dopo 3 h. = 0,0.
» 18 h. = 0,0.
» 50 h. tracce di zuccheri riducenti.
» 3 tracce di zuccheri riducenti.

17-XII-1920.

Saliva mista umana filtrata, neutralizzata cc. 1 + cc. 20 di acqua distillata + HCl (sol. g. 0,9° %) cc. 20. Acidità della miscela in g. di Hcl = 0,44° %. Dimora in termostato (35° — 40° C.) per 5 ore. Si neutralizza con KOH N/10, si misura la conduttività elettrica, si aggiunge toluolo, si determina il potere amilolitico di 1 cc.

Subito dopo neutralizzazione . . . . . { potere amilolitico = 0 0 mg. zuccheri riducenti. conduttività elettrica (λ) in Ohm reciproci $= 66 \times 10^{-5}$.

Dopo 3 h. di dimora in termostato . . . { potere amilolitico = 0,0 mg. zuccheri riducenti. conduttività elettrica (λ) in Ohm reciproci $= 66 \times 10^{-5}$

Dopo 3 giorni di dimora in tormostato . { potere amilolitico = 0,5 mg. zuccheri riducenti. conduttività elettrica (λ) in Ohm reciproci $= 44 \times 10^{-5}$,

I controlli fatti contemporaneamente a le suddette esperienze, senza saliva, non hanno fatto mai osservare presenza di zuccheri riducenti; ed altri controlli, fatti con saliva umana, che non fu mai a contatto con acido cloridrico, hanno chiaramente dimostrato che l'attività amilolitica, dopo il contatto con l'acido cloridrico, non si ripristina mai completamente. Ho pure osservato che la miscela (saliva + acido cloridrico), dopo breve dimora in termostato (1-2 ore), presentava una assai fine fiocchificazione. Ho pensato allora che probabilmente a causa di questa fiocchificazione, parte almeno dell'enzima potesse sottrarsi all'azione dell'acido. Sotto questo punto di vista ho istituito una nuova serie di ricerche.

Riferisco qualche esperienza:

7-II-1921.

Matraccio A — Saliva mista umana, filtrata, neutra, cc. 8,5 + HCl N/10 cc. 5; acidità della miscela in g. di HCl = 1,33° %.

Dopo 1 ora di termostato (35°-40° C.) si osserva una forte fiocchificazione. Si lascia ancora in termostato 2 ore, indi si divide il liquido totale in due porzioni (*a*·*b*):

liquido *a* — cc. 4 si centrifugano, ed il sedimento si colorisce con carminio boracico. A l'esame microscopico si notano *grossi fiocchi* (mucina) colorati in un bel roseo, *poco* numerosi;

liquido *b* — cc. 6 di liquido si filtrano; nel filtrato non si rileva alcun potere amilelitico, dopo neutralizzazione. Il rimasto sul filtro si raccoglie con acqua distillata, la quale si mostra attiva sulla salda d'amido (3 %).

Ma traccio B — Saliva mista umana, filtrata cc. 8,5 + HCl N/10 cc. 5 + polvere di carbone animale g. 0,1. Acidità della miscela in g. di HCl = 1,33° %. Durante la dimora (3 ore) in termostato (35° — 40° C.) non si osserva nessuna fiocchificazione. Il liquido totale è diviso in due porzioni (*a*-*b*):

liquido *a* — cc. 4 di liquido si centrifugano ed il sedimento si colorisce con carminio boracico. A l'esame microscopico si notano numerosissimi e minutissimi fiocchi (mucina), colorati in un bel roseo.

liquido *b* — cc. 6 di liquido si filtrano, il filtrato si mostra lievemente attivo sulla salda d'amido; il rimasto sul filtro, raccolto con acqua distillata è sulla salda d'amido attivissimo.

22-II-1921.

Saliva mista umana, filtrata, neutralizzata cc. 3 + cc. 3 di HCl N/10: acidità della miscela, in g. di HCl = 1,82° %. Dopo un'ora di termostato, si nota già una forte fiocchificazione. Dopo 3 ore di soggiorno in termostato, il liquido è filtrato, ed il rimasto sul filtro è lavato con acqua distillata più volte. Le prime acque di lavaggio presentano considerevole potere amilolitico, mentre le ultime lo presentano assai lieve.

I fiocchi, raccolti mediante acqua distillata, mostrano un lieve potere amilolitico.

21-III-1921.

Saliva mista umana neutralizzata, filtrata cc. + HCl N/10 cc. 2,5; si porta in termostato (35° — 40° C.), ove si tiene per tre ore. Acidità alla miscela in g. di HCl = 1,20° %. Dopo 1 ora di termostato, apparisce una forte fiocchificszione. Il liquido fiocchificato si divide in 2 parti (*a*-*b*):

liquido *a* — cc. 4 si mescolano e si triturano in un mortaio con piccola quantità di polvere di quarzo; si aggiungono cc. 15 di acqua distillata purissima, + cc. 10 di salda d'amido (5 %).

Si neutralizza, si porta al volume cc. 50, si aggiunge toluolo, si riporta in termostato.

Si saggia il potere riducente di 1 cc. di miscela e si trova:

dopo 12 h. = 0,0.
» 24 h. = 1,0.

liquido *b* — cc. 4 di liquido + cc. 15 di acqua distillata purissima + cc. 10 di salda d'amido (5 %); si neutralizza, si aggiunge toluolo, si porta in termostato, si saggia il potere amilelitico di 1 cc. di miscela e si trova:

dopo 12 h. = 0,0.
» 24 h. = 1,2.

Discussione dei risultati.

I risultati delle nostre esperienze richiamano l'attenzione su alcuni nuovi fatti:

1°) ricomparsa del potere amilolitico della saliva mista umana, anche dopo essere stata a contatto di soluzioni pure di acido cloridrico, ritenute sino ad ora capaci di distruggere l'enzima;

2°) fiocchificazione della miscela (saliva mista umana + acido clori-

drico), e sulla maniera di fiocchificare a seconda che sia o non presente la polvere di carbone animale;

3°) intensità del potere amilolitico, a seconda della maniera di fiocchificare;

4°) diminuita conduttività elettrica dei liquidi, dopo neutralizzazione, coincidente col ritorno del potere amilolitico.

La sostanza, che fiocchifica, è senza dubbio la mucina, di cui i fiocchi sedimentati, mediante centrifugazione delle miscele, hanno mostrato tutte le reazioni, compresa quella di colorirsi col carminio.

La fiocchificazione è più *grossolana* in presenza di solo acido cloridrico, è *più fine* in presenza di acido cloridrico e di carbone animale polverizzato: ed il potere amilolitico del sedimento maggiormente conservato nei liquidi a fine fiocchificazione.

Parrebbe quindi che vi fosse un rapporto fra potere enzimatico dei liquidi e modo di fiocchificare della mucina: ed in base a questo rapporto si potrebbe pensare che la ptialina potesse sottrarsi all'azione dannosa dell'acido, in forza nella concomitante fiocchificazione della mucina. Questa supposizione troverebbe anche, nelle nostre esperienze, una base sperimentale: difatti i fiocchetti di mucina, separati dai liquidi, hanno sempre mostrato un rilevante potere amilolitico, che andava diminuendo, mediante lavaggi con acqua distillata, mentre i liquidi non possedevano alcun potere enzimatico, ovvero lo presentavano assai debole.

Bisognerebbe quindi ammettere che i fiocchetti di mucina adsorbissero l'enzima: concependo a questo modo la genesi del nuovo fatto, descritto (della parziale conservazione cioè del potere amilelitico, in presenza di soluzioni di HCl, pur essendo assente la salda d'amido), ci si renderebbe agevole anche la spiegazione del fatto, per cui, in presenza di carbone animale polverizzato, il potere amilelitico debba essere conservato meglio che in semplice acido. *La fiocchificazione più fine, che si verifica in presenza di carbone, offrirà alla ptialina una superficie maggiore di adsorbimento, e maggior quantità di enzima potrà quindi essere sottratto all'azione distruggitrice dell'acido.*

Meno agevole è la spiegazione degli altri fatti: della coincidenza cioè tra ricomparsa del potere amilolitico e diminuzione della conduttività elettrica, e del ritorno di un più forte potere amilolitico, se dopo neutralizzazione si aggiunga amida. Alcune ricerche in corso potranno forse dare un po' di luce.

Intanto i nuovi fatti suggeriscono di ritornare per un momento sulla genesi dell'azione protettrice dell'amido sulla ptialina contro l'acido cloridrico, già da noi altrove trattata (1).

(1) Rend. Accad. Lincei, vol. XXIX, fasc. 12°, 1920.

Dopo i suddetti risultati bisogna ammettere che l'azione protettiva della salda d'amido (almeno per basse concentrazioni di HCl) origini da due fattori diversi: cioè da fenomeni di adsorbimento, dovuti ai fiocchetti di mucina, che si formano dalla saliva in presenza di HCl, e da fenomeni di adsorbimento, dovuti alla salda d'amido.

Quest'ultimi però debbono certamente essere assai più importanti: giacchè, come si è visto, i fiocchetti di mucina possono proteggere la ptialina *soltanto parzialmente* ed a basse concentrazioni di HCl.

Personalmente quindi siamo convinti di quanto già altra volta accennammo, che cioè tanto la salda d'amido quanto la polvere di carbone animale proteggano la ptialina contro l'HCl, in forza principalmente di fenomeni di adsorbimento, verificantisi tra enzima e granuli rispettivamente di amido e di carbone (1).

Chimica fisiologica. — *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia* (2). Nota I di Sabato Visco, presentata dal Corrisp. D. Lo Monaco (3).

Nel 1873 il Cantani (4) in una lezione rimasta classica diede il nome di *Lathyrismus* ad un complesso di disturbi a carico della motilità degli arti inferiori, presentati da tre fratelli, i quali si sarebbero ammalati in seguito all'ingestione continuata di farina dei semi del *Lathyrus Climenum*. La malattia era però nota fin da tempi antichissimi.

Ippocrate (5) la conobbe e lasciò scritto che in Eno molti, alimentandosi con legumi e specialmente con Ervo, cadevano infermi di grave rilasciamento delle gambe. Dello stesso avviso furono anche Dioscoride Avicenna (6) e Bernardino Ramazzini (7), il quale a Castrovetro e a Scandiano vide molti ammalati di « rilasciamento delle gambe » per essersi cibati di ervo. Targioni Tozzetti (8) occupandosi delle epidemie di « storpio delle gambe » manifestatesi in Toscana negli anni 1784 e 1785 ne attribuì la causa all'uso alimentare dei semi di *Lathirus sativus*. Vilmorin (9) segnalò un'intera famiglia rimasta vittima del *Lathyrus cicera*, ed a questa stessa varietà di

(1) Rend. Accad. Lincei vol. XXX fasc. 10°, 1921.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Domenico Lo Monaco.

(3) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(4) Cantani, *Latirismo. Lezione clinica*. Morgagni, 1873, XV.

(5) Citato da G. Mingazzini e G. B. Buglioni, in *Studio clinico ed anatomico sul latirismo*. Rivista sperimentale di freniatria e di medicina legale, vol. XXII, 1896.

(6) Id. id.

(7) B. Ramazzini, *Opera omnia*, vol. I, pag. 145, Londini, 1739.

(8) Da Mingazzini e Buglioni, loc. cit.

(9) Citato in *Diction. encycl. de sciences naturelles*.

Lathyrus Desparanches de Blois (1) in un rapporto presentato all'Académie Royale de Médicine nel 1829 attribuì i sintomi gravi riferibili a lesioni del midollo lombare e dei suoi involucri, che si osservavano in parecchi contadini del dipartimento di « Loir en cher ». Il Pellicciotti (2) ascrisse i casi di *Lathyrismus* verificatisi a Gessopalena nell'inverno del 1869 all'uso del *Lathyrus alatus.*

Mingazzini (3) in un suo accurato studio fatto in collaborazione con G. B. Buglioni attribuì la malattia principalmente ai semi di *Lathyrus sativus.*

Come si rileva da questo breve riassunto, non si è ancora arrivati a conclusioni definitive sull'etiologia del *Lathyrismus*; perciò abbiamo ritenuto utile riprenderne lo studio sistematico. Nella presente Nota riferiamo le prime osservazioni fatte alimentando i ratti con farina di semi di *Ervum Ervilia.*

***

Coi nomi di *Ervum Ervilia* (L), di *Vicia Ervilia* [(L) W.], di *Ervilia sativa* (L. R) è conosciuta in botanica una pianta annuale dell'Europa centrale e meridionale appartenente alla famiglia delle Craterante ed alla quale il volgo dà i nomi di mochi o capogirlo o veccioli, secondo Fiori-Paoletti e Béguinot (4), di Moco d'Abissinia secondo il prof. Sernagiotto, di Moco selvatico secondo A. Pucci (5) (ambedue quest'ultimi autori indicano col nome volgare di moco i semi del *Lathirus cicera*). I semi dell'Ervo hanno la forma di tetraedri e sono forniti di uno spesso tegumento seminale di color grigio. Sottoposti a macinazione si riducono facilmente in farina. I cotiledoni sono di colore giallo paglierino, di tanto in tanto però (6-7 %) se ne trovano alcuni di colore rosso chiaro. All'esame microscopico della farina con oculare C. 4 ed obbiettivo apocromatico apertura 0,95 4 Koristka si osserva quanto segue: I granuli di amido sono della grandezza di una grossa lenticchia, ovoidi, trasparenti, con ilo centrale che occupa la maggior lunghezza e che qualche volta presenta delle intersezioni più o meno pronunziate. Essi sono isolati. Con soluzione concentrata di soda se ne mette in perfetta evidenza la struttura stratificata. La soluzione iodo-iodurata li tinge in bleu intenso.

Non ci è stato possibile di trovare dati analitici certi sulla composizione chimica dei semi dell'*Ervum*; secondo il Wehmer (6), essa sarebbe uguale a

(1) Bull. de sciences méd. T. XVIII, pag. 453.

(2) Pellicciotti, *Sul lathyrus alatus e sulla nocevole azione che spiega nell'economia animale.* Giorn. Abbruzzese di med e chir. pratica ecc., 1869, 4 e 5, Chieti.

(3) G. Mingazzini e G. B. Buglioni, lavoro citato.

(4) Fiori-Paoletti e Béguinot, *Flora analitica d'Italia.*

(5) A. Pucci, *Enciclopedia orticola*, vol. III.

(6) Wehmer C., *Die Pflanzenstoffe.* Jena, 1911.

quella dell'*Ervum lens*; e cioè la seguente: sostanze contenenti azoto 25,94 %; sostanze prive di azoto 52,84 %. Acqua 12,33 %. Ceneri 3,04 %. Amido 40 %. Zucchero [? (libero?)] 1-3 %. Ritorneremo su questi dati in una prossima Nota.

Come animali da esperimento abbiamo scelti i ratti perchè omnivori; e perchè per essi un'alimentazione con farina non può essere considerata come incongrua, come invece sarebbe per le cavie e per i conigli.

Riferiamo i protocolli delle esperienze.

1°) Ratto bianco del peso di gr. 195. S'inizia l'esperimento il 25 febbraio 1921 somministrandogli una pappa cruda fatta con farina di *ervum* ed acqua. Nei giorni 26 e 27 l'animale rifiuta ostinatamente il cibo: perciò si sospende l'esperimento.

2°) Ratto pezzato del peso di gr. 165. S'inizia l'esperimento il 4 marzo 1921 somministrandogli come unico alimento farina di semi di *ervum*. L'animale mangia poco, e diminuisce di peso come segue: 7 marzo = gr. 157; 10 marzo = gr. 144. Nei giorni seguenti si alimenta un po' meno scarsamente e guadagna in peso: il 24 marzo pesa gr. 158; il 27 gr. 157. Da questo momento incomincia di nuovo a perdere in peso, che il 2 aprile è di gr. 151, ed il 7 di gr. 144. L'animale è inquieto, si muove spesso nella gabbia e tenta di sollevarne il coperchio. Gli orecchi incominciano a coprirsi di verruche. Il 14 aprile l'animale pesa 137 grammi. Messo fuori della gabbia dimostra una scarsa vivacità. Le dita degli arti posteriori sono in flessione plantare, il piede di sinistra è ruotato sul suo asse antero-posteriore, in maniera da poggiare sul suolo col margine esterno. Gli arti posteriori appaiono deboli e si piegano quasi che siano diventati incapaci di reggere il peso che vi gravita. Il disturbo si mette bene in evidenza molestando l'animale in maniera tale da costringerlo a sollevare gli arti anteriori. Alla radice della coda si nota una superficie ulcerata circolare, l'ulcerazione è superficiale ed umida, altre ulcerazioni si notano nelle regioni anteriori degli arti. Il pelo è arruffato e cade facilmente: 15 aprile peso dell'animale gr. 137, sindrome immutata; 16 aprile peso gr. 137, i fatti morbosi osservati il 14 sono più accentuati; la deambulazione è stentatissima a causa di una netta paraparesi degli arti posteriori. Nulla a carico della motilità degli arti anteriori; 17 aprile sindrome paretica ancora più accentuata, peso dell'animale gr. 137. All'acqua che beve si aggiungono poche gocce di un preparato commerciale liquido di vitamine ed un po' di crusca di *Andropogon Sorghum*; 18 aprile peso gr. 140, condizioni immutate; 19 aprile peso gr. 143, pelo meno arruffato, le ulcerazioni sono asciutte ed in parte coperte di croste, la deambulazione è alquanto più spedita; 20 aprile peso gr. 145, deambulazione più spedita, non trascina più il treno posteriore. Il piede di sinistra è in posizione quasi normale, poggia bene con la pianta, e le dita sono in estensione. Nei giorni 21, 22 e 23 le condizioni dell'animale migliorano ancora, ed il giorno 23 il peso è di gr. 148. Il 24 incominciano a cadere le croste alla radice della coda, lasciando vedere una superficie arrossata ma coperta bene di epidermide; non vi sono esiti in cicatrici. Il 26 la deambulazione è del tutto normale; l'animale pesa gr. 159, è vivace e messo fuori della gabbia cammina rapidamente. Persistono le veruche a gli orecchi, ma un po' ridotte. Il 7 maggio l'orecchio sinistro è quasi guarito, ed il destro migliorato di molto. Il 12 maggio anche l'orecchio destro è quasi completamente guarito. Durante tutto il periodo d'esperimento l'animale si è alimentato esclusivamente con farina di semi di *ervum ervilia*.

3°) Ratto bianco del peso di gr. 150. Si mette in esperimento il 6 aprile del 1921, somministrandogli come unico alimento farina di semi di *ervum*. L'animale mangia poco e perde di peso secondo le cifre che seguono: 15 aprile = gr. 113; 19 aprile = gr. 108; 23 aprile = gr. 98; 24 aprile = gr. 90; 25 aprile = gr. 88. L'animale è in uno stato

di grave agitazione; la sera muore. Durata dell'esperimento giorni 24, durante i quali il ratto ha perduto gr. 62 pari al 41,33 % del peso del proprio corpo.

4°) Ratto bianco del peso di gr. 165. Si mette in esperimento il 22 aprile del 1921, somministrandogli come unico alimento farina di semi di *ervum*. L'animale mangia poco e perde di peso secondo le cifre che seguono: 23 aprile = gr. 162; 23 aprile = gr. 159; 25 aprile = gr. 158; 26 aprile = gr. 155; 27 aprile = gr. 152; 28 aprile = gr. 157; 29 aprile = gr. 150; 30 aprile = gr. 145; 1° maggio = gr. 138; 2 maggio = gr. 134; 3 maggio = 131; 4 maggio = gr. 130; 5 maggio = gr. 126; 6 maggio = gr. 123; 7 maggio = gr. 119; 8 maggio = gr. 113; 9 maggio = gr. 102. L'animale si mostra in istato di agitazione vivissima: dopo qualche ora muore. Durata dell'esperimento giorni 17, durante i quali il ratto ha perduto gr. 60 pari al 39 % del peso del proprio corpo. All'autopsia nulla di notevole. Ambedue questi ultimi animali non hanno mai presentati disturbi a carico della deambulazione.

Dai protocolli sopra riportati noi possiamo dedurre:

1°) che i ratti rifiutano la farina dell'*Ervum Ervilia* fino al punto da andare incontro ad una vera e propria ipoalimentazione ed anche alla morte;

2°) che nell'unico animale che ha ingerito il cibo in quantità tale da sopperire ai fabbisogni energetici del suo organismo, al quarantesimo giorno di esperimento si è osservato in pieno sviluppo una sindrome morbosa complessa che è scomparsa completamente ed abbastanza rapidamente in seguito alla somministrazione di un preparato commerciale contenente vitamine e di un infuso a freddo di crusca di *Andropogon Sorghum*;

3°) che i disturbi a carico della deambulazione presentati dal ratto pezzato hanno molta somiglianza con la sindrome che produce nell'uomo ed in molte specie di animali l'ingestione a scopo alimentare delle farine dei semi di *Ervum Ervilia* e di parecchie varietà di *lathyrus*, e che è conosciuta con il nome di *lathyrismus*.

Le due ultime osservazioni ci autorizzano a formulare l'ipotesi che la sindrome morbosa nota col nome di *lathirysmus*, invece che ad un glucoside o ad un alcaloide eventualmente esistente nei semi dell'ervo e delle citate varietà di *lathyrus* debba attribuirsi a *carenza* dei semi stessi.

Riferiremo prossimamente l'esito di ulteriori esperimenti che abbiamo iniziati al riguardo.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Parassitologia. — *L'Anofele può propagare la malaria anche direttamente?* Nota III del Socio B. Grassi [1].

Nella II Nota io riferivo tre esperimenti che hanno dato risultato negativo e mi proponevo di ritentarli nella stagione estiva. Il 2 luglio, infatti, ho ripetuto la prova, contemporaneamente su due dei soggetti che già prima si erano gentilmente prestati, la signora M. G. e il dott. G. F. L'esperimento fu condotto come i precedenti con tutte le cautele necessarie.

Alla signora M. G. l'Anofele si è riattaccato immediatamente, presso a poco dopo un minuto al dott. G. F. Il malarico, di cui ci siamo serviti, era affetto di estivo-autunnale e il suo sangue presentava numerosissimi i noti anellini. Anche in queste altre due prove il risultato è stato negativo. Mi sembra perciò di poter conchiudere definitivamente che *il mio sospetto che la malaria potesse propagarsi anche direttamente, era infondato.*

Poichè la vera portata di questi sperimenti venne fraintesa, mi si permettano alcuni brevi commenti.

Pubblicando la mia prima Nota il 3 gennaio del corrente anno, mi lusingavo di spronare qualche medico ospitaliero che dispone di tutti i comodi

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1921.

necessari, a tentare l'interessante, necessaria e nuova prova da me proposta. Purtroppo nessuno se ne diede per inteso e a me invece non è stato agevole di trovare i soggetti opportuni. Alla fine superai queste difficoltà e ho potuto pubblicare l'esito negativo dei miei tre primi esperimenti nella suddetta seconda Nota comunicata all'Accademia dei Lincei nella seduta del 3 giugno, stampata e diffusa già da parecchio tempo.

Soltanto dopo che furono resi noti questi risultati dei miei esperimenti, si insorse a sostenere che erano prevedibili a *priori*, aggiungendo anzi che la mia supposizione era già stata enunciata e ripudiata da altri.

Certamente la cosa, così come molti se l'immaginano, non è nuova, e ciò risulta dal seguente brano della mia opera, *Studî di uno zoologo sulla malaria*, 2ª edizione, 1901.

« Essendo stato dimostrato che inoculando ad uomo sano minime quantità di sangue appena tolto da un uomo malarico, gli conferiamo direttamente la malaria, a tutta prima si può supporre che tutti gli animali succhiatori del sangue (sanguisughe, pulci, cimici, zanzare, ecc.) passando da un uomo malato ad uno sano, specialmente coll'apparato succhiatore ancora intriso di sangue, possano direttamente trasmettere la malaria.

Se questa supposizione avesse fondamento, noi dovremmo verificare casi numerosi di malaria anche in luoghi sani, perchè anche in essi vivono molti animali che si cibano del nostro sangue e frequentemente vi abitano uomini affetti di febbri malariche prese in luoghi malarici.

Inoltre è bene osservare:

I. Che i suddetti animali, dopo che hanno succhiato, non mostrano in generale l'apparato succhiatore intriso di sangue.

II. Che essi non ripetono mai il loro pasto senza un intervallo, almeno di alcune ore, durante le quali il parassita malarico notoriamente muore.

III. Che ancor che abbiano sangue con parassiti malarici vivi nel loro intestino, non possono, per la speciale organizzazione di questo, emetterlo ed inocularlo alla loro vittima.

Si aggiunga che le più piccole quantità di sangue malarico dimostrate capaci di infettare un uomo sano, sono sempre enormi (poco più di $^1/_{10}$ di cmc. di sangue) rispetto alla quantità di sangue che potrebbe inoculare un insetto succhiatore.

Infine molti dati sperimentali negativi documentano contro l'obiezione in discorso la quale deve dunque ritenersi del tutto infondata ».

Senonchè la questione non era restata nei termini da me fissati nel 1901. Essendo dimostrato:

1° che la saliva dei *Culex* e presumibilmente anche quella dei pidocchi, delle pulci ecc. uccide i germi della malaria umana, ciò che non fa certamente quella dell'Anofele;

2° che l'Anofele scacciato, quando non è ancora sazio, può tornare *immediatamente* a pungere fino a rimpinzarsi;

nessuno, nello stato attuale delle nostre cognizioni, senza ispirazione divina, avrebbe preveduto se l'Anofele, passando così da un individuo all'altro, potesse o non potesse trasmettere la malaria. E infatti a chi non ignora che l'insetto pungendo inocula saliva, doveva sorgere il dubbio che passando *immediatamente* ad altro individuo nell'atto dell'immissione di nuova saliva potesse avvenire un rigurgito del sangue *ancora contenuto nello stomaco succhiatore*. Nel caso del *Culex* o di altro insetto non malarigeno, questo rigurgito di sangue, ancorchè ricco di parassiti malarici, sarebbe potuto riuscire innocuo, perchè associato a saliva che li distrugge. Nel caso dell'Anofele, invece, chi poteva assicurare che qualche parassita, specialmente qualche anellino nel caso della estivo-autunnale, non sarebbe restato vitale, non essendo la saliva dell'Anofele velenosa per i parassiti malarici?

Era perciò necessario di sperimentare in condizioni opportune di temperatura, ed io sono lieto di aver portato anche questo piccolo contributo allo studio della questione che tanto interessa il nostro Paese.

Queste mie parole sono rivolte specialmente al signor Carazzi. Io lamento sempre che egli, lasciando a noi i disagi dell'osservare e dello sperimentare continui a *disserere ex cathedra*, sulla malaria e perfino, *senza una cognizione sufficiente della letteratura sull'argomento*. Infatti nella sua critica arrivata da Firenze a Roma il 5 agosto non solo mostra di ignorare la mia seconda Nota del 3 giugno, ma ignora anche il mio brano sopra riportato nel 1901 e perciò egli può scrivere: « Ma i sei mesi [1] sono passati e rimane in campo la ' teoria ' del contagio diretto. Non sarà male intanto ricordare che, prima del Grassi, l'aveva pubblicata il dott. Cremonese [2], ma, beninteso, per dichiararla priva di base; il Grassi la fa sua (inutile dire che il Cremonese non è neppure nominato) ed afferma che è di una importanza grandissima ».

Del pari in una sua critica precedente scriveva: « Ma, anche a prescindere dalle mezze confessioni e dalle contraddizioni del Grassi, il punto essenziale, sostenuto da me e da altri, è in realtà implicitamente e indiscutibilmente, pur senza volerlo, ammesso da lui e dal Pontano; se non fosse l'uno non sarebbe ricorso all'inesistente partenogenesi, l'altro non avrebbe ripudiato quel ch'egli stesso, dopo il classico lavoro del Golgi, *aveva confermato, cioè, l'esistenza di tre specie distinte di Plasmodi che trasmettono la malaria all'uomo*. Ora invece, per nascondere la debolezza del dogma zanzaro-malarico, per ' consolidare il pilastro ' il Grassi si trasforma in ' unitarista ' ».

[1] Dopo la pubblicazione della mia prima Nota (Grassi).

[2] Molti anni dopo il 1901.

Orbene il Carazzi ignora che il Golgi non ha parlato di tre specie distinte, ma di *varietà che potrebbero trasformarsi l'una nell'altra, varietà di una sola e medesima specie* (1).

Potrei moltiplicare gli esempi, ma questo è proprio il caso di dire *ab uno disce omnes*. Tutte le critiche mossemi dal Carazzi non hanno base. E mi impongo il dovere di non aggiungere altro.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo (2).

1. Il prof. Segre ha dato di recente una nuova proprietà caratteristica dalla superficie di Veronese (sup. di S_5 a tangenti principali indeterminate) (3).

Dò in questa nota un teorema generale che caratterizza le superficie razionali normali indicate nel titolo: già nel primo caso che si presenta, al quale limito per necessità di spazio la dimostrazione, si ha una nuova proprietà tipica delle superficie di Veronese.

2. Mi occorre richiamare alcune definizioni (4).

Data una superficie in S_n, descritta dal punto x di coord. proiet. omog. $x_i(\tau_1, \tau_2)$ $(i = 1, \dots, n+1)$, chiamo *spazio r-osculatore* in x, e l'indico con $S(r)$, quello che contiene gli S_r osculatori alle curve della superficie uscenti dal punto; la sua dimensione è in generale $\frac{r(r+3)}{2}$ se questa è $\leq n$.

(1) Così per esempio a pag. 1094 — Golgi, *Opera Omnia*, vol. III, si legge:

« Nello stesso tempo, però, l'accenno di sviluppo, dianzi da me notato per alcune di quelle forme ameboidi, fa pensare alla possibilità che, eccezionalmente anche giovani forme derivanti dalle semilune, possano, se per avventura dotate di maggior resistenza, procedere nel loro sviluppo fino alla segmentazione ed assumere, così, i caratteri ed il significato dei parassiti a sviluppo ciclico proprio della terzana e quartana. Clinicamente ciò tradurrebbesi nella sovrapposizione di una febbre terzana o quartana ad una febbre irregolare. Il reperto fornito nei primi giorni di degenza nell'ospedale dal caso, sul quale io ho qui particolarmente richiamata l'attenzione, darebbe fondamento a questa supposizione ».

(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(3) C. Segre, *Le linee principali di una superficie di* S_5, ecc. (Rend. Acc. Lincei, 1921, fasc. 7, 8).

(4) Cfr. p. es. i miei lavori: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Acc. delle Scienze di Torino, 1912) e *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* (R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, 1914).

Lo spazio che congiunge lo $S(r)$ osculatore ad una superficie in un punto con lo $S_s (s > r)$ osculatore ad una curva uscente dal punto ha in generale per dimensione quella dello $S(r)$ aumentata di $s-r$ (purchè, ben inteso, il numero ottenuto sia $\leq n$): se sulla superficie esiste una curva, nei punti della quale quello spazio congiungente abbia dimensione minore, chiamo la curva *quasi-asintotica* $\gamma_{r,s}$ (i due indici r, s dànno gli ordini di osculazione dei due spazi osculatori alla superficie e alla curva il cui spazio congiungente ha dimensione minore di quella che si avrebbe per una curva generica).

Il teorema è il seguente:

Se lo $S(k)$ *osculatore generico di una superficie ha dimensione regolare* $\frac{k(k+3)}{2}$ *e se la superficie possiede* ∞^2 *quasi-asintotiche* $\gamma_{k-1,k+1}$, *essa è la superficie razionale normale* $F_2^{k^2}$ *di* $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ *che rappresenta la totalità delle curve piane di ordine* k. *Quelle* $\gamma_{k-1,k+1}$ *appartengono ad* S_k *e sono le curve razionali normali* C^k *della superficie.*

3. Dimostriamo il teor. per $k = 2$. Posto $x^{hk} = \frac{\partial^{h+k} x}{\partial \tau_1^h \partial \tau_2^k}$ e $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ sulle $\gamma_{1,3}$ sono legati linearmente su di esse i punti (le cui coordinate si ottengono ponendo l'indice i alle x):

$$x, x^{10}, x^{01}, x^{20} + 2x^{11}\tau_2' + x^{02}\tau_2'^2, F_3 + 3(x^{11} + x^{02}\tau_2')\tau_2''$$

ove

$$F_3 = x^{30} + 3x^{21}\tau_2' + 3x^{12}\tau_2'^2 + x^{03}\tau_3'^3;$$

ciò può esprimersi scrivendo che sulle $\gamma_{1,3}$

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} + 2x^{11}\tau_2' + x^{02}\tau_2'^2 \\ F_3 + 3(x^{11} + x^{02}\tau_2')\tau_2'' \end{Vmatrix} = 0$$

intendendo con questa notazione di annullare i determinanti del 5° ordine estratti dalla matrice (a 5 righe ed $n+1$ colonne).

Alle equazioni così indicate non è in generale possibile soddisfare; ma se per ipotesi sulla superficie esistono $\infty^2 \gamma_{1,3}$, le precedenti debbono ridursi ad un'unica equazione differenziale del 2° ordine in τ_2; per la loro compatibilità, considerate come equazioni lineari in τ_2'', occorre e basta che, *qualunque sia* τ_2', risulti (1)

(1) Questa, che per me è condiz. necess. e suffic. per l'esistenza delle $\infty^2 \gamma_{1,3}$, è, per $n = 5$, l'equazione da cui parte il prof. Segre.

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{20} + x^{11} t_2' \\ x^{12} + x^{02} \tau_2' \\ \mathrm{F}_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

4. Vogliamo provare che le $\gamma_{1,3}$, definite dalla (1), *sono piane*. Assunte ∞^1 di esse come linee $\tau_1 (\tau_2' = \tau_2'' = 0)$, si ha

$$(3) \qquad x^{30} = (x^{20}, x^{10}, x^{01}, x)$$

indicando la parentesi a secondo membro una combinazione lineare di x e delle derivate scritte, i cui coefficienti, funzioni di τ_1, τ_2, sono indipendenti dall'indice i delle x; in altri termini, si ha, per le scelta delle linee τ_1, un'equaz. lin. omog. a derivate parz. del 3° ordine, soddisfatta da tutte le x_i.

In forza di questa, l'annullarsi del coefficiente di τ_2' nella (2) dà l'altra equazione

$$(4) \qquad x^{21} = (x^{20}, x^{11}, x^{10}, x^{01}, x)$$

[si potrebbero ricavare altre equazioni annullando nella (2) i coefficienti delle successive potenze di τ_2', ma non ce n'è bisogno].

Scriviamo le condizioni d'integrabilità fra (3) e (4), tenendo conto che, per essere $\mathrm{S}(2) = \mathrm{S}_5$, le x non possono essere soluzioni di equaz. a derivate parz. lin. omog. del 2° ordine.

La derivata x^{31}, tratta dalla (3), contiene x^{02} se e solo se la (3) contiene x^{01}; ma essa deve coincidere, in forza delle equazioni stesse, con la espressione di x^{31} ricavata dalla (4) che *non* contiene x^{02}; quindi, non esistendo equazioni che permettano di esprimere x^{02} per mezzo di altre derivate d'ordine ≤ 3, nella (3) deve mancare x^{01}, cioè si ha

$$(3') \qquad x^{30} = (x^{20}, x^{10}, x)$$

e questa esprime proprio che le curve τ_1, cioè tutte le $\gamma_{1,3}$, sono piane.

5. Si proietti ora la superficie, data in S_n, da una sua corda sopra un S_{n-2}: alle ∞^1 curve piane passanti per ciascuno dei punti di appoggio corrispondono, sulla superficie proiezione, rette: questa è dunque doppiamente rigata (non potendo i due sistemi di rette coincidere per la genericità della corda) e non è piana, altrimenti la superficie data starebbe in S_4 contro la ipotesi $\mathrm{S}(2) = \mathrm{S}_5$; quindi è una quadrica, e perciò la superficie data è la F_2^4 di Veronese, c. v. d.

6. I caratteri salienti del procedimento, che si conservano nella dimostrazione relativa al caso generale, emergono dalle osservazioni seguenti:

1) l'esistenza di ∞^2 *linee proiettivamente specializzate* sulla superficie, cioè la possibilità di soddisfare con una stessa funzione $\tau_2(\tau_1)$ alle condizioni raccolte in (1), dà luogo ad un sistema di equazioni a derivate parziali soddisfatte dalle coordinate di tutti i punti della superficie;

2) l'uso (di alcune) delle condizioni d'integrabilità che hanno significato geometrico evidente (e non di tutte: una sola nel caso trattato) dà subito un carattere notevole di quelle linee (l'esser piane);

3) la determinazione della superficie (algebricità, ordine, ambiente) segue ormai da sole considerazioni geometriche (senza più ricorrere alle equazioni a derivate parziali del problema).

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota II del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques (1).

3. Veniamo ora alla costruzione delle nostre superficie ellittiche F rappresentate sul cilindro ellittico Φ di equazione $\varphi(xy) = 0$, contato n volte, avendosi una curva di diramazione composta delle sezioni $z = \text{cost.}$

Cominciamo col ricordare che quando un punto P del cilindro Φ si muove su di questo ritornando in sè stesso, gli n punti di F: $P_1 P_2 \dots P_n$, corrispondenti di P, subiscono delle sostituzioni che formano un gruppo abeliano Γ (2); e poichè questo Γ ammette come sottogruppo il gruppo G (delle sostituzioni che si ottengono movendo P sopra una sezione $z = \text{cost.}$ del cilindro) il quale è transitivo sugli n punti $P_1 \dots P_n$, segue che Γ coincide con G (infatti un gruppo abeliano transitivo possiede una sola operazione che porti P_1 in P_i ed ha ordine uguale al grado).

L'osservazione fatta esprime che la sostituzione relativa a una curva di diramazione $z = k_i$ nel caso ciclico (in cui G è generato da una sola operazione π) sarà del tipo π^{r_i}, e nel caso non ciclico (in cui G è generato da π_1 e π_2) sarà invece del tipo $\pi_1^{r_{1i}} \pi_2^{r_{2i}}$.

Ora si potrà avere una superficie F avente il gruppo indicato scrivendo: nel caso ciclico

$$(3) \qquad \begin{cases} X = \sqrt[n]{\psi(xy)\,\theta(z)} \\ Y = y\,,\ Z = z \end{cases} \qquad \varphi(xy) = 0$$

$$\text{con } \theta(z) = \Pi(z - k_i)^{r_i};$$

(1) Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

(2) Cfr. F. Enriques, op. cit., § 6 (pag. 18 dell'estratto).

e nel caso non ciclico

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)\,\theta_1(z)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)\,\theta_2(z)} \\ Y = y \quad Z = z \end{cases} \qquad \varphi(xy) = 0$$

$$\text{con } \theta_1(z) = \Pi(z - k_i)^{r_{1i}}, \quad \theta_2(z) = \Pi(z - k_i)^{r_{2i}}$$

$$(n = \nu_1 \nu_2, \nu_1 = \varrho^{\nu_2} \text{ con } \varrho \geq 1)$$

ove $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ sono curve aventi un contatto d'ordine $n - 1$, $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1$, ovunque incontriamo la φ.

Conviene dire che la superficie F di cui si è scritta l'equazione è proprio di determinante n e non minore di n quando la curva ellittica K sia irriducibile.

La distinzione delle superficie F *birazionalmente diverse, si collega a quella della distinzione delle curve ellittiche n-ple* K, *tuttavia non coincide con essa, potendosi avere superficie* F *diverse relative a curve* K *identiche*, non solo nel caso in cui siano differenti i sistemi di curve di diramazione $z = k_i$, ma anche nel caso in cui questi coincidano: il che vedremo esattamente in una prossima Nota (n. 5).

4. Vogliamo ora esaminare quando la curva K rappresentata nei due casi rispettivamente dalle equazioni (1) e (2) risulti irriducibile, e quando si ottengano così funzioni X birazionalmene distinte.

Cominciamo dal caso ciclico, in cui G è generato da una sostituzione $\pi = (1, 2, \ldots n)$, e assumiamo come modello proiettivo della curva ellittica una cubica $\varphi_3(xy) = 0$; su questa le rette del piano segheranno una g_3^2 definita dalla relazione

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

essendo u_1, u_2, u_3 i valori dell'integrale ellittico u nei tre punti di un gruppo della g_3^2, ed ω_1, ω_2 i periodi di detto integrale relativi ai cicli A e B.

Si consideri ora una curva d'ordine n $\psi(xy) = 0$ avente con φ tre contatti n-punti: questi saranno definiti dalla relazione

$$n(u_1 + u_2 + u_3) \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}:$$

qualora i tre contatti della ψ appartengano alla serie (n^{esima} parte della g_{3n}^{3n-1} segata dalle curve di ordine n)

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv r\,\frac{\omega_1}{n} + s\,\frac{\omega_2}{n} \qquad \pmod{\omega_1, \omega_2},$$

la funzione

$$X = \sqrt[n]{\psi(xy)}, \quad \varphi(xy) = 0$$

ammette relativamente ai cicli A e B di φ, le sostituzioni

$$\alpha = (1, 2, \dots n)^r \ , \ \beta = (1, 2, \dots n)^s \ , \ (^1)$$

essendo $(1, 2, \dots n)$ la sostituzione che si ottiene moltiplicando il radicale per $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$.

E si avverta che se h è un numero primo con n esiste una sostituzione τ che trasforma

$$\alpha = (1, 2, \dots n)^r \text{ in } \alpha' = (1, 2, \dots n)^{hr} \quad \text{e}$$

$$\beta = (1, 2, \dots n)^s \text{ in } \beta' = (1, 2, \dots n)^{hs},$$

sicchè si ottiene una funzione X birazionalmenle identica alla precedente, ove la curva ψ abbia i tre contatti appartenenti alla g_3^2 definita da

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv hr\frac{\omega_1}{n} + hs\frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2).$$

E non vi può essere altra X birazionalmente identica alla precedente: infatti siano α' e β' le sostituzioni relative ad A e B per una siffatta X: saranno α' e β' simili ad α e β, cioè

$$\alpha' = \tau\alpha\tau^{-1} \ , \ \beta' = \tau\beta\tau^{-1};$$

ma poichè α e β generano tutto G, sarà $\pi = \alpha^i\beta^k$, e $\pi' = \alpha'^i\beta'^k$ riuscirà una potenza di π, $\pi' = \pi^h$, onde appare che τ trasforma π in π^h e che h è primo con n.

Tutte le possibili funzioni X, cicliche d'ordine n, si ottengono dunque in corrispondenza di curve ψ, d'ordine n, tritangenti alla φ; e la condizione di irriducibilità è data, evidentemente, dall'essere primi fra loro i tre numeri r, s, n, il che porta, come è chiaro, che i punti di contatto della ψ non siano equivalenti a quelli di una curva di ordine m, divisore di n, avente con φ tre contatti m-punti.

Ci conviene ora definire come *simili* (rispetto al numero n) due gruppi D e D′ di contatto di due curve ψ e ψ' quando appartengano alle due g_3^2

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv r\frac{\omega_1}{n} + s\frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_2, \omega_2) \quad \text{e}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv hr\frac{\omega_1}{n} + hs\frac{\omega_2}{n} \qquad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

ove h è primo con n.

(1) Cfr. la mia Nota in questi Rendiconti: *Sulle superfici di Riemann multiple prive di punti di diramazione* », 17 gennaio 1915.

Indicando con T un gruppo della g_3^2 segato dalle rette, si vede che *fra i gruppi simili* D *e* D' *sussiste la relazione di equivalenza*

$$D' + (h-1)\,T \equiv hD \qquad (h \text{ primo con } n)$$

o la simmetrica

$$D + (k-1)\,T \equiv kD' \qquad (k \text{ primo con } n)$$

dove $hk \equiv 1 \bmod. n$.

L'osservazione precedente dice che al gruppo D', simile al gruppo D, corrispondono le sostituzioni $\alpha' = \alpha^h$. $\beta' = \beta^h$, simili alle sostituzioni α e β relative al D, e viceversa.

Pertanto si conclude che il numero delle curve n-ple cicliche K, birazionalmente distinte, è dato dal numero delle coppie di numeri r ed s (compresi tra 1 ed n) primi con n, diviso per il numero dei valori h primi con n e ad esso inferiori: ciascuna di queste K è definita in rapporto alla posizione dei punti critici apparenti (contatti di ψ e φ), avendosi *funzioni* X *di una stessa famiglia in corrispondenza a gruppi simili.*

Passiamo ora al caso non ciclico.

La curva K, i cui punti si esprimono mediante due radicali d'ordine ν_1 e ν_2 portanti su ψ_1 e ψ_2, e della quale abbiamo assunto l'espressione

$$(2) \qquad X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)} \quad , \quad \varphi(xy) = 0\,,$$

può essere considerata come la curva delle coppie dei punti omologhi di due curve K_1 e K_2 di equazioni rispettivamente

$$X_1 = \sqrt[\nu_1]{\psi_1} \;,\; X_2 = \sqrt[\nu_2]{\psi_2} \quad , \quad (\varphi(xy) = 0)$$

ove si assumano come omologhi due punti di K_1 e K_2 corrispondenti a un medesimo punto di φ (aventi uguali le coordinate x e y). Si vede così che K riuscirà irriducibile (o meno) insieme alla detta corrispondenza $[\nu_2\,\nu_1]$ fra K_1 e K_2.

Ora è chiaro che se le terne di contatto di ψ_1 e ψ_2 sono simili rispetto a un numero ν, divisore comune di ν_1 e ν_2, le funzioni

$$X_1' = \sqrt[\nu]{\psi_1} \text{ e } X_2' = \sqrt[\nu]{\psi_2}\,.$$

risulteranno identiche, e poichè

$$X_1 = (X_1')^{\frac{\nu}{\nu_1}} \;,\; X_2 = (X_2')^{\frac{\nu}{\nu_2}}\,,$$

la corrispondenza suddetta si spezza in ν corrispondenze, rispetto a ciascuna delle quali i ν_1 punti di K_1 (relativi a un medesimo punto di φ) si dividono in ν gruppi Γ_1 di $\frac{\nu_1}{\nu}$ punti, e similmente i ν_2 punti di K_2 si dividono in ν gruppi Γ_2 di $\frac{\nu_2}{\nu}$ punti.

E viceversa, se la corrispondenza $[\nu_2\,\nu_1]$ si spezzasse in ν corrispondenze, i ν_1 punti di K_1 si dividerebbero in ν gruppi Γ_1 e i ν_2 punti di K_2 si dividerebbero in ν gruppi Γ_2, avendosi corrispondenza biunivoca fra i Γ_1 e i Γ_2; e poichè è chiaro che i gruppi Γ_1 e Γ_2 sarebbero i cicli di π_1^ν e π_2^ν, (un Γ_1 o un Γ_2 venendo distinto entro i ν analoghi da una radice ν^{esima}), le due funzioni X_1' e X_2' riuscirebbero identiche e riuscirebbero quindi simili, rispetto al numero ν, i due gruppi di contatto di ψ_1 e ψ_2.

Si conclude che la *condizione di irriducibilità della curva* K *data dalla* (2) *è che siano anzitutto irriducibili le* K_1 *e* K_2 *cicliche* (caso già considerato) *e che le terne di contatto di* ψ_1 *e* ψ_2 *non siano simili rispetto ad alcun numero* ν *divisore di* ν_2 (e di ν_1).

Dopo di ciò vediamo le condizioni di identità per le funzioni X. Supponiamo anzitutto per semplicità che ν_1, in generale multiplo di ν_2 ($\nu_1 = \varrho\,\nu_2$), sia ad esso eguale ($\nu_1 = \nu_2$, $\varrho = 1$). In questo caso si ottiene una sola famiglia di curve K. Infatti le sostituzioni α e β, il cui periodo è divisore di ν_1, per generare tutto il G d'ordine $\nu_1\,\nu_2 = \nu_1^2$, devono avere il periodo ν_1 ed essere indipendenti. E poichè due coppie di operazioni α e β, α' e β' indipendenti e di egual periodo sono sempre trasformate l'una nell'altra mediante una conveniente τ, segue l'asserto. (Il quale asserto è d'accordo col fatto che sopra una curva ellittica vi è una sola $\gamma_{\nu^2}^1$ ellittica e che questa risulta identica alla curva stessa).

Per passare al caso generale ($\nu_1 = \varrho\,\nu_2$, $\varrho > 1$) si osservi che in questo la K è ottenuta estraendo una radice ϱ^{esima} sulla $\overline{K}$ data da

$$\overline{X} = \sqrt[\nu_2]{\psi_1(xy)} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2(xy)}$$

o anche estraendo separatamente due radici d'ordine ν_2 sulla

$$\overline{X'} = \sqrt[\varrho]{\psi_1(xy)}\,;$$

poichè l'estrazione delle due radici ν_2^{esime} dà origine a una sola famiglia di curve, segue dal confronto dei due modi con cui è ottenibile una stessa K, che *le* K *birazionalmente distinte corrispondono alle varie terne di contatto della* ψ_1 *dissimili rispetto al numero* ϱ.

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea.* Nota I del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrisp. Tedone (1).

1. L'equazione indefinita delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea, se si suppone di poter trascurare l'effetto prodotto, sulle vibrazioni, dal peso dell'asta stessa, si riduce facilmente alla seguente forma:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1) \tag{2}$$

(2).

L'equazione (1) ha diverse proprietà in comune colla nota equazione del calore. Come quest'ultima, infatti, essa è di tipo parabolico, ed ha per caratteristiche le rette $y =$ costante. Seguendo lo stesso procedimento, usato dal Volterra per l'equazione del calore (3), si può, anche per la (1), stabilire una formula analoga alla formula di Green, relativa all'equazione del potenziale. La difficoltà sostanziale consiste, com'è intuitivo, nel determinare la soluzione fondamentale della (1) (4), che a me è riuscito di ottenere sotto una forma notevolmente semplice, come mi propongo di mostrare brevemente in questa Nota.

2. Come per l'equazione del calore, anche per la (1) è agevole stabilire un teorema di unicità.

Consideriamo, nel piano xy, una linea aperta, $s(y_0)$, che abbia gli estremi, A e B, su una caratteristica $y = y_0$, col senso positivo che vada da A verso B, e tale, che le ordinate di tutti gli altri suoi punti siano inferiori ad y_0. Supporremo che ogni altra caratteristica, che incontri la linea, abbia con essa due soli punti in comune (5). Si potrà allora decom-

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1921.

(2) Cfr. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 1897, 29ste Vorles., § 6.

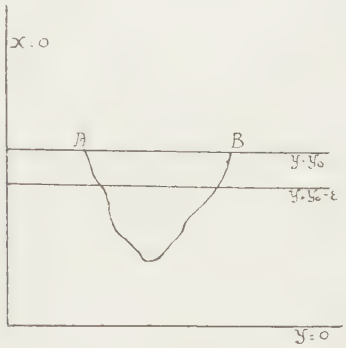
(3) *Leçons sur l'intégration des éq. diff. aux dérivées part.*, 1912, 10me leç.

(4) Per la ricerca della soluzione fondamentale delle equazioni paraboliche alle derivate parziali, di ordine superiore al secondo, ved. Block, *Arkiv för Math., Astron. o. Fysik*, Bd. 7, 8, 9.

(5) Si deve eccettuare, tra esse, quella di ordinata minima, che avrà comune colla curva un sol punto. Le considerazioni che seguono valgono però anche se la curva contiene un tratto di caratteristica $y = k$, dove k sia una costante, inferiore alle ordinate di tutti gli altri punti di $s(y_0)$, e se la curva si estende all'infinito, purchè si introducano convenienti ipotesi sul comportamento all'infinito della funzione u.

porre la linea in due rami, rappresentabili mediante le equazioni:

$$x = \xi_1(y) \ , \ x = \xi_2(y) \ , \ [\xi_1(y) < \xi_2(y)] \ .$$



Nella regione finita $S(y_0)$, limitata da $s(y_0)$, e dalla caratteristica $y = y_0$, sia u una soluzione regolare della (1). Intendiamo per tale una soluzione che abbia le derivate $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, finite e continue, e le derivate $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, integrabili in $S(y_0)$. Moltiplicando la (1) per $\frac{\partial u}{\partial y}$, e posto:

$$P(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \ , \ Q(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} ,$$

si ha: $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Risulta quindi:

$$\int_{\xi_1(y_0)}^{\xi_2(y_0)} Q(x, y_0)\, dx - \int_{s(y_0)} (Q\, dx + P\, dy) = 0 .$$

Supponiamo ora su $s(y_0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Sarà allora pure, su $s(y_0)$, $P = Q = 0$; e, perciò, $Q = 0$, cioè $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, lungo il segmento AB, come lungo ogni altro segmento di caratteristica che abbia gli estremi in $s(y_0)$. Per conseguenza, u risulterà, in $S(y_0)$, una funzione lineare, a coefficienti costanti, della x. Se poi si aggiunge l'ipotesi che u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ si annullino in un punto di $S(y_0)$, o del suo contorno, la funzione u stessa sarà nulla in tutta la regione $S(y_0)$. Al modo solito, concludiamo subito, da quanto precede, che una soluzione u di (1) è determinata dai valori che assumono $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, su $s(y_0)$, e u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, in un punto di $S(y_0)$, o del suo contorno.

3. Si riconosce subito che la (1) è *autoaggiunta*. Se u ed α sono soluzioni regolari di (1), in $S(y_0)$, posto:

$$U(x,y)=\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}u-\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\ ,\quad V(x,y)=\alpha\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}u\ ,$$

avendosi, in $S(y_0)$, $\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{\partial V}{\partial y}=0$: risulta

$$\int_{\xi_1(y_0)}^{\xi_2(y_0)}V(x,y_0)dx=\int_{s(y_0)}(V\,dx+U\,dy)\ . \tag{2}$$

Sceglieremo come funzione $\alpha(x,y)$ la funzione

$$\alpha(x,y;x_0,y_0)=(x_0-x)\int_0^{\frac{x_0-x}{2\sqrt{y_0-y}}}(\operatorname{sen}\varphi^2-\cos\varphi^2)\,d\varphi+$$
$$-\sqrt{y_0-y}\left(\operatorname{sen}\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)}+\cos\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)}\right),\ (y_0>y)\ , \tag{3}$$

(ove intendiamo che il radicale sia preso positivamente), la quale sodisfa alla (1) come funzione di x,y, e di x_0,y_0. Con questa scelta, la (2) non è più applicabile nella regione $S(y_0)$, a causa della singolarità che presentano, per $y=y_0$, α e le sue derivate. Però essa è applicabile in ogni regione $S(y_0-\varepsilon)$, corrispondente a una caratteristica $y=y_0-\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$, che incontri $s(y_0)$. Avremo, in questa ipotesi,

$$\int_{\xi_1(y_0-\varepsilon)}^{\xi_2(y_0-\varepsilon)}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}u\right)_{y=y_0-\varepsilon}dx=\int_{s(y_0-\varepsilon)}(V\,dx+U\,dy)\ . \tag{4}$$

Facciamo ora tendere ε a zero, supponendo il punto $0\equiv(x_0,y_0)$, *interno* al segmento AB. Troviamo così, facilmente [1],

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\xi_1(y_0-\varepsilon)}^{\xi_2(y_0-\varepsilon)}\left(\frac{d\alpha}{\partial y}u\right)_{y=y_0-\varepsilon}dx=-\sqrt{2\pi}\,u(x_0,y_0)\,;\lim_{\varepsilon=0}\int_{\xi_1(y_0-\varepsilon)}^{\xi_2(y_0-\varepsilon)}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_0-\varepsilon}dx=0\ , \tag{5}$$

per cui,

$$\sqrt{2\pi}\,u(x_0,y_0)=\lim_{\varepsilon=0}\int_{s(y_0-\varepsilon)}(V\,dx+U\,dy)\ . \tag{6}$$

[1] Per ciò conviene tener presenti le note formule:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen}\varphi^2 d\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\varphi^2 d\varphi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

cfr., p. es., Riemann-Weber, *Part. Diff.-Gleich. der math. Physik*, 1er Bd., (1910), § 15 form. (15).

Matematica. — *Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite.* — Nota I del dott. ALBERTO BEDARIDA, presentata dal Socio L. BIANCHI (1).

1. *Generalità.* Il Lipschitz (2), con procedimenti di Aritmetica pura, ha determinato, per le forme aritmetiche di Gauss e di Dirichlet, le relazioni tra i numeri delle classi di forme, quando i determinanti differiscano per un fattore quadrato. Come è noto, si trova, per tali forme, che uno dei due numeri è sempre un divisore dell'altro.

Noi ci siamo proposti di applicare tali procedimenti alle forme aritmetiche di Hermite (3), appartenenti al campo di Gauss, o corpo $K(\sqrt{-1})$; cioè alle forme del tipo:

$$(1) \qquad f \equiv (a, b, c) \equiv axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

ove a e c sono interi razionali, b e b_0 interi complessi coniugati di Gauss, x, y le variabili appartenenti a questo campo, x_0, y_0 le loro coniugate. L'espressione $\Delta = bb_0 - ac$ è il determinante delle forme (1).

In questa Nota ci occuperemo delle forme di Hermite *definite* ($\Delta < 0$); e diremo subito che, per le forme in considerazione, si penetra più profondamente nel metodo del Lipschitz e ciò con sviluppi più ampi e più vari.

Per le forme aritmetiche definite di Hermite (primitive) (4) non si giunge alla medesima conclusione osservata per le forme aritmetiche di Gauss e di Dirichlet; ma, precisamente: se $\Delta' = \Delta p^2$ oppure $\Delta' = \Delta\pi\pi_0 = \Delta q$ (esclusi i casi particolari $\Delta = -1, -2, -3$), ove p è un numero primo razionale nel campo di Gauss ($p \equiv 3 \pmod 4$) e π è un numero primo complesso in questo campo (q primo nel campo dei numeri interi razionali, $\equiv 1 \pmod 4$ oppure $q = 2$), il numero delle classi di forme

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1921.

(2) Lipschitz, Crelle's Journal, 53, 54 Bdd.

(3) Hermite, Oeuvres, tom. I, pag. 235 e seg.; oppure Crelle's Journal, 47 Bd.

(4) Una forma del tipo (1), di Hermite, si dirà primitiva, quando gli interi a, b, b_0, c non hanno in comune alcun fattore intero razionale. Una forma primitiva si dirà di prima o di seconda specie secondo che dei coefficienti a e c uno almeno è dispari oppure no. Per l'esistenza delle forme primitive di seconda specie deve aversi $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, oppure $\Delta \equiv 2 \pmod 4$.

aritmetiche definite di Hermite, a determinante Δ', è sempre una *combinazione lineare, intera, omogenea, a coefficienti interi razionali*, di due oppure tre numeri delle classi di due, oppure tre, ben determinati insiemi di classi di forme aritmetiche definite di Hermite, a determinante Δ, secondo che si tratta di forme primitive di prima oppure di seconda specie.

Queste relazioni si estendono al caso di un intero composto (razionale o complesso di Gauss).

La ragione di questa differenza di risultati riposa sul fatto che i procedimenti del Lipschitz sono intimamente legati alla considerazione del gruppo automorfo aritmetico delle forme: gruppo che per le forme di Gauss e di Dirichlet è perfettamente determinato dal determinante delle forme, mentre per le forme (definite) di Hermite il determinante non definisce completamente il tipo del gruppo automorfo aritmetico.

L'equivalenza aritmetica delle nostre forme sarà l'equivalenza aritmetica propria, cioè quella rispetto al gruppo delle sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}$ ove α, β, γ e δ sono interi di Gauss, tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

2. *Proposizioni fondamentali.* La ricerca si fonda sopra le seguenti proposizioni. Per brevità, escluderemo il caso $\pi = 1 + i$. Si ha:

Data una forma di Hermite (1) *(definita od indefinita)*, $f' \equiv (a', b', c')$, *a determinante* $\Delta\mu\mu_0$ *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *primitiva di prima o di seconda specie, esistono sempre forme di Hermite (definite od indefinite), a determinante* Δ, *rispettivamente primitive di prima o di seconda specie, che, con sostituzioni aritmetiche a modulo* μ, *si trasformano nella forma considerata* f'. *Tali forme costituiscono una ed una sola classe.*

Di qui segue:

Tra le classi di forme di Hermite (definite od indefinite), a determinante Δ, *primitive di prima o di seconda specie, e le classi di forme (definite od indefinite) di Hermite, a determinante* $\Delta\mu\mu_0$, *rispettivamente primitive di prima o di seconda specie, è stabilita una corrispondenza, in modo che ad una classe di forme a determinante* Δ, *primitive di prima o di seconda specie, corrispondono* $n (n \geq 1)$ *classi di forme a determinante* $\Delta\mu\mu_0$, *rispettivamente primitive di prima e di seconda specie, e, viceversa, ad una classe di queste corrisponde, rispettivamente, una ed una sola classe delle prime.*

Le forme di Hermite siano ora *definite* ($\Delta < 0$) e, ad es., positive. È noto (2) che il loro gruppo automorfo aritmetico è un gruppo finito.

(1) Tacitamente intendiamo che le forme di Hermite che si considerano siano aritmetiche ed appartenenti al corpo $K(\sqrt{-1})$.

(2) Bianchi: Math. Ann., 38 Bd.

Escludendo i casi $\Delta = -1, -2, -3$, si ha: *le forme aritmetiche definite di Hermite, primitive di prima specie, hanno per gruppo automorfo aritmetico unicamente gruppi degli ordini 2 e 4; quelle di seconda specie possono avere gruppi anche di ordine 6.*

Inoltre si ha:

I valori del numero n dipendono, unicamente, dal determinante Δ, dal numero primo μ e dall'ordine dei gruppi automorfi aritmetici delle forme a determinante Δ, appartenenti alla classe che si considera.

Fisica. — *Sul potenziale di risonanza e di ionizzazione nei vapori misti di sodio e di potassio con mercurio* (1). Nota I di Adolfo Campetti, presentata dal Socio Andrea Naccari (2).

1°) In una Nota precedente, pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia (3), esaminai il comportamento di una miscela di vapori di potassio e sodio rispetto al potenziale di ionizzazione e di risonanza, rilevando come quest'ultimo risulti di qualche poco aumentato per ognuno dei due vapori metallici, quando sono presenti vapori dell'altro. Effettivamente, in quelle condizioni di esperienza, dato l'uguale riscaldamento dei due metalli e la notevole differenza delle loro tensioni di vapore ad una stessa temperatura, nella camera di ionizzazione era presente, in ogni esperienza, uno solo dei due vapori in misura notevole, figurando l'altro solo in piccola quantità.

Intanto, circa contemporaneamente, Horton e Bailey (4) pubblicavano un interessante lavoro sull'effetto di una traccia di impurità (dovuta a vapori di mercurio) nelle misure della velocità di ionizzazione per gli elettroni nell'elio, per il quale gas, secondo precedenti ricerche dello stesso Horton (5) e di Goucher (6), tra loro in abbastanza buon accordo. era stato trovato essere circa 20,4 Volt il potenziale di prima eccitazione o risonanza e 25,5 Volt circa quello di ionizzazione.

Nelle esperienze ora citate di Horton e Bailey l'impurità è dovuta a mercurio, il quale agisce anche in quantità minima; avendosi per la sua presenza traccie di ionizzazione già a circa 21 Volt e riconoscendosi a questo potenziale nella luminosità presentata dal gas la linea del mercurio $\lambda = 4359$ Å, ma nessuna dell'elio; l'emissione dell'elio si inizia solo al disopra di 25 Volt. Siccome il potenziale di risonanza dell'elio è di circa 20 Volt,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Sassari.
(2) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1921.
(3) Rend. Lincei, vol. XXIX, 1920, 2° semestre.
(4) Phil. Mag., vol. 40, n. 238, 1920.
(5) Proc. Roy. Soc. 1919.
(6) Proc. Phys. Soc. of London, 1920.

gli AA. ritengono che al disopra di questo potenziale la radiazione di risonanza dell'elio ionizzi il vapore di mercurio presente: onde l'emissione della linea sopraindicata.

2°) Nelle presenti esperienze, in continuazione delle precedenti richiamate in principio, ho voluto esaminare quale influenza abbia sul potenziale di risonanza e di ionizzazione dei vapori di sodio o dei vapori di potassio la presenza di vapori di mercurio a tensioni diverse; certamente anche nelle esperienze con vapori di sodio o potassio puri non si può escludere per lo più la presenza di vapori di mercurio (come traccie) provenienti dalla pompa, vapori che si possono eliminare più o meno completamente con varî espedienti, di cui il più efficace è la condensazione con aria liquida nel tubo di comunicazione della pompa coll'apparecchio, mezzo che non ho mai avuto a mia disposizione.

Ma l'ottimo accordo nei valori di risonanza e di ionizzazione ottenuti pei vapori di iodio e potassio nelle altrui e nelle mie esperienze (esperienze in cui i vapori di mercurio erano più o meno perfettamente eliminati) mostra che in questo caso traccie soltanto di vapori di mercurio non debbono avere azione sensibile, probabilmente perchè (al contrario di ciò che accade per l'elio) i potenziali di risonanza e di ionizzazione del vapore di mercurio puro sono superiori ai corrispondenti potenziali pei vapori di sodio e di potassio.

3°) L'apparecchio adoperato in queste esperienze non differisce sostanzialmente da quello usato nelle precedenti, se non per aver sostituito al tubo aperto ai due estremi (chiuso naturalmente dai tappi di sostegno della camera di ionizzazione e del giunto a smeriglio per la pompa Gaede) una grossa provetta di vetro circa delle stesse dimensioni, della quale circa i due terzi sono circondati da una stufa elettrica a tre settori. Il mercurio restava sul fondo e veniva riscaldato mediante un settore della stufa; il sodio od il potassio erano posti invece in una capsuletta di nichel in corrispondenza di un secondo settore, mentre un terzo riscaldava la regione del tubo contenente la camera di ionizzazione, consistente, come al solito, di un cilindro di nichel, di un cilindro coassiale di rete nichellata e del filamento che, portato all'incandescenza, costituisce la sorgente di elettroni; coppie termoelettriche nichel rame servivano a misurare la temperatura delle varie regioni del tubo. Adoperai dapprima come sorgente di elettroni un filamento di tungsteno portato all'incandescenza; poi, essendomi stato impossibile procurarmi filamenti nuovi (e quindi non fragili) di questo metallo, mi servî di una spiralina di filo platino ricoperto di ossidi (specialmente ossido di calcio) col noto procedimento.

La determinazione del potenziale di risonanza e di ionizzazione nelle esperienze precedenti si otteneva dalle due curve (o dai dati numerici relativi) che dànno, in funzione della differenza di potenziale acceleratore, una la intensità della corrente tra la rete e il cilindro esterno (malgrado un campo

ritardatore applicato tra rete e filamento) e l'altra la intensità totale della corrente dal filamento. Anzi in quelle esperienze la prima curva non presentava una rapida ascesa se non per un potenziale superiore a quello di ionizzazione (e ciò perchè si usava una debole emissione elettronica, per avere più netti i massimi e minimi della curva stessa) e perciò essa non poteva servire a determinare il potenziale di ionizzazione che veniva ricavato dalla seconda curva. Nelle esperienze attuali, avendo a disposizione un solo galvanometro di sensibilità sufficiente, si poteva tracciare solo la prima curva; e perciò i potenziali di ionizzazione si ottenevano con discreta approssimazione, tenendo conto del punto in cui essa curva subisce un rapido aumento di ordinata e sempre avuto riguardo alla caduta di potenziale corrispondente alla velocità iniziale di emissione degli elettroni. Questo però è possibile soltanto se la emissione elettronica del filamento è assai abbondante (il che si ottiene aumentandone la temperatura o la superficie od entrambe contemporaneamente), senza di che questo rapido incremento di ordinata (mascherato dai minimi della curva) si ottiene solo per un potenziale acceleratore assai più elevato di quello che occorre per la prima ionizzazione.

Così in due esperienze relative al potassio puro, nella prima delle quali la caduta di potenziale corrispondente alla velocità iniziale di emissione degli elettroni era di 0,67 Volt e nella seconda (essendo più elevata la temperatura del filamento) di 1,08 Volt, si ottennero curve delle quali solo la seconda si presta a determinare il potenziale di ionizzazione.

Sui risultati delle esperienze e sulle conclusioni che se ne possono trarre si dirà in una Nota successiva.

Fisica. — *Birifrangenza magnetica dei fumi prodotti da un arco ad elettrodi metallici* [1]. Nota di L. Tieri, presentata dal Socio O. M. Corbino [2].

La comunicazione di Elihu Thomson su *A Novel Magneto-Optical Effect* pubblicata su *Nature* del 23 giugno n. 2645, pag. 520, mi ha fatto sorgere l'idea che il fenomeno dovesse essere accompagnato da birifrangenza magnetica.

La sorgente luminosa da me adoperata è una lampadina Nernst col filamento verticale. Un pennello di luce pressochè parallela proveniente da essa, attraversa un prisma di Nicol la cui sezione principale è a 45° dall'orizzonte, sfiora secondo un diametro il piano superiore di una bobina

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all' Accademia il 27 luglio 1921.

circolare piatta disposta orizzontalmente e finalmente un secondo Nicol incrociato col primo. Al disotto della bobina è disposta opportunamente una lampada ad arco con elettrodi metallici, la quale, eccitata con una corrente di 30 ampere e 140 volt, dà abbondanti fumi. Questi vengono condotti nella porzione del campo magnetico attraversato dalla luce polarizzata, mediante un tubo di rame superiormente coassiale colla bobina e di forma opportuna onde eliminare la luce proveniente dalla lampada ad arco nella zona di osservazione. La bobina ha il diametro interno di 16 cm., l'esterno di 28 ed è alta 6 cm.: con essa può generarsi un campo magnetico di parecchie decine di Gauss.

Con l'arco ad elettrodi di ferro, i fumi giallognoli che si producono in seguito alla condensazione dei vapori di ferro, escono abbondantemente dal tubo cilindrico di rame in modo che il pennello di luce polarizzata passa attraverso un denso strato di fumo. In queste condizioni, sotto l'azione del campo magnetico generato dalla bobina, compare luce attraverso i Nicol incrociati, luce che permane finchè agisce il campo.

Da esperienze preliminari si è potuto accertare che il fenomeno presenta i seguenti caratteri:

1°) rotando opportunamente il Nicol analizzatore si ha il fenomeno della polarizzazione cromatica.

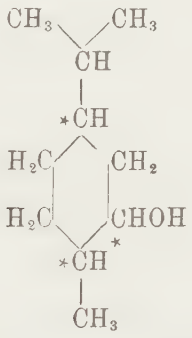
2°) con luce sensibilmente monocromatica, non si riesce a ottenere l'estinzione con la rotazione del Nicol analizzatore. Col compensatore di Babinet si ha un sensibile spostamento delle frange quando si eccita il campo: si è così potuto accertare che trattasi di birifrangenza positiva.

3° con luce polarizzata in un piano parallelo o normale alla direzione del campo, il fenomeno non ha più luogo. Inoltre, se la bobina che genera il campo, si dispone in direzione verticale, il fenomeno c'è se l'asse della bobina è normale alla direzione del fascio luminoso polarizzato; non ha più luogo se l'asse della bobina coincide con la direzione di propagazione della luce polarizzata.

Prove eseguite con arco ad elettrodi di rame, hanno dato risultati completamente negativi col precedente dispositivo; ma ciò è dovuto al fatto che il campo è troppo debole: sostituendo il campo generato dalla bobina con quello di una potente elettro-calamita, anche per i fumi di rame l'effetto esiste.

Chimica. — *Carvomentoli levogiri dal fellandrene* (1). Nota I del dott. Vincenzo Paolini, presentata dal Corrisp. A. Peratoner (2).

Qualche anno fa ho pubblicato alcune Note sul Carvomentolo (3) dal carvenone, l'alcool terpenico secondario $C_{10}H_{20}O$, indicato anche come tetraidrocarveolo, esaidrocarvacrolo, *p* mentan-ol [2], di cui sono riuscito ad individuare due antipodi ottici. Per queste mie indagini, dirette all'isolamento di modificazioni stereoisomere, un particolare interesse presentava il carvomentolo otticamente attivo, che Wallach ed Herbig (4) avevano ottenuto dal nitro-fellandrene mediante riduzione con alcool e sodio. Ed invero, data la formula di costituzione del carvomentolo



ne deriva la possibilità di esistenza di 8 stereoisomeri attivi per la presenza dei 3 atomi di carbonio asimmetrici, laddove i diversi carvomentoli finora preparati con differenti mezzi e da varî materiali di partenza, ma sempre per riduzione di sostanze non sature, o non godono dell'attività rispetto alla luce polarizzata (racemi), o se pure la presentano, per molte ragioni non possono neppur essi considerarsi come sostanze uniche ed omogenee, per le quali, a detto del Semmler altra volta da me riferito, si rende necessario lo studio dei rapporti reciproci dei prodotti formanti mescolanze.

Ed è tanto vero ciò, che precisamente a proposito del Carvomentolo attivo, ottenuto nella riduzione del nitro-fellandrene, di cui ora appunto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico Farmaceutico della R. Università di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1921.
(3) R. Accad. dei Lincei, vol. XXVIII, 2° sem., pp. 82 e 134.
(4) Annalen. 287, pag. 371 (1895).

tratterò, Wallach si limita a parlare di un alcool levogiro, facilmente riconoscibile per l'odore caratteristico e per la ossidabilità a chetone corrispondente, ma evita di fornire alcun dato che riguardi la deviazione ottica. Onde è giustificato di ritenere un tale prodotto, che pure risponde esattamente alla formula $C_{10}H_{20}O$, come non puro; ed è sommamente probabile che l'impurezza sia rappresentata da un (o da più di un) alcool isomero, anche esso otticamente attivo.

Non mi indugerò quì sul metodo di cui mi sono avvalso per risolvere il presente problema. Esso non è stato dissimile da quello che ho a mano a mano elaborato per l'isolamento di altri alcooli terpenici, descritto in precedenti Memorie e anche riassunto nelle ricerche sui Carvomentoli dal Carvenone; consiste in una particolare preparazione ed in speciali depurazioni degli ftalati acidi degli alcooli, effettuate con esclusione di ogni riscaldamento, in modo da giungere, senza alterazione alcuna delle sostanze così ottenute, molli e resinose, a prodotti cristallini ben definiti, ricorrendo anche, secondo la bisogna, a trasformazioni in ftalati doppi dell'alcool e di un alcaloide, oppure dell'alcool e di un metallo.

Dirò solamente che nel caso presente dei carvomentoli dal fellandrene, il lavoro venne reso meno faticoso che in casi precedenti dalla natura degli ftalati acidi, che più facilmente, e ancora grezzi, passano allo stato solido, a differenza di quanto avevo sperimentato sui carvomentoli dal carvenone, i cui ftalati acidi, in condizioni simili, restano molli e resinosi.

La riduzione del nitrofellandrene, preparato esattamente secondo le norme date dal Wallach mediante sodio ed alcool, mi fornì un alcool di partenza, carvomentolo levogiro, che aveva in tubo da 100 mm. la rotazione ottica

$$-9^{\circ}, 50' \text{ donde } [\alpha]_D = -10^{\circ}\,83'.$$

Questo prodotto diede nella eterificazione a freddo con anidride ftalica un etere acido che si presentava dapprima come massa semifluida, appiccicaticcia, la quale alle temperature invernali induriva gradatamente sotto acqua e si lasciava depurare a mezzo di una serie sistematica di frazionamenti per precipitazioni dalla soluzione benzolica mediante ligroina. Quando il prodotto era diventato meno impuro, era possibile di depurarlo ad oltranza addirittura per cristallizzazioni reiterate dalla benzina di petrolio (70 - 80°).

Io sono giunto così ad un etere sinistrogiro, dal p. f. 89°, con $[\alpha]_D = -45^{\circ}, 04'$, che non solo nella sua composizione corrisponde alla formula di uno ftalato acido di carvomentolo $HOOC.C_6H_4.COOC_{10}H_{19}$, ma che deve inoltre considerarsi come sostanza unica, giacchè comunque ricristallizzata non muta affatto il suo punto di fusione, nè il suo potere rotatorio specifico.

Per saponificazione di questo etere ho ottenuto un l-carvomentolo puro, che si differenzia subito dall'alcool di partenza per il suo potere rotatorio notevolmente più elevato, essendo in tubo da 100 m/m $= -18°,30'$, donde $[\alpha]_D = -20°,38'$. Questo possiede anch'esso i caratteri di una sostanza unica, perchè per trattamento con anidride ftalica fornisce quantitativamente, e senza formazione di prodotti secondarii, subito lo ftalato suddetto, fusibile ad 89°.

Che l'alcool isolato è veramente un puro carvomentolo levogiro, viene confermato inoltre dal fatto che lo ftalato acido grezzo, molle, di partenza contiene l'etere di un secondo alcool, isomero al precedente e dotato di potere rotatorio più basso non solo, ma più basso altresì di quello del carvomentolo di origine con $[\alpha]_D = -10°,83'$.

Infatti questo ftalato acido, più solubile di quello fusibile a 89°, viene lasciato mano mano indietro nelle acque madri di depurazione di quest'ultimo. Da esso infine si giunge al Carvomentolo libero, pure sinistrogiro con $[\alpha]_D = -8°,63'$, mediante saponificazione opportuna.

Faccio in ultimo rilevare che la fellandren-ammina $C_{10}H_{19}NH_2$, la quale insieme al carvomentolo prende origine nel processo di riduzione del nitro-fellandrene, rappresenta con verosimiglianza anch'essa un miscuglio di ammine isomere. Opportunamente diazotata, fornisce successivamente un alcool con $\alpha_D = -9°,50'$ cioè perfettamente identico a quello che si origina direttamente nel processo di riduzione, e che rappresenta una mescolanza di prodotti levogiri a potere rotatorio differente.

Per la nomenclatura degli alcooli carvomentolici finora isolati propongo le seguenti indicazioni:

Prodotto dall'α-fellandrene	con	$[\alpha]_D = -20°,38'$.	l-α. Carvomentolo
» » »	»	$= -8°,63'$,	l-β. Carvomentolo
» dal Carvenone	»	$= +1°,82'$,	d-γ. Carvomentolo
» »	»	$= -1°,83'$,	l-γ. Carvomentolo

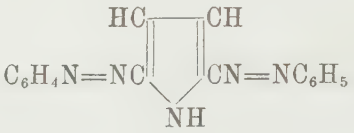
Chimica. — *Azossiammidi e pirroli* (1). Nota di Antonio Pieroni, presentata dal Socio A. Angeli (2).

I derivati pirrolici sono molto diffusi negli organismi ed anche molto interessanti dal punto di vista biochimico, ma per la mancanza di reazioni nette, atte a riconoscerli ed a isolarli poco si sa di essi ed il loro significato biologico ci sfugge completamente. Ho creduto quindi opportuno intraprendere le qui descritte ricerche allo scopo di rendere facile il riconosci-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî superiori in Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1921.

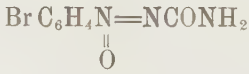
mento del pirrolo e dei suoi più semplici derivati. Già da tempo è noto per i lavori di O. Fischer e Hepp (1), che il cloruro di fenildiazonio reagisce con il pirrolo e con alcuni suoi derivati, in modo che il residuo azoico va a legarsi al nucleo pirrolico preferibilmente in posizione α, se però questa non è libera si lega in posizione β, infatti essi prepararono



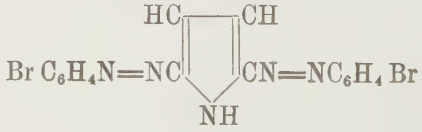
ed il benzolazo-α-α'-dimetilpirrolo. Più tardi Plancher e Soncini (2) ottennero altri composti azoici derivati dal fenil e dal α-β'-dimetilpirrolo e trovarono che soltanto gli α-azoderivati reagiscono con l'isocianato di fenile per cui ammisero che quelli di fronte al detto reattivo possono tautomerizzarsi e dare derivati idrazonici. Anche l'α-metilindolo reagisce, come dimostrò Ph. Wagner, con il cloruro di fenildiazonio per dare l'azoderivato corrispondente.

Data la stretta analogia che esiste fra i sali del diazobenzolo e le azossiammidi ed i vantaggi che queste presentano sui primi per il loro modo di reagire regolare e pronto, era prevedibile che le azossiammidi fossero in grado di entrare in reazione non solo con il pirrolo, ma anche con altri suoi derivati, coi quali i precitati sali o non reagiscono o dànno composti non isolabili. I fatti hanno confermato questa previsione.

Quella che fra le azossiammidi meglio si presta allo scopo è la *p*.bromofenilazossicarbonammide che si ottiene con tutta facilità dal *p*.bromofenildiazonitrile sciolto in etere umido per azione dell'acido cloridrico gassoso e successiva ossidazione con peridrol in ambiente acetico. Essa è rappresentata dalla formula:



Preparazione del α-α'-*p*.bromobenzolazopirrolo

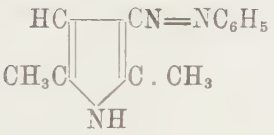


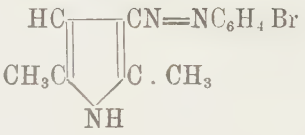
(1) B., 19, 225.
(2) G. Ch., 32, II, 447.

Si mettono a reagire raffreddando con acqua quantità rispettivamente proporzionali di pirrolo (una molecola) e di *p*.bromoazossicarbonammide (due molecole) sciolte in pochissimo alcool, indi si aggiunge un leggero eccesso di potassa; la soluzione si colora immediatamente in rosso violetto intenso, mentre ha luogo un leggero sviluppo gassoso. Dopo qualche tempo si depositano dei cristalli costituiti per la massima parte da carbonato di potassio, allora diluendo con acqua si ottiene la separazione di un bel prodotto cristallino di un color rosso intenso a riflessi rameici, solubile in alcool, in etere, solubilissimo in benzolo; fonde a 208°.

La stessa reazione si ha anche operando in soluzione acquosa; senonchè in questo caso il rendimento è minore e il prodotto che si ottiene è mescolato a resine da cui si separa non tanto facilmente.

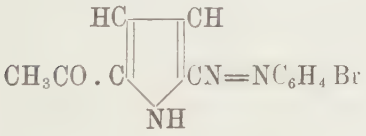
Anche l'acido α-pirrolcarbonico trattato con la *p*.bromofenilazossicarbonammide dà l'α-α'-*p*.bromofenilazopirrolo, mentre l'α-α'-dimetilpirrolo trattato in modo analogo sia con la fenilazocarbonammide che con la *p*.bromofenilazossicarbonammide, dà i β-azocorrispondenti

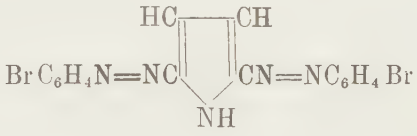




di cui il primo fonde a 134° e l'altro a 152°.

L'α-acetil- e benzoilpirrolo reagiscono anch'essi sempre in soluzione alcalina con l'azossicarbonammide; dall'acetilpirrolo a seconda della quantità dell'ammide reagente e dell'alcali si ottiene il mono acetilazoderivato o il biazoderivato

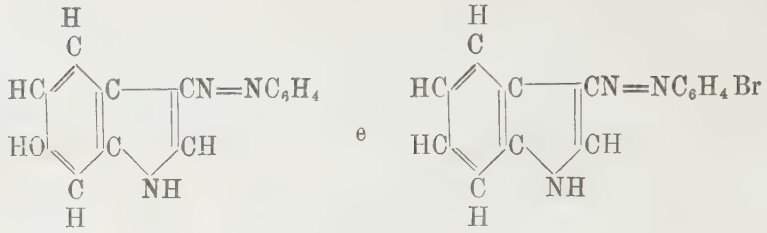




il primo è un prodotto di color giallo cristallizzato in lamine; fonde a 168°.

Dal benzoilpirrolo invece non si ha che un unico azoderivato prodotto di color giallo, cristallizzato in lamine; fonde a 200°.

L'indolo che si può considerare come un pirrolo bisostituito, mentre non reagisce col cloruro di fenildiazonio o dà prodotti che non fu possibile isolare (secondo Plancher e Soncini), reagisce invece con le azossicarbonammidi (sempre in soluzione alcalina) tanto che mi fu possibile ottenere due azoderivati corrispondenti e cioè:



prodotti ben cristallizzati in belle lamine di colore giallo oro il primo, che fonde a 130° e giallo rosso l'altro, che fonde a 165°. Poichè trattando l'indolo con cloruro di fenildiazonio i succitati autori non riuscirono ad isolare il corrispondente azoderivato e poichè ottennero invece azoderivati con l'α-metil- e α-fenilindolo, attribuirono ciò al diverso comportamento dell'indolo rispetto ai suoi omologhi; per i risultati da me ottenuti questa supposizione, nel caso considerato, non è più sostenibile. Mi propongo di estendere in seguito queste mie ricerche, poichè il modo descritto tanto facile e sicuro per caratterizzare pirrolo ed indolo ed i loro derivati, semplificherà molto lo studio di queste sostanze che giorno per giorno vanno diventando sempre più interessanti nel campo della biochimica (1).

Chimica fisica. — *Solubilità del perclorato ammonico nell'acqua.* Nota di Arrigo Mazzucchelli e Alfonso Rosa (2), presentata dal Socio E. Paternò (3).

Il perclorato ammonico è un sale del quale, nonostante la sua notevole importanza scientifica e tecnica, non si conoscono ancora con precisione i rapporti di solubilità nell'acqua. Il presente lavoro è destinato a fornire qualche dato in proposito.

Le misure sono state eseguite su un preparato che è stato da noi depurato per ricristallizzazione: la sua soluzione non precipitava con ammoniaca, e dava reazioni negative per cloruri, calcio e magnesio.

Il contenuto in sale delle soluzioni sature era determinato tirando a secco, in pesafiltri tarato, un peso noto del liquido e tenendo poi in stufa ad acqua bollente sino a peso costante. Esperienze preliminari, eseguite riprendendo con un po' di acqua e tirando a secco un paio di volte un peso

(1) Per brevità venne soppressa in questa Nota la parte sperimentale coi relativi risultati analitici, che verrà pubblicata in altra parte.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1921.

noto di sale, ci avevano mostrato che esso peso non varia per simile trattamento, e quindi che una possibile idrolisi con eliminazione di un po' di ammoniaca non ha luogo, in queste condizioni, per un ammontare apprezzabile.

La preparazione delle soluzioni sature ha avuto luogo con tecnica diversa, a seconda delle temperature. Fino a 35° si è usato il sistema più semplice, di far girare per un certo tempo in un termostato due bottigliette (ben chiuse con tappo ricoperto da cappuccio di gomma) contenenti acqua e un eccesso di sale, una delle quali era stata mantenuta per un certo tempo, agitando, a temperatura superiore di 10°-15° a quella dell'esperienza, in maniera che l'equilibrio fosse raggiunto dai due estremi opposti, della soluzione non satura e della soprasatura. Il liquido veniva poi prelevato con una pipetta (eventualmente riscaldata) attraverso uno strato filtrante di ovatta (sebbene per lo più superfluo), versandone poi immediatamente una porzione nel pesafiltri.

Per le temperature più elevate si usò un dispositivo sostanzialmente uguale a quello proposto da Pawlewski [1]: una grossa provetta, contenente il sale e la soluzione, è chiusa con un tappo a due fori, per uno dei quali passa un refrigerante verticale con un agitatore girante, mentre per l'altro passa un tubo a ⊓, di piccolo lume, mediante il quale, a saturazione raggiunta, si sifona un po' di liquido in un pesafiltro ugualmente chiuso con tappo a due fori, pel secondo dei quali passa un tubo aspirante. Il tutto sta immerso in un grande bagno mantenuto a temperatura opportuna.

Per la solubilità a 0° si usò una grossa provetta con agitatore immersa fino a 3 cm. sopra l'altezza interna del liquido nel ghiaccio pesto, ben calcato. Dovendo prelevare la soluzione colla pipetta a strato filtrante, si tenne per un certo tempo la estremità di quest'ultima immersa nel liquido, per raffreddare anch'essa fino a 0°.

Si è anche fatta una misura al punto eutettico, raffreddando con ghiaccio e sale una grossa provetta con soluzione satura a temperatura ordinaria sino a separazione del crioidrato, riconoscibile all'aspetto di massa bianca compatta, e alla fermata di un termometro. Allora la provetta è stata introdotta dentro un'altra più ampia, immersa nello stesso miscuglio frigorifico che faceva da mantello d'aria; si è agitato qualche tempo per assicurare l'equilibrio fra le due fasi, e poi si è letto il termometro e prelevato il campione con pipetta raffreddata.

Si ottennero così i risultati che riportiamo nella tabella seguente, espressi in gr. di sale per cento gr. di soluzione, in base alle pesate nell'aria, cioè senza riduzione al vuoto. Qualora nella colonna « trovato » siano

(1) Ber. Chem. Ges., 32, 1899, (1040), ovvero Stähler, *Arbeitsmethoden der anorganischen Chemie*, III, 1 (505).

più di una cifra, esse corrispondono a esperienze in duplicato, e (m) ne dà la media. Il « calcolato » è ottenuto con una formula che diamo più oltre.

Temp.	Gr. sale % trovato	Gr. sale % calcolato
— 2,72 (eut.)	9,84	9,71
0°	10,727 ; 10,727 ; (m) 10,73	10,70
+ 15,2	15,989 ; 15,915 ; (m) 15,95	16,26
25,2	19,912 ; 19 868 ; (m) 19,89	19,83
34,0	23.331 ; 23,318 ; (m) 23,32	23,30
45,1	27,64	27,54
55.2	31.55	31,47
65,1	35,37	35.36
75,0	39,05	39,31
84,7	42,54	43,23.

Come si vede la solubilità eutettica rientra bene nella serie: è però da notare che ricalcolandone il peso molecolare del perclorato ammonico, in base alla formula crioscopica $m = 1{,}85\ g/t$, dove g sono i gr. di sale per cento gr. di acqua (e cioè 10,92) e t l'abbassamento termometrico, si trova 54,9: ciò che, essendo 117,5 il valore stechiometrico, porta a $i = 2{,}14$; mentre, d'altra parte, il tenore della soluzione non è tale da potersi senz'altro pensare alla cosiddetta anomalia delle soluzioni concentrate. La cosa richiede ulteriore studio.

Si è cercato di calcolare una formula che esprimesse i nostri risultati. Perciò si son riportati questi su carta millimetrata; poi, mediante un regolo di acciaio pieghevole, si è tracciata una curva regolare che vi si adattasse, con piccole differenze all'incirca uguali, di più e di meno (metodo ben noto per conguagliare graficamente gli scarti), e su questa curva si son letti i valori corrispondenti a $0°$, $10°$, $20°$, ..., $80°$.

Con questo sistema di numeri (che pei valori tondi della temperatura si presta meglio al calcolo) si è studiata una formula di 2° grado, e si è trovato infine

$$s = 10{,}696 + 0{,}3617.t + 0{,}000263.t^2\ ,$$

secondo la quale son calcolati i valori della tabella.

In questo laboratorio si è anche misurata la densità delle soluzioni acquose di perclorato ammonico e ne sarà riferito in seguito.

Chimica biologica. — *Pirrolo e Melanuria* [1]. Nota VI di Pietro Saccardi. presentata dal Socio A. Angeli [2].

Nelle numerosissime analisi d'orine eseguite su individui melanotici, o dopo ossidazione intraorganica di composti pirrolici, noto una rimarchevole concomitanza fra le reazioni di ossidazione di tali orine [3] e la diazoreazione di Ehrlich. Potei accertarmi di ciò in:

a) Esperimenti di melanuria naturale, che furono eseguiti sulle orine di un giovane trentaquattrenne ricoverato nella clinica chirurgica di questa Università per papillomi melanotici estesissimi alcuni dei quali furono estirpati, ma poi fu rimandato con dichiarazione d'incurabilità. Le orine, che all'emissione sono aranciate, diventano poi rossicce e quindi brune senza presentare all'analisi alcunchè di patologico salvo un imbrunimento notevole con i reattivi altre volte usati per la ricerca del melanogeno. La reazione di Thormählen è lieve, la diazoreazione è pure lieve.

Un altro giovane trentaduenne, curato per diagnosi di encefalite alcoolica ha presentato importanti fenomeni di nefrite, Le orine, analizzate da me solo a guarigione quasi ottenuta, erano di colore giallo-aranciato, non presentavano altro che tracce d'albumina, imbrunivano lievemente col tempo all'aria e davano colorazioni brune con i reattivi del melanogeno. Il Thormählen era positivo, la diazoreazione ben netta. Durante una settimana le orine quotidiane presentano sempre più debole la reazione di Thormählen parallelamente alla diazoreazione ed alle reazioni di ossidazione. Dopo un'altra settimana il paziente, venuto a congedarsi, non mostrava nelle orine che tracce minime delle suddette reazioni.

b) Esperimenti di melanuria artificiale. — Avendo io ingerito gr. 0,5-0-8 di pirrolo, ed in altra epoca gr. 0,5 di α–α di metilpirrolo, la diazoreazione si manifestò subito all'apparire delle reazioni di ossidazione cessando allorchè l'organismo mostrò d'avere eliminato tutti i prodotti pirrolici. Gli stesi fenomeni si hanno per iniezione sottocutanee di pirrolo, di α-α dimetilpirrolo e di cloridrato di pirrolina. Avendo eseguite diecine e diecine

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico della L. Università di Camerino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 giugno 1921.

(3) *Pirolo e melanuria,* Nota I. Questi Rendic. XXVIII, 1° sem., 1919. Nota II. Ibid., XXVIII, 2° sem., 1919. Nota III. Gazz. Chim. Ital., L, II, fasc. III. Nota IV. Ibid., LI, II, fasc. I. Nota. V. Boll. Soc. Eustachiana, XIX, 1° sem., 1921.

di analisi di orine melanotiche naturali ed artificiali, posso assicurare che mai è venuta meno la concomitanza fra la reazione di Thormählen e la diazoreazione di Ehrlich. Dopo ciò ho motivo di aspettarmi che essa non manchi neppure nelle orine che presentano la Fleischreaktion di Arnold.

Nè si può obiettare che le reazioni constatate nelle orine si debbano ai composti pirrolici iniettati non solo perchè i composti studiati sono facilmente ossidabili (il pirrolo e l'α-α dimetilpirrolo si alterano anche all'aria ed alla luce) ma anche perchè il melanogeno, che da quelle sostanze compare nelle orine, non passa in etere come dovrebbe avvenire se il pirrolo o l'α-α dimetilpirrolo si eliminassero inalterati.

Da tutto ciò è logico sospettare che la diazoreazione di Ehrlich, si debba ad alcuni complessi ciclici della molecola proteica a cui non possono essere estranei derivati del pirrolo come lo confermano altri fatti più oltre accennati.

Ho notato inoltre che orine di cavie e di conigli, dopo ingestione di composti pirrolici studiati, sono brune fino dall'emissione; le orine umane sono invece aranciate all'emissione e non doventano brune all'aria, soprattutto alla superficie, altro che dopo la fermentazione ammoniacale. Il melanogeno non si libera o si manifesta adunque nella sua fase ossidativa, adunque altro che in ambiente alcalino, che nelle orine degli erbivori già preesiste, mentre nelle orine umane è subordinato a processi fermentativi che le rendono alcaline. Si potrebbe da ciò sospettare che il melanogeno — prodotto labile intermedio fra composti pirrolici e melanine — sia una base debole spostata dalla base più forte (ammoniaca), oppure un sale di un acido debole con l'ammoniaca, tant'è vero che le orine melanotiche brune perdono il loro colore per acidificazione con acidi diluiti e non rimbruniscono all'aria altro che con ammoniaca. L'idrato di potassa o di soda pare invece che tolgano loro definitivamente questa proprietà.

Esperimenti intesi ad isolare il malonogeno non sono, fino ad ora, riusciti; il melanogeno, come si disse, è insolubile in tutti i solventi anidri comunemente usati, è invece solubile in alcool metilico ed etilico. Al metodo di Eppinger, che consiste nel trattare con solfuro ammonico il precipitato ottenuto dalle orine melanotiche acidificate con acido solforico e trattate con solfato mercurico, può far seguito quello citato dal Pighini della estrazione amilica delle orine appena emesse. Infatti l'alcool amilico finisce per colorarsi col tempo in bruno od in rosso e dà assai più accentuata la diazoreazione e le altre reazioni di ossidazione. I liquidi estratti non rimangono però privi di melanogeno e, d'altra parte, è difficile estrarre il melanogeno dall'alcool amilico senza ossidarlo.

Il melanogeno però si può avere sotto forma concentrata e separato da molte sostanze contenute nell'orina senza alterare le sue proprietà.

Basta infatti acidificare con acido acetico un'orina melanotica naturale

od artificiale, trattarla con lieve eccesso d'acetato di piombo, spiombare con acido solfidrico ed eliminare l'acido solfidrico concentrando a b. m. per ottenere un liquido che, salvo la reazione di Thormählen, dà assai più intense le reazioni del melanogeno, mentre il precipitato ottenuto con acetato di piombo, decomposto con acido solfidrico, non mostra traccia di melanogeno. Tali soluzioni, lasciate all'aria doventano brune. Il melanogeno adunque è precipitato dal solfato mercurico non dall'acetato di piombo. Tali orine così trattate, dànno, per evaporazione a b. m. un residuo preciso giallo (che fornisce la reazione del bastoncino d'abete intriso di acido cloridrico) da cui l'alcool etilico assoluto estrae, fra altre sostanze, anche il melanogeno riconoscibile alle comuni reazioni. Tal liquido alcoolico, lasciato a sè, tenderebbe ad imbrunire e presenta dicroismo verde come le orine fortemente melanotiche, e, per evaporazione a b. m., lascia un residuo giallo pastoso che presto si cosparge di minutissimi cristalli tabulari, che, raccolti ed esaminati, non dànno le reazioni del melanogeno. Allo scopo di isolare dal residuo così ottenuto altre sostanze non inerenti alle nostre ricerche, il residuo fu ripreso con acqua e dializzato. Si constatò che il melanogeno passa attraverso la membrana, talchè, dopo dodici ore il liquido primitivo più non dà le reazioni del melanogeno. Questa sostanza è adunque un cristalloide. Ho provato inoltre che il melanogeno non passa in corrente di vapore. Il liquido così ottenuto per dialisi, evaporato a b. m. lascia infine un liquido denso, rosso-scuro che con i comuni reattivi del melanogeno dà forte imbrunimento e quindi precipitato bruno.

Mi riserbo ad ulteriori esperienze l'isolamento e lo studio di questa interessantissima sostanza.

Ma ritornando alla diazoreazione di Ehrlick che ha formato la ragione principale di questa Nota ricorderò come essa, data classicamente da questo autore come uno dei segni diagnostici più costanti e più sicuri del tifo addominale e della tubercolosi polmonare, fu poi constatata in tante e così svariate forme morbose per cui è caduta in disuso nel campo medico che l'attribuisce all'acido cromoossiproteinico (secondo Bocchi e Ghelfi) o a' pigmenti biliari come vorrebbero altri autori (Penzolt, Weyl, Fabbri ecc.) o più erratamente a sostanze a struttura fenolica di cui non si sa quali e perchè.

Si è invece d'accordo nell'attribuirla ad alterazioni del ricambio albuminoideo, e su questo ci si avvicina, a mio parere, di più al vero, perchè essa è positiva nel morbo di Addison, tumori melanotici, ferite di ghiandole surrenali, malaria, influenza ed in altri stati morbosi infettivi che alterano il metabolismo albuminoideo, ed affermano forse il giusto quelli che l'attribuiscono ad acidi proteinici o biliari giacchè è noto (Neuki e Zaneschi) che l'urocromo, l'urobilina, la bilirubina ecc. sono dello stesso gruppo dell'emoglobina, composti del pirrolo e che il pirrolo entra a formare le sostanze proteiche.

È noto pure che granuli di malaria si trovano nel corpo del plasmodio della malaria per attribuire veramente la diazoreazione di Ehrlich ad un anormale ricambio organico degli albuminoidi per cui prodotti pirrolici circolano e vengono eliminati con le orine invece di essere normalmente ossidati.

Confermerebbe questo nuovo ed importante fatto che si riferisce alla diazoreazione di Ehrlich chi potesse constatare sempre la presenza di prodotti pirrolici nelle orine di malati non melanotici che dànno comunemente la diazoreazione.

Le mie ricerche in merito non si sono fin qui estese che a poche analisi di orine di tifosi, tubercolotici e malarici in atto ed hanno confermato, senza alcuna eccezione, che la diazoreazione è sempre accompagnata da un anello rosso-bruno nella prova dell'Heller e da sicure e ben definite reazioni di ossidazione con i reattivi in uso pel melanogeno.

Ciò confermerebbe l'ipotesi che la diazoreazione di Ehrlich sia dovuta principalmente a prodotti pirrolici, fatto questo che mi riserbo di controllare estendendo le presenti ricerche al maggior numero possibile di orine di malati in cui è sicura la diazoreazione di Ehrlich.

La melanuria adunque può esistere anche indipendentemente da quelli stati morbosi e gravi che portano ai melanomi e può significare uno stato patologico anche lieve dovuto ad anomalie del ricambio organico.

Faccio in ultimo noto che al reattivo di Ehrlich, incomodo perchè va preparato al momento dell'uso, si può con risultati più netti e con agio maggiore sostituire l'azossicarbonamide [1] descritta dal prof. A. Angeli.

Chimica fisiologica. — *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia* [2]. Nota II di Sabato Visco, presentata dal Corrispondente Domenico Lomonaco [3].

« Nell'unico ratto che ingerì farina di semi di ervo in quantità tale « da sopravvivere per un lungo periodo di tempo, al quarantesimo giorno « di esperimento si osservò in pieno sviluppo una complessa sindrome mor- « bosa a carico del sistema nervoso. Essa regredì poi prontamente in seguito « alla somministrazione di un infuso a freddo di *cruschello* di Andropògon « Sorghum, e di qualche goccia di un preparato commerciale di vitamine ». Riferimmo quest'osservazione in una nostra Nota precedente [3] e riferimmo pure come su di essa noi basassimo l'ipotesi della carenza dei semi dell'*Ervum*

[1] Questi Rendiconti *26*, I, (1917), pag. 207.

[2] Ricerche eseguite nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Domenico Lo Monaco.

[3] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1921.

Ervilia. Perchè però quest'ipotesi acquistasse maggior valore occorreva suffragarla con una nuova e più importante serie di fatti, e perciò ritenemmo necessario di istituire al riguardo altri esperimenti, intesi non solo a confermare la supposta carenza, ma anche a definirne la natura.

Come animali da esperimento ci servimmo di colombi giovani e l'ervo che ad essi somministrammo proveniva dal raccolto del 1920 e conservava integra la proprietà di germogliare.

Riportiamo i protocolli delle esperienze fatte:

Colombo A. Bianco, del peso di grammi 280. Si inizia l'esperimento il 21 febbraio del 1921, alimentandolo esclusivamente con semi di ervo accuratamente scelti e lavati e dei quali mangia quotidianamente circa trenta grammi. Nei primi quattro giorni viene imbeccato, 6 marzo peso gr. 335, 8 marzo peso gr. 342, 10 marzo peso gr. 350, 12 marzo peso gr. 359, 15 marzo peso gr. 350, 17 marzo peso gr. 338, 19 marzo peso gr. 325, 21 marzo peso gr. 310, 22 marzo peso gr. 298, l'animale mangia poco, 23 marzo peso gr. 286, l'animale non ha mangiato, è sonnolento, messo fuori della gabbia si muove poco, la deambulazione è però normale ed il volo è sostenuto, 24 marzo peso gr. 274, non ha mangiato, le feci sono diarroiche e con reazione acida al tornasole, l'animale si regge male sulle gambe, spinto a camminare fa pochi passi con andatura pareto-spastica dopo i quali incomincia a piegare il corpo a destra ed a sinistra, allarga le ali per ristabilire l'equilibrio, ma non vi riesce e perciò è costretto a fermarsi e ad adagiarsi sul ventre, 25 marzo, mangia poco, feci diarroiche con reazione acida. La sindrome osservata ieri appare un po' più accentuata; il volo è meno sostenuto, 26 marzo, sindrome immutata: gli si somministrano alcune gocce di un preparato commerciale di vitamine e si mette nell'acqua che deve bere un po' di cruschello di Andropògon sorghum, 27 marzo, l'animale ha mangiato di più, si regge meglio sulle gambe, e cammina alquanto speditamente dando segni meno marcati di stanchezza. Gli si somministrano altre poche gocce del solito preparato commerciale di vitamine, e si continua a mettere nell'acqua che deve bere un po' di cruschello di Andropògon sorghum, 28 marzo peso gr. 338, l'animale mangia abbondantemente, la sindrome morbosa è quasi del tutto scomparsa, si continua nel trattamento terapeutico dei giorni precedenti, 29 marzo peso gr. 345, l'animale sta bene.

Da questa prima indagine sperimentale deducemmo che con l'alimentazione esclusiva di semi di *Ervum Ervilia* si poteva provocare nel colombo una sindrome uguale a quella che si determina nello stesso animale con l'alimentazione esclusiva con riso brillato, e che, come in questo caso anche in quello ogni fatto morboso si dileguava in seguito alla somministrazione di sostanze contenenti vitamine antiberiberiche. Ciò ci autorizzò a concludere che nel colombo alimentato con semi di *Ervum Ervilia*, i fatti morbosi manifestatisi dovevano identificarsi con la *Polineuritis gallinarum* dell'Eichmann e come questa essere la conseguenza di un avitaminosi.

Esaurita la partita di semi di *Ervum Ervilia* con la quale avevamo iniziati gli esperimenti, fummo costretti a sospendere per qualche tempo le ricerche fino a che ci riuscì di procurarcene un'altra che però aveva subita un'infestione di coleotteri, i quali certamente con il loro contenuto in vitamine avrebbero influenzato il risultato delle esperienze. Di fronte all'impossibilità assoluta di scegliere i semi uno per uno ed in quantità sufficiente ai

bisogni degli animali per un lungo periodo di tempo, fummo costretti a modificare il dispositivo delle nostre indagini, e perciò stabilimmo di provocare la polineurite col riso brillato e di curarla poi con la somministrazione di semi di ervo.

Evidentemente se nei semi dell'ervo erano contenute vitamine antiberiberiche, essi dovevano comportarsi come il riso intero, il frumento ecc. ecc. nel trattamento della polineurite sperimentale, e ciò tanto più perchè nessuna specificità è stata ancora dimostrata per lo stesso tipo di vitamina secondo che provenga dalle leguminose o dalle graminacee.

Trascriviamo i protocolli di questo secondo gruppo di esperienze.

Colombo A. Bianco, quello stesso del primo esperimento, dal 30 marzo mangia ervo (quello infestato), il 14 aprile non presenta ancora nessun fatto di polinemite, pesa gr. 390. Il 15 aprile si incominciò ad alimentare imbeccandolo esclusivamente con riso brillato e lavato, peso gr. 390, 16 peso gr. 384, 17 peso gr. 368, rigurgita una parte del riso somministratogli, 18 peso gr. 353, 19 peso gr. 353, rigurgita, gas nel gozzo, 20 peso gr. 350 rigurgita il cibo, gas nel gozzo, 21 peso gr. 332, id. id. 22 peso gr. 325, id. id. 23 peso gr. 320, camminando inciampica e zoppica con l'arto destro, 24 nel camminare fenomeni pareto-spastici più accentuati di ieri. L'animale stando in piedi spesso barcolla. Camminando inciampa, talora trascina l'arto sinistro, 25 fenomeni polineuritici multipli, gli si somministrano circa 30 gr. di semi di ervo scelti, per quanto è possibile, accuratamente, e ripetutamente lavati, 26 sindrome immutata, si somministra ervo, 27 nessun miglioramento, si somministra ervo, 28 nessun miglioramento, si somministra ervo ed un po' di cruschello di Andropògon sorghum, 29 si nota un apprezzabile miglioramento della sindrome polineuritica. Altro cruschello, 30 il miglioramento è ancora più accentuato. Altro cruschello, 1° maggio, l'animale è quasi guarito, ancora cruschello. 2 maggio, l'animale è guarito, da oggi si sospende la somministrazione di cruschello di Andropógon sorghum, e si alimenta soltanto con semi di ervo (partita infestata), fino al 24 giugno, in cui si rimette di nuovo ad alimentazione esclusiva di riso brillato e lavato. Pesa gr. 360, il 29 giugno, l'animale mangia poco, pesa gr. 354. Il 2 di luglio l'animale pesa gr. 320 è sonnolento, messo fuori della gabbia non si muove, spinto a camminare inciampica e cade. Il volo è però sostenuto, non mangia, 3 luglio, peso gr. 300, sindrome polineuritica molto accentuato, gli si somministrano 30 gr. di semi di ervo, per quanto è possibile accuratamente scelti e ripetutamente lavati. Mangia spontaneamente, 4 peso gr. 310, sindrome immutata, il gozzo si vuota lentamente. Altri 30 gr. di ervo, 5 peso gr. 322, nessun miglioramento, altri 30 gr. di ervo, 6 peso gr. 330, nessun miglioramento nella deambulazione, si nota un lieve peggioramento a carico della mobilità delle ali per cui il volo non è possibile, altri 30 gr. di ervo, 7 peso gr. 342, condizioni immutate, altri 30 gr. di ervo, 8 peso gr. 350, condizioni immutate, si sospende l'esperimento.

Piccione B. Nero, giovane, del peso di gr. 318. Si inizia l'esperimento il 16 aprile del 1921 alimentandolo esclusivamente con semi di ervo, (qualità infestata) si imbecca per tutta la durata dell'esperienza. Aumenta sempre di peso fino a raggiungere gr. 355, il 7 di giugno, giorno in cui si mette ad alimentazione esclusiva di riso brillato, e repetutamente lavato. Non presenta nessun fatto di polineurite. Il giorno 10 giugno pesa gr. 337, rigurgita 18 gr. di riso sui 30 somministratigli, gas nel gozzo. Continua sempre a rigurgitare una buona parte del riso che gli si somministra, a perdere di peso ed a presentare gas nel gozzo. Il 18 giugno è poco vivace, rigurgita 27 gr. di riso dei 30 somministratigli, pesa gr. 261, 19 giugno, peso gr. 254, spinto a camminare fa pochi passi e poi inciam-

pica. Lasciato cadere vola normalmente 20 sindrome polineuritica alquanto più accentuata. Volo normale, trattiene un po' di riso, gas nel gozzo, feci diarriche con reazione acida, 21 deambulazione quasi impossibile, volo abbastanza sostenuto, 22 sindrome immutato, rigurgita tutto il riso somministratogli, peso gr. 249, si imbecca con 30 gr. di semi di ervo accuratamente scelti e ripetutamente lavati, 23 peso gr. 256, non si ha rigurgito, sindrome immutato, altri 30 gr. di semi di ervo, 24 peso gr. 267 durante la notte rigurgita qualche seme di ervo, feci verdi diarriche con reazione acida, sindrome forse un po' aggravata, certamente non migliorata, 25 peso gr. 260, volo meno sostenuto, durante la notte l'animale rigurgita un po' di ervo, altri 30 gr. di ervo, 26, 27, 28, 29, 30 giugno, condizioni stazionarie, 1° luglio peso gr 270, si apprezza un lieve ma evidente miglioramento della diambulazione, volo sempre poco sostenuto, 4 continua il miglioramento ma sempre in misura molto breve, 5-6 sindrome immutata, 7 peso gr. 266, sindrome alquanto migliorata, 8 si sospende l'esperimento.

Colombo C. Nero, giovane del peso di gr. 295, si mette in esperimento il 28 aprile alimentandolo esclusivamente con riso brillato e lavato. Il 18 maggio, al mattino la sindrome polineuritica incomincia a manifestarsi, alla sera è già in pieno sviluppo. Il 19 si alimenta esclusivamente con semi di ervo, la sindrome non si modifica nei giorni seguenti sino al 29 di maggio. Il 30 si osserva un lieve miglioramento (?). Il 1° di giugno lo stato dell'animale è stazionario. Gli si somministra un po' di cruschello di Andropògon sorghum, 2 giugno, miglioramento molto notevole, 4 giugno, l'animale appare quasi del tutto guarito, 6 giugno, l'animale sta bene.

Dai protocolli sopra riportati rileviamo che:

1°) in un colombo dopo trenta giorni di alimentazione esclusiva con semi di *Ervum Ervilia* si manifestò una netta, se pur non grave, sindrome polineuritica che regredì rapidamente e completamente in seguito alla somministrazione di sostanze ricche di vitamine antiberiberiche;

2°) in due colombi (in uno due volte) alimentati per un certo tempo con semi di ervo (qualità infestata) in seguito alla somministrazione esclusiva di riso brillato comparve precocemente (in un caso per due volte dopo 8 giorni) una netta sindrome polineuritica;

3°) in tre piccioni resi polineuritici col riso brillato (in uno due volte) la somministrazione di semi *Ervum Ervilia* in quantità elevata, influenzò la sindrome morbosa soltanto lentissimamente ed incompletamente. Essa invece regredì sollecitamente e totalmente quando fu aggiunta all'alimentazione una piccola quantità di cruschello di Andropògon Sorghum.

Dai dati riferiti risulta che i semi maturi dell'*Ervum Ervilia* contengono uno scarso quantitativo di vitamine antiberiberiche.

Geologia. — *Notizie sopra alcune interessanti formazioni del Supracretaceo del bacino di Eraclea nell'Asia Minore.* Nota I dell'ing. Secondo Franchi, presentata dal Socio Carlo Fabrizio Parona (1).

Per le notizie datene dal Ralli e da Douvillé, è nota ai geologi la costituzione della parte meno alta del Cretaceo che ricopre il Carbonifero del bacino di Eraclea; ma della costituzione singolarissima della parte superiore di esso, comprendente forse tutto il Supracretaceo, si ebbero finora molto scarse ed inesatte notizie. Avendo io percorso, lo scorso autunno, la parte orientale di quel bacino, sono in grado di dare un piccolo contributo alla conoscenza di quest'ultima serie, la quale è particolarmente interessante per la sua costituzione litologica (2).

Al di sopra delle arenarie, dette dal Ralli « *grés de Vély-Bey* », soprastanti ai calcarî dolomitici urgo-aptiani, e aventi in alcune regioni la potenza di parecchie centinaia di metri, si osserva presso Neiren, 15 km. a levante di Eraclea, un'altra formazione arenacea, litologicamente un po' diversa, che io distinguerò col nome di « arenarie di Neiren », notevoli per includere, nel complesso di arenarie chiare in strati sottili, dei banchi di calcari brecciosi, con frammenti di rudiste, di calcari arenacei, e di arenarie con elementi di carbone e della vere lenti di carbone detritico, che sembra di origine secondaria. La loro potenza complessiva può essere superiore ai cento metri.

Presso Neiren, e a levante e a ponente di tale località, queste arenarie sono ricoperte da un'altra formazione interesssantissima, che dirò « formazione delle colate di roccie diabasiche », la quale, a sua volta, viene ricoperta, in perfetta concordanza, da una potente formazione, costituita prevalentemente da tufi e da colate di roccie vulcaniche, che io, pel suo tipico sviluppo nei dintorni e sotto la città stessa di Eraclea, distinguerò col nome « formazione vulcanica di Eraclea ». Di queste due ultime formazioni io desidero dare qualche notizia con questa nota preliminare.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1921.

(2) Queste notizie furono racccolte nel corso di una Missione tecnica, mandata colà dalla « Società Alti forni e Acciaieria di Terni », ed io debbo rendere sentite grazie all'illustrissimo signor Presidente, ing. Giuseppe Orlando e all'ingegnere G. Biancotto, ispettore delle miniere della Società, perchè, oltre alle gite di interesse minerario, essi vollero favorire, per quanto il tempo lo permetteva, quelle di puro interesse scientifico.

Formazione delle colate di roccie diabasiche. — Essa è costituita da un complesso di arenarie e marne bigie, cinerognole o policrome, verdi, bluastre, ecc. e da scisti argillosi (argilloliti di Ralli) rossastri, nel quale sono inserite numerose ed estese e talora potenti colate di roccie diabasiche, che ne sono la parte più caratteristica.

Questa formazione è stata da me ossservata per l'estensione di una trentina di chilometri fra Deirmen-Agzi, a 5 km. da Eraclea, e i dintorni di Balcik, nell'alta valle del fiume Gillik, sfociante a sud di quella città. Le diverse colate sovrapposte sono separate talora da sottilissime zone di depositi marnoso-arenacei, per cui si deve pensare alla loro effusione subacquea. Le roccie diabasiche presentano costantemente e con grande evidenza, una divisibilità globulare, che potremmo anche dire globulare-cipollinica od a cipolla, talchè la superficie loro è sempre cosparsa di grossi cogoli nei varî studî della loro liberazione dall'involucro cipolliforme, o liberi od anche dislocati e rotolati. Sulle strade mulattiere in tali roccie incassate e sulle parti erose dai torrenti, sulla superficie spianata per effetto delle diverse azioni meccaniche, le traccie ellittico circolari concentriche delle superficie di divisibilità permettono subito distinguere tali roccie.

Esse sono dî colore verde e smorto, non mostrano inclusi riconoscibili ad occhio nudo, e, causa lo stato di generale profonda alterazione, anche al microscopio, coi preparati finora esaminati, non ne è stata possibile una esatta determinazione petrografica. Solo si riconoscono, in mezzo a parti alterate indefinibili, dei resti di pirosseno, e dei felspati molto alterati e indeterminabili, presentanti numerosissime inclusioni minute tondeggianti, di natura vetrosa. Solo lo studio di numerosi preparati potrà permettere una rigorosa definizione litologica, e di giudicare se la particolare struttura sia dovuta alla origine subacquea delle colate.

La divisione globulare è nota in molte roccie diabasiche eoceniche della Toscana e della Liguria: notissima è quella della massa di Prete Michele, illustrata dall'Issel nell'opera *Liguria geologica e preistorica*. Lo Zaccagna la osservò in molte masse diabasiche della Valle del Serchio e della costa di Levanto. Ivi la si vede dalla ferrovia, in un taglio di torrente, fra due gallerie; e io stesso la osservai in una massa diabasica interessantissima, associata con eufotidi, presso Voltaggio.

Ma in quest'ultima località i cogoli ellissoidali che si separano facilmente dalla roccia, possiedono costituzione mineralogica zonare a guisa delle variole delle varioliti; si tratta cioè ivi di una divisibilità che è in diretto rapporto colle variazioni di costituzione della roccia, come avviene ad esempio, in modo ben visibile, per la grande scala del fenomeno, nelle dioriti orbiculari di Corsica.

Invece nelle roccie diabasiche di Eraclea, la natura litologica della roccia sembra indipendente, ed invariabile, dalle sfoglie cipolliformi, alla

superficie e al centro dei cogoli; così che pare si tratti di una divisibilità di origine fisica, alla guisa di quelle colonnari o a lastre di molte roccie vulcaniche, dovute alle particolari leggi secondo le quali avvenne la contrazione delle masse rocciose, durante il loro raffreddamento. Una analoga divisibilità, ma molto meno bella, io osservai nei noti melafiri del Biellese. Alcune riescite fotografie, mostranti il fenomeno in tutta la sua evidenza, sono state da me presentate alla riunione iemale di quest'anno della Società geologica, e una di esse è stata riprodotta, come illustrazione della comunicazione.

L'età di questa formazione non è ben precisata, non avendomi offerto fossili; ma, essendo separata dai calcari urgo-aptiani delle potenti masse di arenarie di Vély-Bey e di Neiren, e venendo essa ricoperta da una formazione molto unitaria, che vedremo essere senoniana, noi possiamo ritenere come probabile che essa appartenga al Turoniano.

Mineralogia. — *Sulla lublinite di Sassari* [1]. Nota di Emanuele Quercigh, presentata dal Socio Ettore Artini [2].

La lublinite, rinvenuta in Italia finora da Galdieri nel 1913 [3] è stata recentemente osservata, da me, in Sardegna, nei dintorni di Sassari.

L'interesse che presenta questo minerale caratteristico, costituito da aghetti microscopici ad estinzione costantemente inclinata, tanto da venir ritenuto sicuramente monoclino [4] finchè non ne venne dimostrata l'identità, oramai indiscussa [5], colla calcite [6], è accresciuto dal fatto che ci sono tuttora ignote le condizioni e le cause della sua formazione e sconosciuto qualsiasi metodo di sintesi, come pure dall'incertezza che permane, giustificata, riguardo alla sua maggiore o minore diffusione in natura.

Espongo, perciò, in questa Nota, le osservazioni eseguite sulla lublinite della nuova località.

Poco lungi dall'abitato di Sassari, seguendo la strada chiamata Scala de' Pintori, che percorre il Colle dei Cappuccini, fin là dov'essa, intagliandosi nel calcare miocenico, scende verso la collina detta Monte Bian-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1921.

(3) A. Galdieri. *Su di una calcite feltriforme di Nocera.* Annali della R. Scuola di Agricoltura di Portici, vol. XI (1913).

(4) R. Lang. *Lublinit die monocline Modification des Calciumcarbonats.* Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. Pal. Beilageband 38 (1914) 121.

(5) Johnston, Merwin, Williamson. *The several forms of calcium carbonate* American Journ. of Science 41 (1916) 490; P. Niggli u. K. Fasey, Zeitschrif f. Kryst. 56 (1921) 227.

(6) E. Quercigh, *Sulla vera natura della lublinite ecc.* Rivista di Min. e crist. ital. 44 (1916) 65.

chino, si osserva, nel calcare laterale, qualche litoclase che si mostra parzialmente rivestito da uno strato di materiale leggero, pulverulento, assai soffice, di spessore variabile fino a circa due millimetri, di color bianco, sovente assai puro, talora latteo, o più marcatamente giallastro, o grigiastro, sempre ben distinto dalla massa calcarea più o meno alterata e marnosa.

Esaminata al microscopio, questa polvere si presenta perfettamente cristallina e costituita da un'infinità di aghetti microscopici, trasparenti, incolori, fortemente birifrangenti.

La loro lunghezza, generalmente inferiore al millimetro, arriva talvolta a mm. 1,3 e lo spessore non supera mm. 0,005; essi sono tutti indipendenti fra loro e senza alcun accenno a geminazione. All'ortoscopio presentano estinzione inclinata rispetto alla direzione d'allungamento, i valori dell'angolo d'estinzione variano in limiti abbastanza estesi: da un minimo di circa 35° ad un massimo di 50° mantenendosi generalmente oscillanti intorno a questo massimo.

L'esame ottico al conoscopio non risulta conclusivo per lo spessore assai ridotto dei cristallini.

L'indice di rifrazione è dell'ordine di grandezza dell'α-monobromonaftalina (1,66) nella direzione dell'allungamento e risulta paragonabile a quello dell'olio di ricino (1,48) nella direzione normale.

È facile constatare, all'analisi, che il minerale è costituito in modo quasi esclusivo da carbonato di calcio; esso contiene però notevoli quantità di acqua (fino all'11 %) che viene facilmente ceduta, in ambiente secco, già alla temperatura ordinaria.

Si deve ammettere che si tratti di acqua di condensazione superficiale, perchè la trasparenza e le proprietà ottiche dei cristallini non mutano col contenuto in acqua, nè colla sua completa eliminazione. Questa proprietà della lublinite, già osservata da Jwanoff e Tschirwinsky sul materiale delle marne eoceniche di Gora Pulawska (Lublino), che conteneva il 37,56 % d'H_2O, fu notata in seguito generalmente, quantunque in proporzioni minori, da quanti si occuparono di questo minerale; essa non si deve attribuire solo allo stato di estrema divisione della lublinite, perchè altri minerali in condizioni identiche non presentano affatto, o solo in modo attenuatissimo, il fenomeno, ma si deve ammettere che la natura stessa del composto $CaCO_3$ vi influisca. Tracce di sostanze organiche, che pur furono riscontrate da Morozewicz nella lublinite di Wysokie (Lublino), non esistono in quella di Sassari, in cui però l'analisi microchimica rivela la presenza di Mg, Si ed Al, escludendo quella del Na, K, Fe, P ed (NH_4). Si può arguire che la natura del minerale ne renda per lo meno ardua l'impresa di scevrarlo da piccole quantità di sostanze estranee, come del resto è provato dalle altre analisi che si conoscono: infatti Morozewicz trovò per quello di Wysokie 1.04 % di impurezze inorganiche, quello di Gora Pulawska diede in due analisi rispettivamente

il 0.75 % ed il 0.46 % di residuo insolubile, quello di Bochotniza analizzato da F. Borkowsky presentava il 3 % di sostanze estranee, il Lang in quello della Diessenertal trovò il 0.48 % fra Al_2O_3, Fe_2O_3, SiO_2 e MgO, mentre Galdieri riscontrò, nella lublinite di Nocera, 1·12 % di residuo insolubile.

La lublinite di Sassari diede all'analisi la seguente composizione centesimale:

CaO	55.86
CO_2	43.47
SiO_2	0.13
Al_2O_3	0.15
MgO	0.21
	99.82

ciò che ne conferma la purezza relativamente elevata.

La densità, determinata sul materiale secco col metodo della sospensione in soluzioni di tetrabromuro d'acetilene e toluolo, risultò identica a quella della calcite (2.72).

Credo che i valori, più bassi, ottenuti da Jwanoff (2.63) e da Tschirwinsky (2.626) per la lublinite di Gora Pulawska, da Lang (2.65) per quelle della Diessenertal e da Galdieri (2.67) per quello di Nocera, si debbano spiegare colle difficoltà sperimentali che si incontrano nell'allontanare eventuali microscopiche bollicine gassose persistentemente aderenti a cristallini dotati di superficie così vasta in rapporto al peso; anche l'umidità, che facilmente viene condensata dalla lublinite secca, deve portare un errore quando il liquido usato non scioglie l'acqua; infatti basta, ad esempio, il 2 % d'acqua per abbassare la densità reale di 2.72 e quella apparente di 2.68, e forse non è casuale la coincidenza fra il peso specifico di 2.67 trovato appunto dapprima pel minerale di Nocera e la percentuale d'acqua (1.79 %) contenutavi, mentre lo stesso minerale di Nocera, sperimentato allo stato di perfetta secchezza, mi risultò decisamente più denso di 2.70 [1].

Per quanto riguarda la reazione di Meigen, originaria o modificata, e quella di Thugutt, la lublinite di Sassari si comporta, come quella di Nocera, identicamente alla calcite di dimensioni paragonabili.

Sulle condizioni naturali di formazione della lublinite e sua sintesi, le mie ricerche, tuttora in corso, non mi permettono per il momento di definire il problema, su di esso mi riservo di ritornare in breve, limitandomi ora ad esporre la convinzione formatami, che questo minerale debba essere, in natura, molto più diffuso di quanto risulta dalle osservazioni note finora.

[1] L. c. pag. 83.

Biologia. — *Osservazioni sul tappeto lucido dei mammiferi domestici* [1]. Nota I del dott. Angelo Cesare Bruni, presentata dal Socio Benedetto Morpurgo [2].

È noto che gli occhi di molti mammiferi in presenza di minima quantità di luce sono capaci di emanare dei bagliori, e che tale fenomeno è dovuto sopratutto alla presenza di un tratto speciale della coroide — il tappeto lucido — il quale macroscopicamente appare come un'area dell'emisfero posteriore dell'occhio elegantemente colorata ed iridescente. All'esame istologico di quest'area si trova, immediatamente all'esterno della lamina corio-capillare, tra questa e la lamina vascolosa, uno strato speciale — il tappeto propriamente detto — che nei carnivori e nei pinnipedi consta di parecchi ordini di cellule appiattite, in altri mammiferi (ungulati, cetacei) è costituito essenzialmente di varî piani di fasci paralleli di fine fibre collagene ondulose, come quelle delle stoffe marezzate, cosparsi di nuclei. Per ciò vennero distinti da Brücke il tappeto fibroso ed il tappeto cellulare.

Sia cellulare o fibroso il tappeto non ha vasi proprî, ma è attraversato quasi perpendicolarmente e ad intervalli regolari da quelli, che stabiliscono la relazione tra lamina corio-capillare e vascolosa; in corrispondenza di esso l'epitelio retinico non è pigmentato o lo è scarsamente. Si ammette da tutti che l'iridescenza caratteristica sia dovuta a fenomeni d'interferenza e di diffrazione della luce; la funzione pare sia quella di favorire la visione crepuscolare.

Secondo l'opinione dominante le cellule del tappeto cellulare, o iridociti, dovrebbero le loro proprietà ottiche all'essere infarcite ciascuna di un'enorme quantità di finissimi cristalli aghiformi, disposti in parecchi fasci, aventî direzioni diverse, il che si osserverebbe anche nel tappeto e nell'argentea dei pesci.

È un fatto veramente singolare, che un organo, cui è lecito attribuire la medesima funzione in tutti i mammiferi, nei quali esiste, si presenti con due strutture fondamentalmente diverse; ciò spiega i tentativi fatti per dimostrare un ponte di passaggio fra le due strutture (Pütter, Franz).

(1) Lavoro eseguito negli Istituti anatomici dell'Università di Torino (direttore professore G. Levi) e della Scuola sup. di Medicina veterinaria (direttore prof. U. Zimmerl).

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1921.

Io ho studiato il tappeto fibroso nel bue nel montone e nel cavallo, il tappeto cellulare nel cane e nel gatto. Nulla di più di quanto è noto ho potuto mettere in evidenza pel tappeto fibroso; pel cellulare invece ho raccolti alcuni dati, che meritano di essere approfonditi.

Nel cane gli iridociti piatti, poligonali, di 5-7 μ di spessore, di 25-30 μ di diametro, sono ben distinti gli uni dagli altri. Ciascuno contiene nel citoplasma molte lunghe e fine fibrille, disposte in diversi piani paralleli alla superficie del tappeto. In uno stesso piano tutte le fibrille sono parallele

Fig. I. Tappeto lucido di gatto adulto. Disposizione sinciziale degli iridociti. Fissazione Carnoy, colorazione ematossilina ferrica. Camera lucida, 1334, d. (ridotta a $^1/_2$).

fra di loro, rettilinee, ma non rigide; le fibrille di un piano intersecano sotto angoli diversi quelle dei piani adiacenti. Esistono inoltre in qualche cellula fasci di fibrille perpendicolari alla superficie del tappeto. Nessuna fibrilla passa da una cellula all'altra. Ogni iridocito possiede al centro un nucleo ovale appiattito. I vari piani di cellule sono separati da setti connettivi continui, che aderiscono ai vasi attraversanti il tappeto. In sezioni a piatto si dimostra che questi setti constano di una delicatissima rete elastica e di fibre collagene sparpagliate; di più contengono fascetti di fibrille connettive, presentanti la stessa ondulazione, che hanno i fasci del tappeto fibroso.

Nel gatto adulto troviamo anzitutto una meno netta separazione tra le singole cellule; dove la separazione è più evidente, i limiti cellulari sono segnati soltanto dalla brusca interruzione dei sistemi di fibrille. In altri

punti anche i fasci di fibrille acquistano una maggior lunghezza e si fanno più ondulati, alcuni si possono seguire per oltre 100 μ, quindi l'insieme del tessuto acquista un aspetto nettamente sinciziale (fig. 1). Ciò non toglie che si vedano qua e là degli spazi chiari tra fasci di fibrille bruscamente interrotti. Le fibrille stesse sono meglio individualizzate che nel cane. I setti di separazione tra i singoli ordini di cellule sono sottilissimi ed incompleti, essendo limitati all'intorno dei vasi: non contengono nè fibre elastiche, nè fibre collagene raccolte in fasci.

Nessun dubbio che le fibrille da me illustrate negli iridociti del gatto e del cane corrispondano alle formazioni, che furono fino ad oggi considerate come cristalli, ma è evidente che la descrizione che ne fu data non è esatta, come pure errata ne è l'interpretazione. Si tratta certamente di fibrille plasmatiche, che si avvicinano a quelle dell'epidermide e delle mucose, e non di cristalli.

Stabilito questo, volli vedere se eventualmente esistessero caratteri comuni tra le fibrille endocellulari degli iridociti e quelle d'aspetto collageno del tappeto fibroso. Esclusa la corrispondenza dei caratteri tintoriali, ricorsi alla digestione con pancreatina; le fibrille degli iridociti vennero digerite, non così quelle del tappeto fibroso. Resta dunque assodato che le fibrille delle due forme di tappeto non sono della stessa natura. Ma v'è di più: abbiamo visto che nel cane i setti connettivi tra i varî piani di iridociti contengono fascetti collageni isolati, identici pei loro caratteri a quelli del tappeto fibroso. Quì, sebbene in quantità molto diversa, sono rappresentati i due tipi di struttura del tappeto.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota II del Corrisp. Quirino Majorana. (1).

Considerazioni sull'uso della bilancia. — Queste mie ricerche sperimentali si fondano sull'uso di una bilancia con un grado di sensibilità eccezionale, variabile a seconda dei casi fra 130 e 370 mm. per mg.; nelle letture si apprezza ad occhio il decimo di mm. Così sperimentando, si comprende come possa intervenire qualche causa perturbatrice o di errore, che di solito non è presa in considerazione. La prima di esse è la variabilità della sensibilità della bilancia col *tempo di carica*, con l'intervallo di tempo cioè, compreso tra l'istante in cui si abbassa il giogo e quello in cui si fa la lettura. Si elimina tale causa di errore, portando quel tempo ad un minimo di 4 o 5 ore, e talvolta sino a qualche settimana.

Curvatura dello spigolo del coltello. — È questa una seconda causa di errore assai complessa, di cui dirò ora brevemente. Lo spigolo di un coltello (acciaio od agata) di una bilancia non può esattamente consistere nella retta geometrica, determinata dall'incontro dei piani limitanti il coltello ed inclinati l'uno sull'altro per un angolo di circa 70°. Se così fosse, il peso del giogo e quello dei due carichi verrebbe a riversarsi su una zona superficiale infinitesima, il che è assurdo. Per cui, anche se la lavorazione di un coltello è in origine praticamente perfetta, lo spigolo di questo finisce per smussarsi ed assumere un profilo tondeggiante, sia pure in misura ap-

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1921.

pena percettibile. La sezione normale allo spigolo consiste dunque in una certa curva variabile da caso a caso, che ha un raggio di curvatura (*raggio di curvatura del coltello*) diverso da zero, al punto di tangenza col piano di agata di appoggio. Trascuro per altro, per ragioni di semplicità, di considerare gli inevitabili fenomeni di deformazione elastica che pur debbono avvenire al detto punto di tangenza. Inoltre, è chiaro che, se inconvenienti si manifestano per l'imperfezione dei coltelli, essi provengono da tutti e tre i coltelli della bilancia. Ma io prescindo anche da ciò, e le considerazioni che svolgo, si riferiscono a quanto avverrebbe se solo il coltello centrale fosse difettoso. Ecco ora quali conseguenze si possono prevedere, in base alle esposte considerazioni.

Centro di oscillazione vero della bilancia. — In conseguenza della curvatura del coltello, il centro di oscillazione della bilancia viene ad essere alquanto rialzato, rispetto al punto di appoggio, e precisamente di un segmento uguale al raggio di curvatura al punto di contatto. All'oscillare della bilancia, il centro di oscillazione può esser dunque mutevole, se il profilo dello spigolo del coltello non è circolare, e propriamente si sposterà lungo l'evoluta, o luogo dei centri di curvatura, del profilo stesso.

Sensibilità della bilancia. — Questa è espressa, come è noto, dalla formula

$$s = \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}} = \frac{b}{\mathrm{P}d},$$

dove $d\alpha$ è l'angolo per cui si sposta il giogo, sotto l'azione del sovraccarico $d\mathrm{P}$; b è il braccio della bilancia; P è il peso totale del giogo e dei due carichi; d è la distanza fra il centro di oscillazione (centro di curvatura al punto di tangenza fra coltello e piano di appoggio) ed il centro di gravità del sistema.

Può ora mutare (p. e. in conseguenza dell'aggiunta di un lieve sopraccarico) la posizione di equilibrio della bilancia. Si potranno allora dare tre casi:

1° *La curvatura del coltello è costante;* sarà anche costante d, e quindi anche la sensibilità della bilancia, al variare della sua inclinazione.

2° *La curvatura del coltello va decrescendo dal punto centrale verso le parti laterali del suo profilo* (come dal vertice di una parabola); si vede allora che il d va crescendo, e quindi la sensibilità va decrescendo.

3° *La curvatura del coltello va crescendo* (come dal punto di minima curvatura di un'ellisse); in tal caso il d va decrescendo, e la sensibilità va crescendo.

Di questi tre casi, sembra che il terzo sia quello che con maggiore probabilità si verifica in pratica; ciò risulta dalle mie esperienze, come farò vedere.

Effetto di una rotazione del sostegno. — Questa rotazione, generabile, p. e., mediante la manovra delle viti calanti ai piedi di una qua-

lunque bilancia, e che si trasferisce al piano di appoggio del coltello, va considerata solo se avviene intorno ad un asse parallelo allo spigolo del coltello. Essa non avrebbe inoltre alcuna influenza sulla posizione di riposo del giogo, se lo spigolo fosse idealmente perfetto. Ma in realtà si deve supporre che esso ha curvatura finita e, nel caso più semplice, che il suo profilo sia rappresentabile p. e. con un arco di cerchio MCN (fig. 1), di centro O. Sia AB il piano di appoggio, inizialmente orizzontale; esso, per la rotazione si trasferisce in A′B′. Ma con ciò il centro di gravità G del sistema non resterebbe

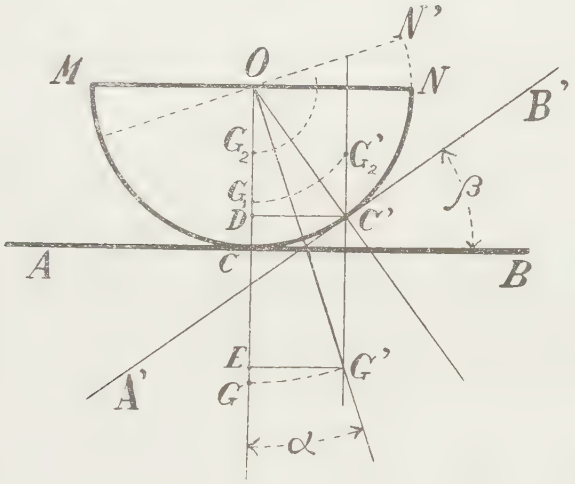


Fig. 1.

più contenuto sulla verticale passante per il nuovo punto di tangenza C′; occorrerà necessariamente che il coltello ruoti o meglio *rotoli* sul piano di appoggio. Suppongo per comodità di figura che il punto O rimanga fisso nello spazio; descrivo l'arco di cerchio GG′, con centro in O; il punto G′ sulla verticale per C′, corrisponde alla nuova posizione del centro di gravità. L'angolo GOG′ = α, è quello per cui ha ruotato il giogo od il coltello, il quale ha assunto la posizione M′C′N′, con punto di contatto, in generale, dissimmetrico; l'angolo COC′ = β, è quello per cui ha ruotato il piano di appoggio, essendo i suoi lati rispettivamente normali ad AB ed A′B′. Conducansi EG′ e DC′ normali ad OG. Si ha, essendo OC′ = r, ed OG′ = d:

$$EG' = DC' = r \operatorname{sen} \beta = d \operatorname{sen} \alpha \ ,$$

ossia:

$$\frac{r}{d} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \ ;$$

e, per piccoli angoli,

(1) $$\frac{r}{d} = \frac{\alpha}{\beta} \ .$$

Da cui si vede che se $r = d$, sarà $\alpha = \beta$, cioè: *se il raggio di curvatura è uguale alla distanza fra i centri di curvatura e di gravità, il giogo ruota esattamente per lo stesso angolo per cui ruota il piano di appoggio.*

Se $r \lesseqgtr d$, sarà corrispondentemente $\alpha \lesseqgtr \beta$, cioè: *l'angolo di rotazione del giogo sarà minore o maggiore di quello del piano di appoggio, a seconda che sia il centro di gravità al di sotto od al disopra del punto di appoggio.*

Dall'espressione:

$$d = r \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha},$$

si vede che, potendo al massimo essere $\operatorname{sen} \alpha = 1$, non potrà mai avvenire, per l'equilibrio, che

$$d < r \operatorname{sen} \beta;$$

cioè, dalla figura, $d <$ DC'. Ciò non di meno, se il centro di gravità è al di sopra del punto di appoggio, e se la rotazione β è sufficientemente grande, l'ultima disuguaglianza potrà effettivamente verificarsi. Ma ciò corrisponderebbe necessariamente al traboccare della bilancia, senza possibilità di posizione di equilibrio stabile, con una rotazione dello stesso segno di quella del piano d'appoggio.

Riferendomi alla figura, si vede che, se il centro di gravità è in G_1, per la rotazione β del piano di appoggio esso andrà in G_1', e l'angolo α corrispondente sarà G_1OG_2', maggiore di β. Se detto centro è in G_2, il cerchio passante per questo punto non può incontrare la verticale per C', e la bilancia trabocca del tutto.

Da ciò consegue un interessante modo di esagerare le rotazioni di un qualsiasi congegno. Basterà porre su di esso una bilancina costruita secondo i criterî già esposti, e tale che d sia notevolmente inferiore ad r, perchè alle rotazioni del congegno corrispondano rotazioni del giogo notevolmente ampliate. Si può riuscire così a svelare rotazioni di cui non sarebbe possibile accorgersi altrimenti, nemmeno col comune sistema di riflessione su di uno specchio attaccato al congegno ruotante. All'atto pratico, volendo realizzare una disposizione del genere molto sensibile, occorre adoperare anzichè un coltello, un cilindro levigato di acciaio, vetro o quarzo di 2 o 3 mm di diametro, di cui l'asse venga a costituire l'asse di oscillazione della bilancia.

Determinazione del raggio di curvatura del coltello. — Nella supposizione che realmente la curvatura del coltello sia costante (profilo circolare), è cosa facile determinarne il raggio. Fissata una data sensibilità della bilancia, si procede alla determinazione della distanza d del centro di gravità dal centro di oscillazione, mediante la nota formula:

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{P d g}}, \tag{2}$$

dove T è il periodo di oscillazione semplice, M il momento d'inerzia complessivo per il carico P (giogo e carichi laterali).

Indi, si inclina tutta la bilancia intorno ad un asse parallelo allo spigolo del coltello, per un angolo β determinabile con la riflessione di un raggio luminoso su di uno specchio *fissato al sostegno* della bilancia. Con ciò, un secondo raggio luminoso riflesso da uno specchio *fissato sul giogo*, darà la rotazione α di questo.

Le relazioni (1) e (2) ci dànno così il valore di r:

$$r = \pi^2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{M}{PT^2 g} .$$

Come esempio, riporto alcuni dati numerici ricavati dalle mie esperienze sulla gravitazione.

La bilancia adoperata ha le braccia lunghe $b = 13$ cm.; ha un giogo pesante 410 gr. Il carico delle due braccia è di gr. 2610 ; il peso totale è dunque $P = 3020$ gr. Il momento d'inerzia M, ottenuto scomponendo in varie parti il giogo con i suoi due carichi, è 472488 gr.cm^2. Si determinano le sensibilità s della bilancia corrispondenti a varie durate T di oscillazione. Queste due grandezze sono legate dalla relazione

$$s = aT^2 ,$$

dove a è una costante ; cioè. la sensibilità è proporzionale al quadrato della oscillazione, a parità di altre condizioni.

Esprimendo s in mm., osservati con raggio luminoso riflesso a 20 metri dal giogo, si trova con replicate osservazioni $a = 0{,}104$.

Da questa formula si ricavano i numeri della seconda colonna della seguente tabella, corrispondenti alle varie sensibilità indicate nella prima colonna :

s mm.	T secondi	d micron	α/β —	r micron
136	36.1	12,1	0,38	4.6
163	39,6	10,0	0.48	4.8
221	46,1	7,4	0.67	4,9
256	49,6	6,4	0.76	4,9
310	54,6	5,3	0,96	5,1
362	59.0	4,5	1,07	4,8

Tali numeri differiscono alquanto da quelli ottenuti con misura diretta delle durate di oscillazione, che non riporto. Ma ciò dipende da errori di

osservazione o da lievi incertezze del metodo. Siccome però la determinazione del coefficiente $a = 0{,}104$ risulta dalla media di un grandissimo numero di osservazioni, anche all'infuori della presente determinazione, così ho ritenuto più attendibili i numeri scritti nella seconda colonna della tabella.

I numeri della terza colonna si calcolano applicando la formula (2), dove tutto è conosciuto all'infuori della distanza d, che così si può ricavare. La quarta colonna indica i singoli rapporti α/β tra gli angoli di inclinazione del giogo e del piano di sostegno. Per tale determinazione, si inclina variamente, nel caso di ciascuna sensibilità, il sostegno; e ciò nel modo che sarà esposto in seguito (per una comune bilancia basterebbe manovrare le viti calanti). Si misura tale inclinazione (angolo β), osservando lo spostamento di un raggio luminoso riflesso dal sostegno; corrispondentemente si misura lo spostamento del raggio luminoso riflesso dal giogo, determinando così l'angolo α. Si è così constatato che per ogni sensibilità, il valore di α/β è costante. I valori riportati nella tabella rappresentano le medie di varie determinazioni (3 o 4) fatte con inclinazioni del giogo differenti per ogni sensibilità. La colonna ultima della tabella ci dà infine i valori di r (raggio di curvatura del coltello), calcolati volta per volta, al variare della sensibilità della bilancia. Ciò è stato possibile mediante la semplice relazione (1); e si vede, come con buona approssimazione, il raggio di curvatura risulta costante, rappresentando ciò una conferma esplicita della giustezza delle fatte ipotesi, circa la forma del coltello.

Riassumendo, si rileva che in conseguenza della curvatura non infinita del coltello centrale di una bilancia, si hanno due fatti importanti:

1° La sensibilità della bilancia non è costante al variare della inclinazione del giogo, se la detta curvatura non è costante.

2° Una variazione nella inclinazione del piano di appoggio del coltello può falsare le misure, poichè ad essa corrisponde una inclinazione del giogo variabile da caso a caso.

Di entrambe queste cause di errore, il cui studio ho voluto premettere, sarà tenuto conto nelle ricerche sperimentali sull'assorbimento gravitazionale che esporrò nelle prossime Note.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota I di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bagnera (1).

In una Nota recente (2) ho accennato alla rappresentazione di una funzione in serie di funzioni fondamentali dell'operazione

$$S[u(x)] = g(x)\,u(\alpha x) + \int_0^x N(x,s)\,u(s)\,ds + \int_0^{\alpha x} P(x,s)\,u(s)\,ds \quad (0<\alpha<1)$$

ed ho detto che tali serie sono più da assimilarsi a generalizzazioni di serie di potenze anzichè a generalizzazioni di serie di Fourier.

Mi propongo di avvalorare la mia asserzione con un esempio particolare.

1. Consideriamo la particolare operazione

$$S[u(x)] = u(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u(s)\,ds\,.$$

Essa ammette le funzioni fondamentali $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... corrispondenti alle costanti caratteristiche $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \ldots$, e cioè si ha in generale

$$\alpha^n u_n(x) = u_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u_n(s)\,ds\,. \tag{1}$$

La $u_n(x)$ si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime $n-1$ derivate ed è determinata a meno di una costante moltiplicativa, che fisseremo in modo che la derivata n^{esima} di $u_n(x)$ prenda il valore $n!$ per $x = 0$.

Dalla (1), derivando e dividendo per α, troviamo

$$\alpha^{n-1} u_n'(x) = u_n'(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} u_n'(s)\,ds\,,$$

quindi $u_n'(x)$ è il prodotto di $u_{n-1}(x)$ per una costante, e siccome per $x = 0$ la derivata $(n-1)^{ma}$ di $u_n'(x)$ prende il valore $n!$ abbiamo

$$u_n'(x) = n\,u_{n-1}(x)\,. \tag{1'}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

(2) *Sopra un'equazione funzionale*, Nota II. Questi Rendiconti, 2° sem. 1920.

Servendoci di questa relazione possiamo trovare lo sviluppo di $u_n(x)$ in serie di potenze di x quando sia noto quello di $u_0(x)$. Quest'ultimo si ottiene facilmente dalla (1) per $n = 0$. Ponendo $u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$, prenderemo $c_0 = 1$ e per $n > 0$ si dovrà avere

$$c_n = c_n \alpha^n + \frac{c_{n-1}}{n} \alpha^n,$$

come risulta dalla (1) eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri; quindi

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}$$

Dunque, l'espressione generale di $u_m(x)$ è la seguente funzione intera di x:

$$u_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^{n-m})} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Ciò si vede integrando successivamente $u_0(x)$ tra i limiti $(0, x)$ in base alla (1').

Per $\alpha = 0$, $u_m(x)$ si riduce ad x^m.

2. Supponiamo che una funzione $f(x)$ analitica regolare nelle vicinanze del punto $x = 0$, si possa sviluppare intorno a questo punto in una serie uniformemente convergente di funzioni u, cioè mettere sotto la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x).$$

Si può esprimere facilmente il coefficiente a_n per mezzo dei valori che prendono la funzione $f(x)$ e le sue prime n derivate nel punto $x = 0$. Dimostreremo che si ha;

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\alpha^k}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^k)} f^{(n-k)}(0).$$

Intanto la formola è vera per $n = 0$, perchè $f(0) = a_0$, e per $n = 1$, perchè

$$f'(x) = a_0 u_0'(x) + a_1 u_0(x) + 2a_2 u_1(x) + \cdots$$

e perciò $f'(0) = a_0 u_0'(0) + a_1$, ed essendo $u_0'(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, è

$$a_1 = f'(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f(0).$$

Ammettiamo vera la (2) fino ad a_n e dimostriamola per a_{n+1}.
Derivando $f(x)$ $n+1$ volte, troviamo:

$$f^{(n+1)}(x) = a_0\, u_0^{(n+1)}(x) + a_1\, u_0^{(n)}(x) + 2!\, a_2\, u_0^{(n-1)}(x) + \cdots$$

$$\cdots + (n+1)!\, a_{n+1}\, u_0(x) + (n+2)!\left(a_{n+2}\, u_1(x) + a_{n+3}\frac{u_2(x)}{2!} + \cdots\right),$$

e per $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = a_0\, u_0^{(n+1)}(0) + a_1\, u_0^{(n)}(0) + \cdots + (n+1)!\, a_{n+1}. \tag{3}$$

Tenendo conto delle espressioni di $a_0, a_1, \ldots a_n$, cerchiamo il coefficiente di $f^k(0)$ $(k \leq n)$ nella somma dei primi $n+1$ termini del secondo membro della (3). Esso è

$$\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r \frac{\alpha^r}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^r)}\, u_0^{(n-k-r+1)}(0). \tag{4}$$

Per $k \geq 1$, aggiungendo a questa somma un altro termine dedotto da quello generale facendo $r = n-k+1$, *otteniamo il prodotto di* $(n-k+1)!$ *per il coefficiente di posto* $n-k+2$ *nello sviluppo di* $u_0(x)$ in serie di funzioni u, ed essendo tale coefficiente nullo, concludiamo che la somma (4) è eguale a

$$-(-1)^{n-k+1}\frac{\alpha^{n-k+1}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-k+1})}. \tag{5}$$

Ora mostreremo che l'eguaglianza tra le due espressioni (4) e (5) sussiste anche per $k = 0$; ossia, tenendo conto del valore $u_0^{(n-r+1)}(0)$, dimostreremo che la differenza tra (4) e (5), cioè

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \frac{\alpha^r}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^r)} \cdot \frac{\alpha^{\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-r+1})}$$

è nulla.

Se dividiamo tutto per α^{n+1}, l'identità da dimostrare si riduce alla seguente:

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha)^r} \cdot \frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n+r-1})} = 0.$$

Denotiamo il primo membro con A_{n+1}: per le ipotesi fatte è $A_n = 0$.

Per $r > 1$ decomponiamo il numeratore 1 del primo fattore del termine corrispondente in A_{n+1} nelle due parti $1-\alpha^r$ ed α^r; A_{n+1} si potrà allora decomporre in due somme: la prima è A_n ed è nulla, rimane

$$\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r \frac{\alpha^r}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^r)} \cdot \frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r+1})}.$$

Per $r \leq n$ il secondo fattore del termine generico di questa somma si può decomporre nella somma di queste due parti:

$$\frac{\alpha^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r})}, \quad \frac{\alpha^{\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-r+1})},$$

ed allora A_{n+1} si decompone in due parti: una è $A_n \alpha^n$ e l'altra $A_{n+1}\alpha^{n+1}$. Abbiamo così $A_{n+1} = A_{n+1}\alpha^{n+1}$, $A_{n+1} = 0$. Dalla (3) ricaviamo così

$$f^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k+1}\frac{\alpha^{n-k+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-k+1})} f^{(k)}(0) + (n+1)!\, a_{n+1},$$

cosicchè la (2) è vera anche per il coefficiente a_{n+1}.

3. In seguito sarà dimostrato che una funzione analitica regolare all'interno di un cerchio avente centro nell'origine si sviluppa in serie di funzioni u che converge uniformemente in qualunque regione *interna* al cerchio.

Avremo in particolare in tutto il piano, in base all'espressione di a_n per $f(x) = 1$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}, \tag{6}$$

e da questa, per derivazione, si ottiene lo sviluppo di $u_0'(x)$:

$$u_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n+1})} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}. \tag{7}$$

Ed ora siamo in grado di dare una formola che presenta una grande analogia con quella di Maclaurin.

Sia $f(x)$ una funzione reale che ammetta derivate fino all'ordine n in ogni punto dell'intervallo $(0, x)$, $x > 0$.

Poniamo

$$f(x) = f(0)\,u_0(x) + \left[f'(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}f(0)\right]u_1(x) + \cdots \tag{8}$$

$$\cdots + \left[f^{(n-1)}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}f^{(n-2)}(0) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^{n-1})}f(0)\right] \times$$

$$\times \frac{u_{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{u_\nu(x)}{\nu}\,\mathrm{H}(x),$$

con ν intero positivo.

Si denoti con $\mathrm{F}(z)$ la funzione che si ottiene cambiando nel secondo membro l'argomento x di ciascuna delle u in $x - z$, ed in z l'argomento

o della f e delle sue derivate. Si ha $F(0) = F(x) = f(x)$, quindi la derivata di $F(z)$ si annulla in un punto ξ interno all'intervallo $(0, x)$.

Ora si trova facilmente

$$F'(z) = \left[f^{(n)}(z) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(z) + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)^n} f(z) \right] \times$$

$$\times \frac{u_{n-1}(x-z)}{(n-1)!} - u_{\nu-1}(x-z)\, H(x) - f(z)\, g_n(x-z),$$

dove con $g_n(x)$ denotiamo la somma dei termini dello sviluppo di $u_0'(x)$ a partire dall'$(n+1)^{mo}$.

Da $F'(\xi) = 0$ ricaviamo la seguente espressione per il resto $\frac{u_\nu(x)}{\nu} H(x)$ della formola (8)

$$\left[f^{(n)}(\xi) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(\xi) + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} f(\xi) \right] \times$$

$$\times \frac{u_{n-1}(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_\nu(x)}{\nu(n-1)!} + f(\xi) \frac{g_n(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_\nu(x)}{\nu}.$$

Mostriamo che l'ultima parte di questo resto tende a zero al tendere di n ad ∞.

Si ha $u_m(x) > x^m$; poi, essendo

$$u_m(x) = m \int_0^x (x-\xi)^{m-1} u_0(\xi)\, d\xi$$

abbiamo $u_m(x) < x^m u_0(x)$, quindi

$$\left| \frac{g_n(x)}{u_{\nu-1}(x)} \right| < \frac{|g_n(x)|}{x^{\nu-1}}.$$

Ma

$$|g_n(x)| < \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{u_m(x)}{m!} <$$

$$< u_0(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^m}{m!};$$

quindi

$$\left| \frac{g_n(x)}{u_{\nu-1}(x)} \right| < u_0(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^{m-\nu+1}}{m!}.$$

La diseguaglianza si rafforza se al primo membro si mette $x - \xi$ al posto di x; quindi

$$\left| \frac{g_n(x-\xi)}{u_{\nu-1}(x-\xi)} u_\nu(x) \right| < u_0^2(x) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{m+1})} \cdot \frac{x^{m+1}}{m!}$$

ed il secondo membro tende a zero al tendere di n ad ∞.

Per $v = n$ si ha la seguente forma del resto:

$$\left[f^{(n)}(\xi) - \frac{\alpha}{1-\alpha} f^{(n-1)}(\xi) + \cdots (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} f(\xi) \right] \frac{u_n(x)}{n!} + \\ + f(\xi) \frac{g_n(x-\xi)}{u_{n-1}(x-\xi)} \cdot \frac{u_n(x)}{n},$$

che è analoga a quella di Lagrange nella formola di Maclaurin.

Da essa deduciamo che se $f(x)$ ammette derivate di qualunque ordine ed $f^{(n)}(\xi)$ si mantiene limitata qualunque sieno n e ξ in $(0, x)$, $f(x)$ si può sviluppare in serie di funzioni $u(x)$, perchè il resto tende a zero. Infatti, il valore assoluto della prima parte del resto non supera

$$A\, u_0(x) \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \cdots + \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)^n} \right) \frac{x^n}{n!} = \\ = A\, u_0(x) \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \frac{x^n}{n!}$$

con A costante, e quest'ultima espressione tende a zero al tendere di n ad ∞. Così, p. es., troviamo subito lo sviluppo di e^{-x}:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}. \tag{9}$$

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea.* Nota II del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone (1).

4. Per determinare il limite del secondo membro della (4), osserviamo che le funzioni α, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, si annullano su tutta la caratteristica $y = y_0$, e quindi anche nei punti A e B, che $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, negli stessi punti, diventano infinite di ordine $\frac{1}{2}$, mentre $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ ha un infinito di ordine $\frac{3}{2}$. La ricerca del limite propostoci si riduce quindi alla ricerca del limite:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{s(y_0-\varepsilon)} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^3} u\, dy. \ (2)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1921.

(2) È chiaro che l'esistenza di questo limite risulta senz'altro da quanto precede. Si noti che $\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$ tende, in A e B, a infinito di ordine maggiore d'uno, cambiando però infinite volte di segno.

Per raggiungere questo scopo, introduciamo la funzione:

$$(7)\qquad \beta(x\,,\,y\,;\,x_0\,,\,y_0) = -(x_0 - x)\int_0^{\frac{x_0-x}{2\sqrt{y_0-y}}} (\operatorname{sen}\varphi^2 + \cos\varphi^2)\,d\varphi + \\ + \sqrt{y_0 - y}\left(\operatorname{sen}\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)} - \cos\frac{(x_0-x)^2}{4(y_0-y)}\right),\ (y_0 > y)\,,$$

ove, ancora, intendiamo il radicale sia preso positivamente. Come subito si vede, è

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\,,$$

e, quindi, con una integrazione per parti, abbiamo subito,

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{s(y_0-\varepsilon)} \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\,u\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(u_A + u_B) + \\ + \int_{s(y_0)}\left[\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\,u - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right].$$

Gl'integrali a secondo membro sono ora integrali propri, poichè $\frac{\partial\beta}{\partial x}$ è finita in A e B, mentre $\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}$ diventa infinita, in questi stessi punti, di ordine $\frac{1}{2}$. Risulta così determinato il limite del secondo membro della (6). Se poi si nota che tra le funzioni α e β sussiste anche la relazione

$$(10)\qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,,$$

nel limite anzidetto, i termini

$$\int_{s(y_0)} \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\,u\,dx\,,\ -\int_{s(y_0)} \frac{\partial\alpha}{\partial y}\,u\,dx\,,$$

si elidono. Inoltre, per ottenere una maggiore simmetria nelle formule definitive, abbiamo, ancora in conseguenza della (8), e con una nuova integrazione per parti:

$$(11)\qquad \int_{s(y_0)} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\,dy\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{[x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \right.$$

$$\left. + [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B\right\} - \int_{s(y_0)} \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dy\right).$$

Riunendo tutti i precedenti risultati, e posto, per brevità:

$$(12)\qquad H(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s(y_0)} \left[\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) dy\right],$$

otteniamo, infine:

$$(13)\qquad 2\,u(x_0, y_0) = u_A + u_B + [x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A +$$

$$+ [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B + H(x_0, y_0).$$

La (13) sussiste, se $0 \equiv (x_0, y_0)$ è interno al segmento AB. Se 0 è fuori del segmento stesso, si dimostra, similmente, la formula:

$$(14)\qquad 0 = u_A - u_B + [x_0 - \xi_1(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A -$$

$$- [x_0 - \xi_2(y_0)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B \pm H(x_0, y_0),$$

ove si deve scegliere il segno $\pm$ secondochè $x_0 > \xi_2(y_0)$, o $x_0 < \xi_1(y_0)$.

5. Come nella formula del Volterra, relativa all'equazione del calore, nella (13) compaiono, oltre alle funzioni al contorno, che determinano la soluzione della equazione differenziale, altre funzioni, che occorre eliminare, se ci proponiamo di risolvere, per l'equazione stessa, il problema di Cauchy, corrispondente al contorno considerato. Si riconosce facilmente, che tale eliminazione si può effettuare, come nella formula citata del Volterra, se il contorno s ha forme speciali, e negli stessi casi dal Volterra contemplati.

Matematica. — *Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite.* — Nota II del dott. ALBERTO BEDARIDA, presentata dal Socio L. BIANCHI (1).

3. *Conclusioni.* I risultati precedenti ci hanno permesso di scrivere le seguenti relazioni, che formano l'oggetto delle attuali ricerche.

a) *Siano* $h(\Delta)$ *ed* $h(\Delta\mu\mu_0)$ $(\Delta < 0 \neq -1)$, *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *e primitive di prima specie, siano inoltre* $h_1(\Delta)$ *ed* $h_2(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, a determinante* Δ, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2 *e* G_4. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ, *nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *si hanno le seguenti relazioni:*

α) *Sia* μ *un numero primo razionale* p, $(p \equiv 3 (mod.\ 4))$, *sarà: se* $\Delta \equiv 0 (mod.\ p)$,

$$h(\Delta p^2) = p^2 h_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h_2(\Delta);$$

se $\Delta \not\equiv 0 (mod.\ p)$,

$$\text{per } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1\ ,\ h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta),$$

$$\text{per } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1\ ,\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2] h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h_2(\Delta);$$

β) *Sia* μ *un numero primo complesso (dispari)* π, $(N(\pi) = q \equiv 1 (mod.\ 4))$, *sarà: se* $\Delta \equiv 0 (mod.\ q)$,

$$h(\Delta q) = q h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h_2(\Delta);$$

se $\Delta \not\equiv 0 (mod.\ q)$,

$$h(\Delta q) = q h_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h_2(\Delta);$$

ed inoltre,

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1921.

b) Siano $h'(\Delta)$ *ed* $h'(\Delta\mu\mu_0)$, $(\Delta < 0 \; e \neq -2, -3; \; \Delta \equiv 1, 2 \pmod 4)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *e primitive di seconda specie; siano inoltre* $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ *ed* $h'_3(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) aritmetiche di Hermite, a determinante* Δ, *primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4, G_6. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ, *nel corpo* $K(\sqrt{-1})$, *si hanno le seguenti relazioni:*

α) sia μ *un numero primo razionale* p, $(p \equiv 3 \pmod 4)$, *e* $\neq 3$, *sarà: se* $\Delta \equiv 0 \pmod p$,

$$h'(\Delta p^2) = p^2 h'_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{p^2+2}{3} h'_3(\Delta) ;$$

se $\Delta \not\equiv 0 \pmod p$,

$$per \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \; (p \equiv 1 \pmod 3) \; , \; h'(\Delta p^2) = (p-1)^2 h'_1(\Delta) + \\ + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta) .$$

$$per \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \; (p \equiv 2 \pmod 3) \; , \; h'(\Delta p^2) = ((p-1)^2 - 2) \, h'_1(\Delta) + \\ + \frac{(p-1)^2}{2} h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2 - 1}{3} h'_3(\Delta) ;$$

β) sia μ *un numero primo complesso (dispari)* π, $(N(\pi) = q \equiv 1 \pmod 4)$, *sarà: se* $\Delta \equiv 0 \pmod q$, $(q \equiv 1 \pmod 3)$:

$$h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{q+2}{3} h'_3(\Delta) ;$$

se $\Delta \not\equiv 0 \pmod q$,

$$per \; q \equiv 1 \pmod 3 \qquad h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \\ + \left[\frac{q+2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta) ,$$

$$per \; q \equiv 2 \pmod 3 \qquad h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \\ + \frac{q+1}{3} h'_3(\Delta) ,$$

ed inoltre,

$$h'(\Delta) = h_1'(\Delta) + h_2'(\Delta) + h_3'(\Delta)\ (^1).$$

Quanto si è sopra esposto formerà l'oggetto di una Memoria, in cui sarà pure esaminato il caso delle forme indefinite di Hermite ($\Delta > 0$).

Noi ritorneremo, inoltre, sopra questi studî, coll'intendimento di estenderli al caso di un corpo quadratico (immaginario) generale e per esaminare se, eventualmente, esiste un legame tra i nostri risultati e quelli ottenuti recentemente da Humbert, sopra queste forme, con l'Aritmetica analitica.

Matematica. — *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* Nota III del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques (²).

5. Quanto alla *identità birazionale* di due superficie ellittiche F ed F', di cui abbiamo trattato nelle nostre precedenti Note del 3 e del 17 aprile, ciascuna delle quali abbiamo visto (seconda Nota, § 3) esser data da equazioni del tipo (3) o del tipo (4), è chiaro che tale identità dipende dall'essere simili i sistemi di sostituzioni che subiscono i punti $P_1 P_2 \dots P_n$ della F, ed i punti $P_1' P_2' \dots P_n'$ della F', omologhi di un medesimo P del cilindro Φ, quando P si muova descrivendo comunque un cammino C_i sopra la varietà riemanniana del cilindro Φ: dovranno quindi anzitutto essere birazionalmente identiche le curve K della F alle K' della F', e coincidere le curve di diramazione $z = k_i$. Ma ciò non è sufficiente, potendosi avere due *superficie distinte* anche quando siano *identiche* le *curve* corrispondenti alle sezioni del cilindro coi piani $z =$ cost., e anche quelle corrispondenti alle generatrici del cilindro stesso. Per completare la condizione di identità esaminiamo particolarmente i due casi.

a) Nel *caso ciclico*, se si hanno due superficie F ed F' identiche, date da $\sqrt[n]{\psi\theta}$ e $\sqrt[n]{\psi'\theta'}$, avendosi come sezioni $z =$ cost. due curve K e K' identiche, relative a terne di punti critici apparenti, D e D', con $D' + (h-1)T \equiv hD$, essendo $\alpha' = \alpha^h$, $\beta' = \beta^h$, dovrà essere $\theta'(z) = \theta^h(z)$, o più generalmente (le radici di θ e θ' avendo una moltiplicità minore di n) $\theta^h = \theta' \bar{\theta}^n$: pertanto, ove sia $\theta' = \theta$, sarà $h = 1$, cioè *le terne di punti*

(¹) Si noti che i coefficienti di $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$, $h_1'(\Delta)$, $h_2'(\Delta)$, $h_3'(\Delta)$ in tutte le relazioni precedenti sono interi (razionali). Nel risultato *b*) il caso $p = 3$ offre analoghe relazioni, che, per brevità, non scriviamo.

Inoltre osserviamo che i numeri $h_1(\Delta)$, $h_1'(\Delta)$ ed $h_3'(\Delta)$ in alcuni casi possono essere tutti nulli, in altri sono tali soltanto alcuni di essi; invece $h_2(\Delta)$ ed $h_2'(\Delta)$ sono sempre, come è ben naturale, diversi da zero.

(²) Pervenuta il 17 aprile 1921.

critici apparenti dovranno essere non solo simili, ma equivalenti. E ciò è anche sufficiente per l'identità birazionale delle F ed F′ cicliche.

b) Per l'esame del *caso non ciclico* occorre riprendere in esame la condizione di identità delle curve (2), mettendone in evidenza l'*aspetto aritmetico*, e a tal uopo premettere un'osservazione relativa ai gruppi abeliani.

Siano τ_1 e τ_2 due operazioni del nostro gruppo abeliano G definito da π_1 e π_2, ed abbiano gli stessi periodi, $\nu_1 = \varrho\nu_2$ e ν_2, di π_1 e π_2: sarà

$$\tau_1 = \pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}, \tau_2 = \pi_1^{b_1}\pi_2^{b_2},$$

dove a_1 sarà primo con ϱ e b_1 multiplo di ϱ: $b_1 = \varrho\bar{b}_1$.

Diciamo che *la condizione affinchè* τ_1 e τ_2 *generino l'intero* G (cioè abbiano effettivamente i periodi ν_1 e ν_2 e siano indipendenti) *è che il determinante*

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

sia primo con ν_2.

La condizione è sufficiente: infatti, se τ_1 e τ_2 non generassero tutto G, si avrebbero due numeri h e k non multipli contemporaneamente l'uno di ν_1 e l'altro di ν_2, tali che $\tau_1^h\tau_2^k \equiv 1$, il che porta (data l'indipendenza di π_1 e π_2) $ha_1 + kb_1 \equiv 0$ mod. ν_1, e $ha_2 + kb_2 \equiv 0$ mod. ν_2, dalla prima delle quali relazioni (essendo $\nu_1 = \varrho\nu_2$, $b_1 = \varrho\bar{b}_1$ ed a_1 primo con ϱ) segue che h è multiplo di ϱ: $h = \varrho\bar{h}$; si ha così contemporaneamente

$$\bar{h}a_1 + k\bar{b}_1 \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2 \text{ e } \varrho\bar{h}a_2 + kb_2 \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2,$$

da cui segue

$$\bar{h}(a_1b_2 - \varrho a_2\bar{b}_1) \equiv k(\varrho a_2\bar{b}_1 - a_1b_2) \equiv 0 \text{ mod. } \nu_2:$$

cioè, essendo $b_1 = \varrho\bar{b}_1$ ed $\bar{h} = \dfrac{h}{\varrho}$ non multiplo di ν_2 insieme con k, dovrà $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ avere un divisore comune con ν_2.

Viceversa si supponga che Δ e ν_2 abbiano un divisore comune δ, e si osservi che in tale ipotesi

$$\tau_1^{\frac{\nu_2 b_1}{\delta}}\tau_2^{-\frac{\nu_2 a_1}{\delta}} = \pi_2^{\frac{\nu_2}{\delta}(a_2b_1 - a_1b_2)} = 1.$$

Ciò posto: o δ divide contemporaneamente a_1 e b_1, e allora è chiaro che τ_1 e τ_2 non generano tutto G ma solo le operazioni del tipo $\pi_1^{\delta r}\pi_2^s$; o invece δ non divide contemporaneamente a_1 e b_1, e allora l'eguaglianza precedente dice che τ_1 e τ_2 non sono indipendenti o hanno periodi minori di ν_1 e ν_2, sicchè in ogni caso non generano l'intero G.

Ora è noto (ed è chiaro) che, se τ_1 e τ_2 hanno i periodi ν_1 e ν_2 e sono indipendenti, esiste una sostituzione che trasforma contemporaneamente π_1 e

π_2 in τ_1 e τ_2: pertanto, se a un cammino C_i, percorso da P sulla riemanniana di φ, corrisponde la sostituzione $\pi_1^{r_i}\pi_2^{s_i}$ per una certa funzione

$$X = \sqrt[\nu_1]{\psi_1} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2},$$

e per un'altra

$$X' = \sqrt[\nu_1]{\psi_1'} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'}$$

corrisponde la sostituzione

$$\tau_1^{r_i}\tau_2^{s_i} = \pi_1^{a_1 r_i + b_1 s_i}\pi_2^{a_2 r_i + b_2 s_i},$$

avendosi $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ primo con ν_2 (a_1 primo con $\varrho = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ e b_2 divisibile per ϱ), le due funzioni X ed X' sono birazionalmente identiche; ed è facile a riconoscersi che sono identiche solo in questo caso.

Ora le due sostituzioni π_1 e π_2 consistono nel moltiplicare i due radicali d'ordine ν_1 e ν_2, che figurano in X rispettivamente per $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{\nu_1} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{\nu_1}$ e per $\varepsilon_2 = \cos\frac{\pi}{\nu_2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{\nu_2}$, onde le stesse sostituzioni $\tau_1^{r_i}\tau_2^{s_i}$ sono presentate dalla funzione

$$\sqrt[\nu_1]{\psi_1'\overline{\psi}_1^{\nu_1}} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'\overline{\psi}_2^{\nu_2}} \qquad \text{e dalla} \qquad \sqrt[\nu_1]{\psi_1^{a_1}\psi_2^{b_1}} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2^{b_2}\psi_1^{a_2}};$$

quindi, ove si prendano come $\overline{\psi}_1 = 0$ e $\overline{\psi}_2 = 0$ due curve d'ordine $a_1 + b_1 - 1$ e $b_2 + a_2 - 1$, i gruppi dei punti di contatto ν_1 — *punto* e ν_2 — *punto* di $\psi_1'\overline{\psi}_1^{\nu_1} = 0$ e $\psi_2'\overline{\psi}_2'^{\nu_2} = 0$ con la $\varphi = 0$ sono equivalenti a quelli delle $\psi_1^{a_1}\psi_1^{b_1} = 0$ e $\psi_2^{b_2}\psi_1^{a_2} = 0$ (giacchè dalle serie cui appartengono i gruppi di contatto dipendono le sostituzioni subìte dai radicali).

Pertanto, indicati con D_1, D_2, D_1', D_2', le terne di contatto delle $\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2'$, e con T la terna segata da una retta, saranno

$$(5)\quad a_1 D_1 + b_1 D_2 \equiv D_1' + (a_1 + b_1 - 1)T\,;\; a_2 D_1 + b_2 D_2 \equiv D_2' + (a_2 + b_2 - 1)T$$

le condizioni perchè le X, X' siano identiche.

Analogalmente a quanto è stato fatto nel caso ciclico, definiremo come *simili* (rispetto ai numeri ν_1 e ν_2) le coppie di gruppi D_1 e D_2, D_1' e D_2', soddisfacenti alle (5).

Passando ora dalle curve alle superficie, si consideri una superficie F' data da

$$(4')\quad \begin{cases} X' = \sqrt[\nu_1]{\psi_1'\theta_1'} + \sqrt[\nu_2]{\psi_2'\theta_2'} \\ Y = y\ ,\ Z' = z \end{cases} \qquad \varphi(xy) = 0 \quad (\nu_1 = c\nu_2)$$

birazionalmente identica alla F data dalle (4). Per le sezioni $z = \text{cost.}$ dovranno anzitutto essere soddisfatte le condizioni di similitudine (5), le quali dicono che le sostituzioni sui punti di F′ (cioè sui valori dei radicali della sua equazione) relative ai cicli C_i si ottengono dalle analoghe sui punti di F, cambiando

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ in } \tau_1 = \pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2} \text{ e } \tau_2 = \pi_1^{b_1}\pi_2^{b_2};$$

questo dunque dovrà accadere oltre che per i cicli C_i non nulli, anche per cicli avvolgenti le superficie di diramazione date (sulla varietà riemanniana del cilindro Φ) dalle equazioni

$$\theta_1(z) = 0 \ , \ \theta_2(z) = 0 \ , \ \theta_1'(z) = 0 \ , \ \theta_2'(z) = 0 \, .$$

Il polinomio θ_1' dovrà dunque differire da $\theta_1^{a_1}\theta_2^{b_1}$ per un fattore $\overline{\theta}_2$ elevato all'esponente ν_1, e l'analogo dicasi per θ_2'; dovrà cioè essere

$$\theta_1^{a_1}\theta_2^{b_1} = \theta_1'\overline{\theta}_1^{\nu_1} \ , \ \theta_2^{b_2}\theta_1^{a_2} = \theta_2'\overline{\theta}_2^{\nu_2} \, ,$$

Riassumendo, *le condizioni perchè due superficie* F *ed* F′ *rappresentate dalle* (4) *e* (4′) *riescano birazionalmente identiche sono che*:

1°) *le coppie dei gruppi di contatto delle curve* $\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2'$, *siano simili*, soddisfacendo alle relazioni

$$a_1 D_1 + b_1 D_2 \equiv D_1' + (a_1 + b_1 - 1)T \, , \ a_2 D_1 + b_2 D_2 \equiv D_2' + (a_2 + b_2 - 1)T,$$

avendosi a_1 primo con $\varrho = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, b_1 divisore di ϱ, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ primo con ν_2;

2°) *esistano due polinomi* $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ *tali che* $\theta_1^{a_1}\theta_2^{b_1} = \theta_1'\overline{\theta}_1^{\nu_1}$, $\theta_2^{b_2}\theta_1^{a_2} = \theta_2'\overline{\theta}_2^{\nu_2}$.

In *particolare*, ove si voglia, $\theta_1 = \theta_1'$, $\theta_2 = \theta_2'$, dovremo avere:

$$a_1 = 1 \ , \ b_1 = 0 \ , \ b_2 = 1 \ , \ a_2 = 0 \ ,$$

sicchè le *terne dei punti di contatto* di ψ_1 e ψ_1', ψ_2 e ψ_2' *debbono essere equivalenti.*

NOTA. I risultati esposti sono stati ottenuti poggiando sul teorema di *Abel*, che dà la definizione trascendente delle serie lineari: ai risultati stessi si potrebbe pervenire per via analitica in base ai teoremi delle trasformazioni delle funzioni ellittiche, o anche per via puramente algebrica, partendo dal teorema d'esistenza, usando le formule numerative inerenti alla divisione delle serie, ed osservando che $\sqrt[n]{\psi_1}$ e $\sqrt[n]{\psi_1^h}$ dànno lo stesso irrazionale ove sia h primo con n. Ma non crediamo necessario diffonderci qui su questa seconda via.

Fisica matematica. — *Una nuova teoria dello spostamento delle linee spettrali.* Nota di Giulio Krall, presentata dal Socio T. Levi-Civita (1).

La teoria generale di relatività dà il mezzo per calcolare la variazione apparente che un campo gravitazionale produce sulla frequenza di un oscillatore.

Allo stesso risultato si può pervenire in modo elementare, associando alle nozioni fondamentali dell'ottica e della meccanica classica unicamente i due postulati di materializzazione e di quantizzazione dell'energia. Così il problema viene posto sotto un aspetto accessibile all'intuizione diretta.

Infatti, consideriamo un oscillatore atomico che, tanto per fissare le idee, si trovi sul sole. Esso emette, ogni qualvolta un elettrone passa da un'orbita possibile ad un'altra, una quantità di energia data da:

$$h\nu = \varepsilon_m - \varepsilon_n \tag{1}$$

La (1) esprime la condizione di frequenza di Bohr; ε_m ed ε_n rappresentano i valori dell'energia dell'elettrone nelle due orbite possibili, h la costante universale di Plank e ν la frequenza.

Per il principio di materializzazione dell'energia, la massa del quanto sarà data da:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

dove c è la velocità della luce.

Allorchè questo quanto dovrà raggiungere l'osservatore posto a distanza infinita, o almeno tale che il valore del potenziale possa essere praticamente considerato nullo, la sua energia di posizione, ossia il potenziale (il che è quanto dire la funzione potenziale cambiata di segno) si troverà incrementata di

$$\mathrm{K}\frac{m\mathrm{M}}{r} = \mathrm{K}\frac{h\nu}{rc^2}\mathrm{M}$$

se K è la costante di Newton, r il raggio del sole, M la sua massa.

Ammettiamo, poichè una tale ammissione ci sembra naturale e spontanea,

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1921.

che non ci sia differenza qualitativa fra questa energia (di posizione) addizionale e la energia $h\nu$ che il quanto possedeva sul Sole. Sicchè quando il quanto sarà giunto a distanza infinita, un osservatore che ne misurasse l'energia, la troverebbe uguale a:

$$h\nu + \mathrm{K}\frac{h\nu}{rc^2}\mathrm{M}$$

e potrebbe argomentare che il campo gravitazionale à modificata la frequenza dell'oscillatore in modo da ridurla ad un valore:

$$\nu_0 > \nu$$

che la semplice equazione

$$h\nu_0 = h\nu + \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}}{r}\frac{h\nu}{c^2}$$

gli può fornire. Da questa infatti si ottiene

$$(2_a) \qquad \nu_0 = \nu\left(1 + \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}}{rc^2}\right),$$

e chiamando il potenziale $-\mathrm{K}\frac{\mathrm{M}}{r}$ con φ_a, segue:

$$(2_b) \qquad \nu_0 = \nu\left(1 - \frac{\varphi_a}{c^2}\right) \cdots$$

Il valore $\frac{\nu - \nu_0}{\nu} = -\mathrm{K}\frac{\mathrm{M}}{rc^2}$ che si ottiene dalla (2_a) coincide con quello calcolato da Einstein.

Concludendo vediamo come applicando il principio di materializzazione e di conservazione dell'energia, unitamente alla teoria dei quanti che domina il modello atomico di Bohr, siamo giunti al risultato che un campo gravitazionale modifica la frequenza di un oscillatore relativamente ad un osservatore che si trovi in punto dello spazio per il quale il potenziale del campo assuma un valore differente da quello che è nel punto in cui si trova l'oscillatore.

Notiamo che se il potenziale nel punto in cui si trova l'atomo à il valore φ_a, e quello assunto nel punto in cui si trova l'osservatore è φ_o, l'espressione più generale per la frequenza è data da:

$$\nu_0 = \nu\left(1 - \frac{\varphi_a - \varphi_o}{c^2}\right)$$

che per $\varphi_o = 0$ ricade nella (2_b).

Chimica. — *Nuovo metodo di dosaggio dell'arsenico negli acciai* (1). Nota di C. Mazzetti e P. Agostini, presentata dal Corr. N. Parravano (2).

Per il dosaggio dell'arsenico negli acciai sono stati proposti numerosi metodi i quali suggeriscono di operare sostanzialmente nell'una o nell'altra delle due maniere seguenti:

1°) precipitare l'arsenico allo stato di solfuro e pesarlo come tale o come piroarseniato di magnesio;

2°) separare l'arsenico per distillazione allo stato di cloruro e dosarlo o volumetricamente con iodio o $KBrO_3$, oppure per pesata come piroarseniato o solfuro.

Il metodo di dosaggio più generalmente usato nelle acciaierie è quello riportato da Ledebur: si scioglie l'acciaio in acido nitrico, si evapora a secco la soluzione, si arroventa il residuo fino a che non si sviluppano più fumi rossi di ipoazotide, si riprende con HCl, si addiziona il liquido di KBr e solfato di idrazina e si distilla. Nel distillato si dosa l'arsenico con $KBrO_3$ e metilarancio come indicatore.

Oltre il solfato di idrazina, varie altre sostanze sono state consigliate come riducenti dell'arsenico, così il solfato ferroso (3), il cloruro ferroso (4), il cloruro rameoso (5), e recentemente anche il rame (6).

Questo procedimento che, nelle mani di un analista sperimentato, dà ottimi risultati, presenta però degli inconvenienti.

Anzitutto le varie manipolazioni immobilizzano per troppo tempo l'operatore, e, in secondo luogo, nel riprendere con acido cloridrico il residuo arroventato si possono avere facilmente perdite di arsenico.

E ciò senza tener conto che volendo rinunciare, come sempre si fa, a pesare l'arsenico, la titolazione con $KBrO_3$ consigliata da Györy (7) e gene-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1921.
(3) Blair, Chemical Analysis of Jron, 8ª edizione, p. 194.
(4) Brearley-Borvin, Béranger, 1905, p. 145.
(5) Villavecchia, Chim. anal. applicata. vol. 1, p. 240.
(6) Compagno, Giorn. di Chim. Ind. ed appl. II, 1920, 493.
(7) Zeit. analyt. Ch. 32, 415.

ralmente oggi adoperata, presenta l'inconveniente di dosare qualunque altra sostanza riducente che eventualmente possa trovarsi presente nel liquido da saggiare.

Si è pensato perciò di sostituire a questo metodo un altro che offra una maggiore sicurezza di risultati e sia più facile e spedito a eseguirsi. Tralasciando i documenti analitici che giustificano il nostro modo di operare — e che saranno esposti dettagliatamente altrove — ci limiteremo quì ad indicare senz'altro il nuovo metodo di dosaggio che noi proponiamo.

Gr. 10 di truccioli di acciaio si trattano con 80 cc. di acqua regia (1 acido nitrico + 3 acido cloridrico) che vengono aggiunti a piccole porzioni. Si opera in capsula di porcellana coperta da vetro. Compiuta la soluzione si porta a secco su bagno di sabbia), si riprende il residuo con 60-80 cc. di acido cloridrico, si filtra il liquido attraverso crogiuolo di Gooch per separare silice e carbone, si travasa il liquido in una bevuta da 500 cc. e si aggiungono circa 75 cc. di reattivo di Bettendorf (400 gr. di $SnCl_2$. $2H_2O$ in 1000 di HCl di densità 1,18).

Si chiude la beuta con pera di Kjehldall e la si porta a b. m. mantenuto ad una temperntura fra i 40 e 50°. Si lascia la beuta a caldo fino a che tutto l'arsenico si sia depositato nel fondo. Si filtra attraverso filtro Berzelius con leggera aspirazione e si lava con acqua fino a scomparsa della reazione del ferro. Si asporta il filtro dall'imbuto e lo si introduce in un matraccio da 100 cc. in cui sono contenuti 20-30 cc. di acqua. Si dibatte il liquido in maniera da spappolare bene il filtro.

Si aggiungono 10-15 cc. di J N/10, si porta, agitando, l'As in soluzione e si titola in presenza di fosfato o di bicarbonato fino a colorazione violetto-rosea con salda d'amido ([1]) (yellowish-pink).

Le prove sono state fatte con due metalli Standard inglesi, un acciaio ed una ghisa ematite, ed un acciaio di cui si è determinato per confronto il contenuto in As col metodo di Ledebur.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

([1]) Washburn, Am. Chem. Soc. 30–43 (1908).

Tipo del campione		As trovato	As % trovato	As % nominale	Differenza
Acciaio basico	Standard	0.0140	0 140	0.140	
» »	Standard	0 0143	0.143	0.140	+ 0 003
Ghisa ematite	Standard	0.0051	0.051	0.042	+ 0.009
» »	Standard	0.0050	0.050	0.042	+ 0.008
» »	Standard	0.0050	0.050	0.042	+ 0.008
				Titolazione Ledebur	
Acciaio a 0,10 di C.		0.0090	0.090		
» » »		0.0095	0 095	0.093	
» » »		0.0096	0 096	0.095	
» » »		0.0094	0.094		

Come si vede i risultati non potrebbero essere più concordanti e noi crediamo perciò di poter proporre l'uso del nostro metodo accanto, e in molti casi a preferenza, di quello di Ledebur.

Chimica. — *Carvomentoli levogiri dal fellandrene* (1). Nota II del dott. Vincenzo Paolini, presentata dal Corrisp. A. Peratoner (2).

L'α-fellandrene (3), che servì da materiale di partenza per le mie ricerche, aveva le seguenti costanti:

p. eb. 75° a 15 mm; $d_{15°} = 0{,}848$; $n_{D_{20}} = 1{,}4769$; $\alpha_D = -81° 30'$

vale a dire presentava tutti i caratteri del fellandrene che si ricava per distillazione frazionata dell'olio di Eucalyptus amygdalina (4).

Nitrosito di α-fellandrene. — Gr. 100 di fellandrene disciolti in 550 cc. di ligroino si versano in un vaso di vetro sottile sopra una soluzione di 37 gr. di acido solforico in 150 cc. di acqua, e si raffredda molto bene. Mentre si mantiene il contenuto del vaso in leggiera agitazione, si fanno arrivare al fondo, molto lentamente, gr. 230 di una soluzione di nitrito sodico al 44 %.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-Farmaceutico nella R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1921.

(3) Colgo l'occasione per ringraziare sentitamente la Casa Schimmel e C. di Lipsia che disinteressatamente mise a mia disposizione una notevole quantità di materiale di ricerca.

(4) Die ätherischen Oele - II Auflage von E. Gildemeister, pag. 340.

L'operazione dura circa un'ora ed un quarto. Il precipitato voluminoso viene raccolto, ben lavato, e purificato col metodo descritto dal Wallach (1), per precipitazione con alcool metilico da una soluzione molto concentrata in cloroformio. Si presenta in cristalli aghiformi, completamente bianchi, fusibili a 105°, dotati di tutti gli altri caratteri fisici del nitrosito del α-fellandrene.

Nitro- α*. fellandrene* (2). — Gr. 10 di nitrosito di fellandrene vengono introdotti poco a poco in una soluzione ben raffreddata di potassa alcoolica, fatta con gr. 10 di idrato potassico, gr. 10 di acqua, cc. 90 di alcool assoluto. Dopo qualche ora al liquido limpido aggiungendo acido solforico diluito, precipita il nitrofellandrene come olio giallo, di odore di chinone, irritante gli occhi. Distillato in corrente di vapore ed estratto con etere, viene distillato nel vuoto; bolle a 134-138°, sotto 12 mm. di pressione.

Riduzione del nitro- α*. fellandrene.* — In una soluzione di gr. 20 di nitrofellandrene in cc. 800 di alcool assoluto si introducono gr. 70 di sodio tanto rapidamente, da mantenere uno sviluppo vivace di idrogeno. A reazione finita si diluisce con acqua e si distilla con vapore. Il distillato risulta da un miscuglio di chetone $C_{10}H_{18}O$, tetraidrocarvone, dell'alcool corrispondente, e di fellandrenammina, sostanze che si separano facilmente raccogliendo il distillato in una soluzione di acido ossalico. Agitando con etere passa nel solvente il miscuglio di chetone e di alcool, mentre la base resta salificata. Per evaporazione dell'etere rimane un olio che presenta l'odore caratteristico del carvomentolo; viene purificato assoggettandolo ad una nuova riduzione con sodio ed alcool etilico.

Il carvomentolo così ottenuto presenta i seguenti caratteri:

p. eb. 218° (corr) ; $\delta_{15°} = 0.9073$; $n_{D15} = 1,463$

$\alpha_D = -9°,50'$ (tubo lungo 1 dm) onde $[\alpha]_D = -10°,83'$.

Ftalato acido di l-α*. carvomentolo.* — Gr. 10 di carvomentolo di riduzione, disciolti in 40-50 cc. di benzina di petrolio (60-70°), si fanno reagire con un eccesso di sodio metallico (gr. 3 invece di 1,5) per 10-12 ore, e dopo questo tempo la soluzione del sale sodico, decantata dall'eccesso del metallo, si fa gocciolare nella quantità teorica di anidride ftalica (gr. 9,5), sospesa in 300-400 cc. di etere di petrolio. Dopo riposo di 48 ore, al prodotto della reazione si aggiungono 300-400 cc. di acqua lievemente alcalina per idrato sodico; in tale modo si asporta in forma di sale sodico quasi tutto l'etere ftalico acido. Il liquido alcalino, lavato con etere di petrolio, si acidifica con acido solforico diluito; separasi rapidamente l'etere acido in forma di sostanza oleosa, giallognola, che per soggiorno sott'acqua alle temperature invernali di 8-15° poco a poco indurisce.

(1) Annalen, 287, pag. 373.

(2) Annalen 336, pag. 31.

Questo derivato ftalico è un miscuglio di diversi eteri: sottoponendolo, infatti, ad una serie di precipitazioni frazionate mediante ligroina dalla sua soluzione benzolica, il punto di fusione si eleva notevolmente, e da ultimo per cristallizzazione dall'etere di petrolio bollente si ricava una bella sostanza in ciuffetti di aghi bianchi, il cui punto di fusione 89° ed il cui potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -45°,04'$ non si alterano per cristallizzazione ulteriore dalla benzina, o pure dall'alcool.

All'analisi: gr. 0.401 di sostanza consumarono cc. 13,15 di $NaOH\frac{N}{10}$, mentre un acido monobasico $COOH.C_6H_4.C_{10}H_{19}$ richiede cc. 13,17 di alcali.

Rotazione: sostanza gr. 13,319: alcool assoluto 100 cc. $\alpha_D = -12°,00'$ (tubo lungo 2 dm) onde $[\alpha]_D = -45°,04'$.

l-α. Carvomentolo. — Gr. 15 del puro ftalato acido precedente furono disciolti in 60-70 cc. di potassa alcoolica doppio normale, e la soluzione venne riscaldata per $^1/_2$ ora a bagno maria. Dopo diluizione con acqua si distillò in corrente di vapore. Lo strato galleggiante di carvomentolo venne disciolto in etere, la soluzione eterea disseccata con carbonato potassico: per evaporazione del solvente rimase il carvomentolo bollente tutto a 218° (corr.).

Liquido denso, incoloro, di odore aromatico gradevole; sinistrogiro:

$$\delta_{15°} = 0.9074 \; ; \; n_{D15°} = 1,463 \; ; \; \alpha_D = -18°,30' \text{ (tubo lungo 1 dm)}$$
$$\text{onde } [\alpha]_D = -20°,38'.$$

l-β. Carvomentolo e suoi ftalati. — Le acque madri riunite di cristallizzazione dello ftalato acido sopra descritto, lasciano depositare un secondo ftalato, molle sciropposo, restio ad ogni solidificazione. Si presta però alla preparazione di un sale doppio con l'argento, cristallino, che si ottiene precipitando con nitrato argentico la soluzione dell'etere acido in acqua aggiunta della quantità strettamente calcolata di ammoniaca. Lo ftalato doppio argentico è insolubile in acqua solubile in cloroformio, facilmente cristallizzabile dall'alcool. Fonde a 175-176°.

Rimettendone in libertà l'etere acido, permanentemente molle resinoso, e saponificato questo con potassa alcoolica, si ricava per distillazione col vapore un carvomentolo sinistrogiro, dalle seguenti costanti:

$$\text{p. eb. } 218° \text{ (corr)} \; ; \; \delta_{15} = 0,9071 \; ; \; n_{D15} = 1,463$$
$$\alpha_D = -7°,50' \text{ (tubo lungo 1 dm)} \; ; \text{ onde } [\alpha]_D = -8°,63'.$$

Chimica. — *Di alcuni prodotti di ossidazione del pirrolo* (1). Nota di Antonio Pieroni, presentata dal Socio A. Angeli (2).

La tendenza che ha il pirrolo a formare per azione degli ossidanti prodotti neri o bruni, per il loro aspetto ed il loro comportamento del tutto simili alle melanine naturali, tanto diffuse negli organismi, fece supporre ad Angeli la possibile esistenza di relazioni fra pirrolo e melanine. Data questa supposizione, al fine di giungere a qualche risultato sulla natura delle melanine stesse, era naturale che si istituissero anzitutto ricerche per la determinazione della struttura dei neri di pirrolo.

Alla soluzione di questo importante problema, si pensò che si potesse giungere sia sottoponendo i neri di pirrolo a processi di demolizione, sia studiando direttamente i prodotti di ossidazione graduale del pirrolo, ed anche ricercando in quale modo i nuclei pirrolici sono capaci di legarsi fra loro, o con altri nuclei per dare complessi analoghi ai neri in questione.

Scopo delle presenti ricerche è appunto lo studio del più semplice prodotto di ossidazione del pirrolo che precede la formazione del nero corrispondente e dei prodotti che si ottengono fra alcuni metil-pirroli ed il chinone.

Se si lascia a temperatura ambiente per sette giorni circa una soluzione di gr. 37 di pirrolo in gr. 350 di acido acetico e gr. 37 di peridrol, e si neutralizza il prodotto della reazione con carbonato di calcio, indi si estrae la massa con cloroformio, si riesce ad isolare un prodotto (3) che dal benzolo si separa in aghi brillanti di color bianco, fondenti a 136° con annerimento. La sua formula corrispondentemente ai risultati analitici è:

$$C_8H_{10}N_2O$$

ed il suo peso molecolare, per via crioscopica, è risultato di 159, mentre il calcolato è 150. Scaldato, i suoi vapori colorano intensamente in rosso con fuscello di abete bagnato con acido cloridrico.

Dalle sue soluzioni, a contatto con l'ossigeno atmosferico, si separa, a lungo andare, nero di pirrolo.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1921.

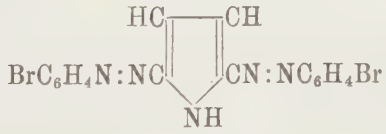
(3) Angeli e Lutri, Gazzetta Chimica, 50 (1920) vol. I, pag. 128.

In soluzione acquosa precipita con nitrato d'argento leggermente ammoniacale: con una soluzione di iodio in ioduro di potassio in presenza di potassa caustica, dà un prodotto grigio che fonde a 163° decomponendosi e svolgendo vapori violetti di iodo. Bollito con potassa diluita non libera ammoniaca, non reagisce con acetato di fenilidrazina. Trattato con dimetilaminobenzaldeide e acido cloridrico dà colorazione violetta meno fugace di quella che nelle stesse condizioni si ha col pirrolo. Con cloruro ferrico o con nitrito di sodio ed acido acetico, dà, dopo qualche tempo, un pulviscolo nerobruno. L'ossidipirrolo, che così si può chiamare il nuovo prodotto, sciolto in acido acetico concentrato e trattato con peridrol alla temperatura del b. m. dà succinimmide ed una sostanza densa sciropposa insolubile in benzolo, solubile in acqua, alla quale impartisce reazione acida. Se si bolle a ricadere con potassa per circa un'ora e dopo raffreddamento si ossida con permanganato, indi si filtra, si concentra, si acidifica ed infine si estrae con etere: per evaporazione si ottiene un prodotto bianco cristallino, che dà la reazione del fuscello e fonde, non completamente purificato, a 180°; scaldato debolmente con acido solforico diluito si colora in rosso. Sciolto in alcool e trattato con *p*.bromofenilazossicarbonammide $\left(\begin{matrix}BrC_6H_4N:NCONH_2\\ \ddot{O}\end{matrix}\right)$ in soluzione alcalina si colora in rosso violetto.

Questi caratteri fisici e le reazioni qualitative descritte sono proprie dell'acido α-pirrolcarbonico.

Data la piccolissima quantità di prodotto che avevo a disposizione, non mi fu possibile fare nessuna determinazione quantitativa.

L'ossidipirrolo sciolto in alcool per aggiunta di un eccesso di *p*.bromofenilazossicarbonammide e alcune goccie di una soluzione alcoolica di potassa dà un'intensa colorazione rosso violetto da cui per evaporazione e ricristallizzazione dal benzolo, si riesce ad isolare il di-*p*.bromofenilazopirrolo

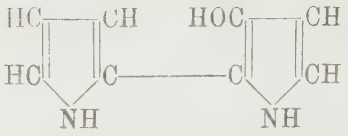


Cristallizzato in begli aghi di color rosso a riflessi rameici fonde a 208° (1). Lo stesso prodotto si ottiene anche dall'acido α-pirrolcarbonico in soluzione alcoolica per azione della bromoazossicarbonammide e potassa.

Per il comportamento dell'ossidipirrolo rispetto all'ossigeno atmosferico ed agli ossidanti, come il cloruro ferrico, per cui si forma il bruno nero caratteristico derivante dal pirrolo e rispetto al permanganato per cui si forma l'acido α-carbopirrolico e per tutte le altre reazioni descritte, ma spe-

(1) Su questo prodotto dirò dettagliatamente in altra Nota.

cialmente per quest'ultima, comune all'acido α-pirrolcarbonico, si deduce che la sua formula di costituzione è rappresentata verosimilmente da:



o da altra a questa tautomera dove anche non resta esclusa la possibilità dell'ossidipirrolo a condensarsi, in condizioni opportune, con altri nuclei pirrolici od ossipirrolici per generare complessi sempre più grossi e sempre più colorati dal bianco lievemente grigio al nero.

Come già fu detto più sopra allo scopo di indagare sulla capacità del pirrolo a legarsi anche con altre molecole sotto l'azione di ossidanti, feci contemporaneamente altre ricerche sottoponendo il 2-5 ed il 2-4 dimetilpirrolo all'azione del chinone sia in soluzione acquosa sia alcoolica ed acetica. In tutti i casi si ottiene una soluzione che va colorandosi intensamente e rapidamente dal giallo al violetto e al bruno e più tardi depone una polvere bruno-nera costituita da due porzioni una solubile e l'altra insolubile nell'acido acetico concentrato. Queste trattate con alcali dànno delle soluzioni bruno, limpide, da cui si separano per acidificazione. Analizzate diedero entrambe per gli elementi componenti delle percentuali a cui corrisponde bene la formula

$$C_{18}H_{15}NO_6$$

per cui supposi che i due prodotti bruno neri ottenuti potessero anche derivare da tre molecole di chinone riunite in un modo qualunque ad un residuo ammoniacale proveniente da processi di decomposizione dei pirroli, senonchè tale ipotesi si dimostrò subito insostenibile. Se si pone in soluzione acetica chinone ed acetato d'ammonio si separa dopo alcuni giorni una polvere nero-bruna del tutto simile a quelle che si ottengono fra chinone e dimetilpirroli, ma mentre queste scaldate con o senza potassa dànno fumi che colorano in rosso il fuscello d'abete bagnato in acido cloridrico, l'altra nelle stesse condizioni, dà fumi che non lo colorano affatto, mentre odorano intensamente di fenolo. La polvere nero-bruna ottenuta dal chinone ed acetato d'ammonio analizzata diede per gli elementi componenti percentuali a cui corrisponde bene la formula

$$C_{12}H_9NO_6.$$

Inoltre i neri ottenuti dal chinone e i dimetilpirroli, ossidati prima con permanganato, quindi con bicromato potassico ed acido solforico, diedero,

come prodotto finale, acido acetico che riconobbi con le reazioni che conducono all'ossido di cacodile e all'acetato di etile; invece il nero ottenuto con acetato d'ammonio e chinone per ossidazione con permanganato e bicromato potassico, come detto più sopra, non dà acido acetico; per cui si deve concludere che l'acido acetico che si ottiene nel primo caso è dovuto alla presenza dei metili legati al nucleo pirrolico. Si ha dunque ragione di ammettere come probabile per l'uno la formula:

$$(C_6H_3O_3)_2NH$$

per gli altri invece la seguente:

Dai fatti descritti risulta che i pirroli sostituiti sono capaci di legarsi ad anelli chinonici tanto con atomi di carbonio in α quanto in β. Il fatto poi che la composizione centesimale del nero solubile in acido acetico e di quello insolubile è identica, dimostra che questo è un polimero dell'altro e che la formula scritta non è che l'espressione più semplice del prodotto di reazione fra chinone e dimetilpirroli. Deve dunque avvenire, per questi composti, un fatto analogo a quello per cui dalla fenilchinondiimmina, gialla, si passa al nero di anilina.

Due molecole di chinondiimmina

$$NH=C_6H_4=N-C_6H_5$$

unendosi fra loro formano una immina azzurra, la smeraldina od azzurrina

$$C_6H_5N=C_6H_4=N-C_6H_4-NH\,.\,C_6H_4\,.\,NH_2$$

da questa per ossidazione con biossido di piombo si ha un immina rossa:

$$C_6H_5-N=C_6H_4=N-C_6H_4\,.\,N=C_6H_4=NH$$

e da due molecole di questa finalmente il nero di anilina:

$$C_6H_5-N=C_6H_4=N-C_6H_4-NH-C_6H_4-N=C_6H_4-N=C_6H_4=NH$$

Chimica. — *Il punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche-zuccherine* (1). Nota di U. Pratolongo, presentata dal Socio A. Menozzi (2).

La commissione — Dumas, Desains e Thenard — incaricata nel 1876 dall'Accademia delle scienze di Parigi di sottoporre a controllo l'apparecchio Malligand per la determinazione ebulliometrica dell'alcool nei vini, aveva rilevato, inducendole dai risultati delle ricerche da essa istituite, alcune anomalie nel comportamento ebullioscopico del glucosio e del fruttosio in soluzione idroalcoolica.

Rilevata l'anomalia, la commissione si propose allora di approfondire lo studio (3); nè la commissione, per quanto è a me noto, ha mantenuto il proposito, nè altri l'ha finora raccolto ed eseguito.

Sottoponendo a nuova indagine i fondamenti del metodo ebulliometrico di determinazione dell'alcool nei vini, ho dedicato una serie di ricerche sperimentali alla determinazione dell'influenza che i costituenti normali del vino spiegano sul punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche.

Riscontrate le anomalie di comportamento ebullioscopico già supposte dalla commissione, ho creduto peraltro opportuno, dato l'interesse e la singolarità delle anomalie stesse, estendere l'indagine oltre i limiti di variabilità di composizione dei vini, all'intero campo, o almeno alla sua parte accessibile, di variabilità delle soluzioni idroalcooliche-zuccherine, così che le anomalie risultanti nel campo della composizione dei vini rientrassero nel quadro generale delle anomalie di comportamento delle soluzioni idroalcooliche-zuccherine.

I risultati conseguiti in tale ricerca formano l'oggetto della presente Nota.

Sebbene dal punto di vista applicativo il comportamento ebullioscopico delle soluzioni idroalcooliche di glucosio e quello delle soluzioni idroalcooliche di fruttosio fossero ugualmente interessanti, pure la difficoltà di ottenere fruttosio puro in quantità sufficiente non mi ha consentito di estendere la ricerca stessa all'intero sistema *acqua-alcool etilico-fruttosio*. Lo studio

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Milano.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(3) *C. R. de l'Académie des sciences.* vol. 80, pag. 1124, an. 1875.

di questo sistema ha dovuto esser limitato ad alcuni punti più interessanti dal punto di vista applicativo.

Lo studio del sistema *acqua-alcool etilico-glucosio* è stato invece esteso alla parte accessibile dell'intero sistema.

Le determinazioni dei punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche zuccherine vennero compiute in un apparecchio ebullioscopico di foggia consueta, munito di refrigerante ad acqua. A norma dell'approssimazione richiesta o consentita dalla determinazione, la misura della temperatura era data da un termometro Beckmann al centesimo di grado o da un termometro al decimo.

Dato il forte mutamento di composizione che le miscele idroalcooliche subiscono pel fatto dell'ebullizione, la determinazione dei punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche zuccherine presenta singolari difficoltà, che possono essere superate solo con l'adozione di alcuni accorgimenti e di qualche convenzione.

I risultati ottenuti mantengono il loro valore comparativo solo ove si mantenga rigorosamente costante la frazione di distillato che bagna il refrigerante e quindi l'errore connesso alla variazione di composizione della miscela bollente pel fatto della parziale distillazione; il che implica che si mantenga rigorosamente costante la sorgente calorifera e regolare l'ebullizione, evitando con gli accorgimenti consueti anche i piccoli sovrariscaldamenti.

Data l'incertezza delle correzioni, ho preferito dare i dati incorretti, che riescono perciò solo approssimati nel loro valore assoluto, ma che mantengono il loro valore relativo.

Le determinazioni sono state compiute a pressione atmosferica normale o così poco diversa da rendere trascurabili le correzioni relative.

Le miscele vennero preparate con acqua ed alcool puro a 99,5 % e con glucosio puro e anidro.

Il glucosio di cui mi sono servito per la preparazione delle miscele era in parte di mia preparazione e in parte di preparazione del prof. Contardi, che me lo ha gentilmente favorito.

I due prodotti erano stati ottenuti per idrolisi dal saccarosio e cristallizzati da alcool.

La rotazione specifica dei due prodotti era rispettivamente

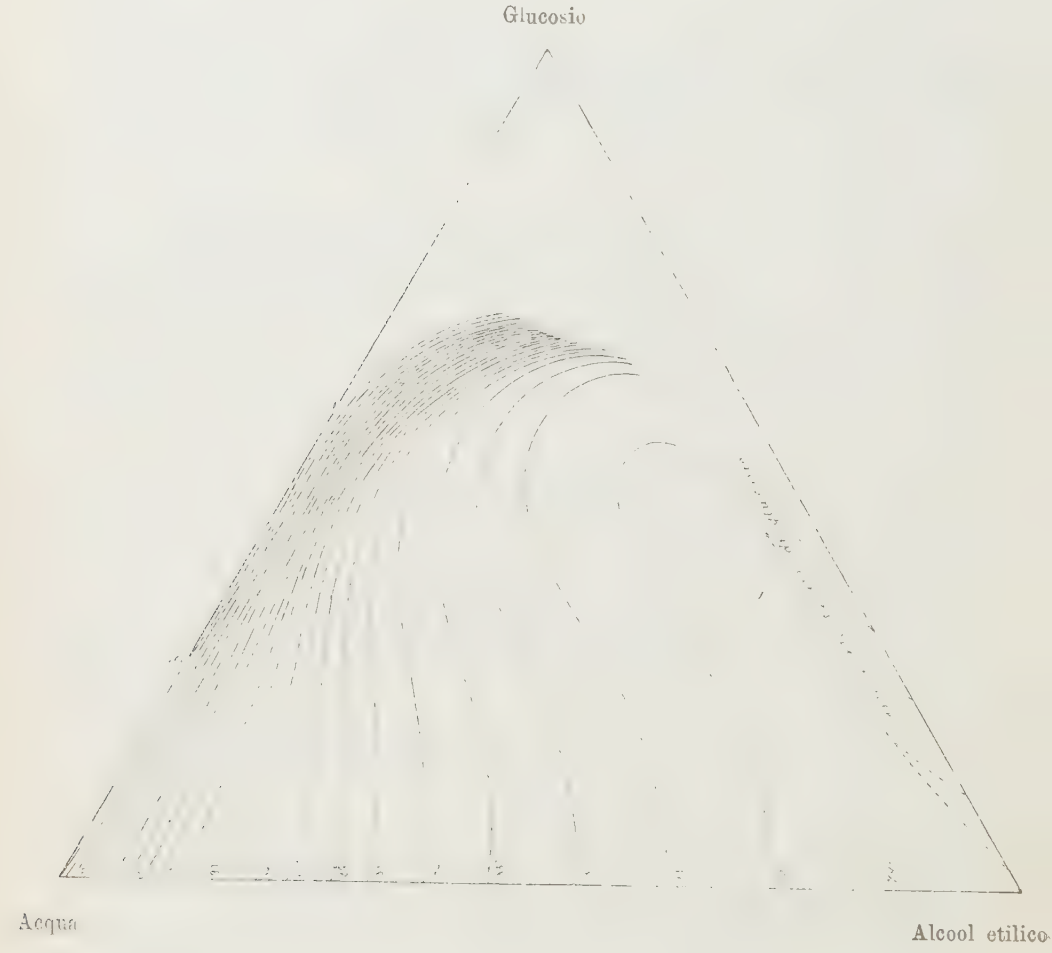
$$[\alpha]_D^{15} = 52.- \qquad [\alpha]_D^{15} = 52{,}2.$$

Quali punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche ho adottati quelli ottenuti e pubblicati da W. A. Noyes e R. R. Warfel (Journal Americ. Chem. Society, *23*, 463, an. 1901).

Per le soluzioni acquoso-zuccherine mi sono valso dei risultati ebullioscopici pubblicati da F. Jüttner (Zeitschr. Physik. Chemie, *38*, 108, an. 1901).

La serie dei dati ebullioscopici ottenuti è raccolta nella tabella seguente.

Il diagramma che segue dà la traduzione grafica dei dati raccolti nella tabella precedente.



I punti di ebullizione delle miscele idro-alcooliche-zuccherine.

I PUNTI DI EBOLLIZIONE DELLE SOLUZIONI IDROALCOOLICHE-ZUCCHERINE.

IL SISTEMA ACQUA - ALCOOL ETILICO - GLUCOSIO.

	Composizione della miscela % in peso			Punto di ebullizione a pressione normale	
	Acqua	Alcool etilico	Glucosio		
1	—	100. —	—	78°300	W. A. Noyes e R. R. Warfel.
2	2. 5	97. 5	—	78.191	
3	5. —	95. —	—	78.177	
4	7. 5	92. 5	—	78.241	
5	10. —	90. —	—	78.323	
6	15. —	85. —	—	78.645	
7	20. —	80. —	—	79.050	
8	25. —	75. —	—	79.505	
9	29. —	71. —	—	79.862	
10	35. —	65. —	—	80.438	
11	45. —	55. —	—	81.77	
12	52. —	48. —	—	82.43	
13	65. —	35. —	—	83.87	
14	74. —	26. —	—	85,41	
15	80. —	20. —	—	87.32	
16	90. —	10. —	—	91,80	
17	94. 5	5. 5	—	94.84	
18	97. —	3. —	—	97.11	
19	98. —	2. —	—	98.05	
20	99. —	1. —	—	98.95	
21	91 56	—	8, 44	100 271	F. Jüttner (1).
22	83. 7	—	16, 3	100.613	
23	79. 4	—	20. 6	100.780	
24	71. 6	—	28. 4	101.180	
25	64. 7	—	35. 3	101.613	
26	92. 62	3. 85	3. 53	96.06	U. Pratolongo.
27	88. 09	3. 68	8. 23	96.16	
28	84. 30	7. 35	8. 35	93.14	
29	80. 50	11. 10	8. 40	90.55	
30	33. 33	33. 33	33. 34	81.6	
31	66. 68	16. 66	16. 66	88.2	
32	16. 66	66. 68	16. 66	80.1	
33	41. 67	41. 67	16. 66	82.0	
34	50. —	25. —	25. —	83.5	
35	25 —	50. —	25. —	80.5	
36	20. —	20. —	60. —	81.7	
37	60. —	10. —	30. —	90.5	
38	40. —	15. —	45. —	83.5	
39	10. —	60. —	30. —	79.1	
40	15. —	40. —	45. —	79.8	
41	30. —	10. —	60. —	87.4	
42	10. —	30, —	60. —	80.1	

(1) Le percentuali sono calcolate sui dati forniti dall'autore.

Il diagramma precedente, che traduce e illustra i risultati delle determinazioni ebulliometriche eseguite, rivela chiaramente il carattere e la misura dell'anomalia ebullioscopica delle soluzioni idroalcooliche zuccherine, già rilevate dalla Commissione Dumas-Desains-Thenard.

Se l'anomalia non raggiunge i valori presunti dalla commissione [1], essa costituisce tuttavia una singolarità notevole per sè e per l'interesse che essa offre nei riguardi dell'ebulliometria applicata.

Per quanto è dato arguire in base al limitato numero di ricerche compiute, il comportamento ebullioscopico del *fruttosio* in soluzione idroalcoolica, si rivela del tutto analogo a quello del glucosio. Il diagramma precedente può ugualmente essere assunto a rappresentazione grafica del sistema *acqua-alcool etilico-fruttosio*.

Chimica. — *Azione dell'Aspergillus glaucus sulla glicerina* [2]. Nota di F. Traetta-Mosca e Margherita Preti, presentata dal Socio E. Paternò [3].

In un lavoro precedente, il dott. F. Traetta-Mosca [4] facendo fermentare delle soluzioni di saccarosio, glucosio, levulosio, alle quali si aggiungevano i soliti sali nutritivi, con un tipo di *Aspergillus glaucus* isolato da lui, ottenne come risultato della fermentazione una sostanza cristallizzata in aghi prismatici bianchi, fusibili a 154°, solubili in acqua, in alcool, in acetone. Questa sostanza dava con cloruro ferrico una intensa colorazione rosso-vinosa, ed aveva la composizione $C_6H_6O_4$.

Abbiamo voluto sottoporre all'azione dello stesso *Aspergillus* la glicerina, per vedere se si otteneva la medesima sostanza, oppure qualche altro prodotto fermentativo.

Abbiamo preparato perciò delle soluzioni di glicerina al 3 % con i comuni sali nutritizii, e, dopo sterilizzazione, le abbiamo innestate con la

(1) La commissione aveva supposto (loc. cit., pag. 1124) che il glucosio e il fruttosio potessero abbassare il punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche. Le determinazioni eseguite dimostrano che il fatto è reale solo per gli alti titoli alcoolici — al disopra del 15 % in volume — o per gli alti titoli zuccherini — al disopra del 10 % — quindi fuori del campo di variabilità di composizione dei vini. Si deve peraltro rilevare (ciò che pare è sfuggito alla commissione) che una soluzione idroalcoolica-zuccherina di composizione sia pure compresa entro tali limiti, presenta un punto di ebullizione superiore a quello del solvente, ma inferiore a quello della soluzione idroalcoolica di egual titolo alcoolico. Per maggiori dettagli mi richiamo ad un mio recente lavoro, ch'è apparso nel Giornale di chimica industriale ed applicata, vol. III, nn. 4, 6 e 7, an. 1921.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(3) Pervenuta il 5 agosto 1921.

(4) Ann. di chimica appl., V, I, pag. 477 (1914).

muffa, e tenute in termostato a 37° per due mesi. La muffa si è sviluppata rigogliosamente alla superficie. Indi previa filtrazione si è estratto il liquido con etere acetico, e distillato questo a piccolo volume, per raffreddamento si separa una sostanza cristallina. Ricristallizzata dall'acetone in presenza di carbone animale, si ottiene in cristalli aghiformi prismatici fusibili a 154°, bianchi, solubili in acqua, alcool acetone, meno in etere acetico ed in etere solforico, insolubile in benzolo, cloroformio, instabile al permanganato (prova di Bayer). Con cloruro ferrico si colora in rosso vinoso intenso.

Analisi: sostanza gr. 0,1576; CO_2 = gr. 0,2956; H_2O = gr. 0,0653; C = 51,15 %; H = 4,53 %.

Calcolato per $C_6H_6O_4$; C = 50,7 %; H = 4,2 %.

Determinazione del peso molecolare (crioscopia in acqua distillata).

N	Concentrazione	Abbassamento	P. M.
1	0,8547	0,11	140
2	1,6827	0,25	124

Calcolato per $C_6H_6O_4$ = 142.

Come si vede dall'analisi, dai caratteri fisici e chimici, questa sostanza è identica a quella ottenuta dal dott. F. Traetta-Mosca dalla fermentazione del saccarosio, glucosio, e levulosio mediante lo stesso *Aspergillus*, ed ha con essa eguale il comportamento verso il cloruro ferrico.

Nel lavoro citato, tenendo presente che la sostanza dava un composto di-benzoilico e uno biacetilico, e che doveva contenere due doppî legami (per la prova di Bayer, e perchè addizionava 4 atomi di idrogeno) e che aveva proprietà acide, il dott. F. Traetta-Mosca credette attribuirle la struttura di un lattone.

Però sembrandoci questa poco probabile abbiamo preparato altri composti, per meglio chiarirne la struttura.

Preparazione dell'etere metilico. — In una soluzione eterea di diazometano (ottenuta da 10 c.c. di nitroso-metil-uretano) si introducono a poco a poco gr. 3 di sostanza ben polverizzata e secca. Ad ogni aggiunta si ha un vivace sviluppo di gas, e nel liquido etereo si separa una sostanza cristallina raggruppata in fiocchi. Si raccoglie questa su filtro, si lava con etere, e si cristallizza dall'etere acetico. Si hanno così aghi bianchi fondenti a 165°, che non dànno più la colorazione con cloruro ferrico.

Analisi: sostanza gr. 0,2234; CO_2 = gr. 0,4420; H_2O = gr. 0,1040; C = 53,96 %; H = 5,20 %.

Calcolato per $C_6H_5O_3{:}OCH_3$ C = 54,47 %; H = 5,12 %.

Dai risultati dell'analisi si scorge come la metilazione deve essere avvenuta in un solo dei due ossidrili; e tenendo presente ciò che suole avvenire

ordinariamente, si deve supporre metilato l'ossidrile appartenente al nucleo, e perciò l'altro ossidrile deve appartenere ad un gruppo alcoolico.

Azione degli alcali terrosi sull'etere metilico. — La scissione è stata fatta con idrato di bario e con idrato di calcio, 1 gr. di etere si fa bollire per due ore a fiamma diretta con 5 gr. dell'alcali (CaO pura stemperata prima, o idrato di bario filtrato) e 120 gr. di acqua in un pallone munito refrigerante a ricadere, evitando l'accesso dell'anidride carbonica con un tubo a potassa. Il liquido da giallognolo diviene gradatamente giallo intenso. Si distilla dipoi lentamente il contenuto del pallone sino a metà del volume.

In questa idrolisi era da prevedere che si fosse formato un composto chetonico, il quale doveva ricercarsi nel distillato e degli acidi che dovevano ricercarsi nel residuo.

Il distillato odora fortemente di frutta, riduce il Fehling ed il nitrato di argento ammoniacale, dà la reazione del iodoformio.

Ne abbiamo preparato il *p*-nitro-fenilidrazone. Al distillato aggiungiamo *p*-nitro-fenilidrazina in soluzione acquosa-cloridrica ed acetato sodico in eccesso. Il liquido s'intorbida subito e dopo un po' di tempo lascia separare abbondanti cristalli aghiformi setacei, gialli. Questi raccolti sul filtro fondono a 110°.

Determinazione di N: sostanza gr. 0,1632; N = cc. 25,4; T. 11; P. 762,8; N = 18,62 %.

Calcolato per il *p*-nitro fenilidrazone dell'etere metilacetolico $C_{10}H_{13}O_3N_3$: N = 18,83 %.

Si forma quindi nell'idrolisi etere metilacetolico.

Il residuo del trattamento con barite, dopo distillato circa metà del volume, si tratta con CO_2 per eliminare il Ba, si filtra e nel filtrato si fanno i seguenti saggi per identificare l'acido formico: 1°) un po' del liquido si fa bollire con cloruro mercurico, si separa una polvere bianca di calomelano; 2°) un altro poco bollito con nitrato d'argento, separa argento metallico e forma lo specchio; 3°) un altro poco con cloruro ferrico dà una colorazione rosso sangue e per ebollizione separa un precipitato.

Per identificare l'acido ossalico, il residuo del trattamento con idrato di calcio lo sciogliamo con acido cloridrico, si alcalinizza con NH_3 ed acidifica con acido acetico; si ha un residuo cristallino che al microscopio mostra i noti cristalli di ossalato di calcio.

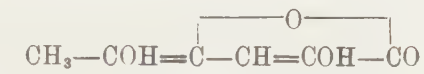
Azione dell'NH_3 *sull'etere metilico e formazione del piridone.* — Un gr. di etere metilico si mette in una capsula, si scioglie in NH_3 e si riscalda a bagno-maria per tre ore avvertendo di aggiungere l'ammoniaca man mano che si evapora, ed in ultimo si porta a secco. Si ottiene un residuo carbonioso, che si riprende con acqua, si riscalda con carbone animale e si filtra. Il filtrato si concentra fin quasi a secco, si ottiene così una sostanza in aghi. Cristallizzata in alcool si presenta in aghi bianchi, rag-

gruppati a rosetta e fondenti a 95°. Con cloruro ferrico dà una colorazione gialla intensa.

Analisi: sostanza gr. 0,1537; N c.c. 8,4; T. 29°; P. 764,5; N = 8,99%.

Calcolato per $C_7H_9O_3N$: N = 9,04%.

Nel lavoro citato il dott. F. Traetta-Mosca credette attribuire alla sostanza da lui isolata la struttura



considerando che essa aveva natura acida, dava un derivato biacetilico, ed uno dibenzoilico, era instabile al permanganato, ed addizionava 4 atomi di idrogeno in presenza di nero di palladio.

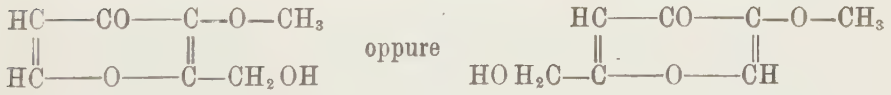
Avendo ottenuto l'istessa sostanza dall'azione dell'*Aspergillus glaucus* sulla glicerina, e poichè in soluzione acquosa con cloruro ferrico dà una intensa colorazione rosso vinosa, ci ricorda quella che dànno gli ossipironi.

Anche questa in soluzione eterea dà un etere monometilico per mezzo del diazometano, e quindi dei due ossidrili presenti nella molecola uno solo viene metilato, forse perchè è un ossidrile unito all'anello pironico; l'altro che non viene metilato probabilmente è un ossidrile alcoolico.

L'etere metilico con NH_3 lascia sostituire un O con NH dando una sostanza con i caratteri di un piridone.

Per azione degli alcali (idrato di bario o di calcio) sull'etere metilico, questo come i derivati pironici si scinde in prodotti da cui è facile risalire alla formola di struttura Noi abbiamo identificato l'ac. formico, l'ac. ossalico, l'etere metilacetolico.

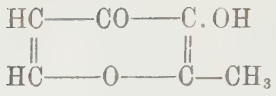
In base a questo modo di scissione si possono assegnare la formola:



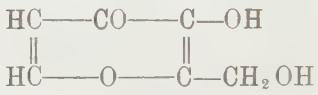
Quindi la sostanza proveniente dall'azione dell'*Aspergillus glaucus* sul saccarosio, glucosio, levulosio, glicerina, sarebbe molto simile al maltolo studiato dal prof. Peratoner (1), differendo da questo per contenere un ossidrile nel gruppo metile.

Al maltolo il prof. Peratoner attribuì la formola:

(1) Gazz. chim. it., V. XXXVI, p. 1, pag. 33 (1906).



alla nostra sostanza può quindi attribuirsi quella:



È degno di nota che questa sostanza ottenuta prima di ora da corpi contenenti catene di 6 atomi di carbonio, nel caso della formazione della glicerina rappresenta un vero prodotto di sintesi.

Cristallografia. — *Sulla forma cristallina della cusparina* $C_{19}H_{17}NO_3$. Nota di Maria De Angelis [1], presentata dal Socio Ettore Artini [2].

Fin dal 1883 Körner e Böhringer [3] estrassero dalla corteccia di Angustura (*Cusparia trifoliata*) un alcaloide caratteristico, della composizione rappresentata dalla formula $C_{19}H_{17}NO_3$ (*p. f.* = 92°), al quale diedero il nome di *cusparina*. Il prof. Körner mi favorì varî bellissimi cristalli, ottenuti da miscela di alcool ed etere, del cui studio morfologico ed ottico espongo qui i risultati:

Sistema monoclino, classe prismatica:

$$a : b : c = 1.2496 : 1 : 1.1678$$
$$\beta = 69°.49'$$

Forme osservate:

$\{100\}$, $\{001\}$, $\{0\bar{1}1\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{110\}$, $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}12\}$

L'abito dei cristalli ottenuti da miscela di alcool ed etere è tozzamente prismatico; lo sviluppo relativo delle facce è rappresentato fedelmente dalla fig. 1. Sciogliendo in etere-acetico alcuni di questi cristalli, sono riuscita ad ottenere delle combinazioni più semplici, con prevalenza di $\{100\}$, $\{110\}$,

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di mineralogia del Museo Civico di storia naturale di Milano.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1921.

[3] G. Körner e C. Böhringer: *Intorno agli alcaloidi della corteccia di Angustura*. Rendic. R. Ist. Lombardo, vol. XVI, 1883, pag. 320.

$\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{1}11\}$ alquanto allungati secondo l'asse di simmetria binaria.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(100).(110)	6	49°.17–49°.52′	49°.33′	*
(001).(011)	6	47.39–47.45	47.37 ½	*
(011).(110)	6	44.16–44.47	44.31	*
(110).(1$\bar{1}$0)	12	98.45–99.24	99.6	99°.6′
(100).(101)	5	35.50–36.53	36.15 ½	36.16 ½
(101).(001)	1	. . . .	33.21	33.33
(101).(110)	1	. . .	58.54	58.27 ½
($\bar{1}$00).($\bar{1}$01)	6	57.8–58 11	57.41	57 52
(101).($\bar{1}$01)	5	85.47–86.21	86.3 ½	85.52
($\bar{1}$01).($\bar{1}$10)	1	. . .	69.47	69.49
(011).(001)	2	47.12–48.—	47.36	47.37 ½
(011).(101)	1	. . . .	55.11	55.50
(111).(110)	5	30.6–30.40	30.25 ½	30.21
(111).(001)	2	46.12–46.58	46.35	46.42 ½
(111).(011)	5	27.54–28.17	28.11	28.7
(111).(101)	4	34.31–34.59	34.40	34.38
(111).(1$\bar{1}$1)	4	69.10–69.30	69.17	69.16
($\bar{1}$11).($\bar{1}$00)	2	67.45–68.21	68.3	67.47
($\bar{1}$11).($\bar{1}$01)	3	44.24–44.39	44.33 ½	44.41
($\bar{1}$11).(011)	3	35.1–35.56	35.23	35.40
($\bar{1}$11).($\bar{1}$10)	3	38.21–39.4	38.41 ½	38.42
($\bar{1}$11).($\bar{1}\bar{1}$1)	2	89.1–89.37	89.19	89.22
($\bar{1}$12).(011)	5	27.21–27.34	27.26 ½	27.30
($\bar{1}$12).($\bar{1}$01)	2	38.14–38.27	38.20	38.10
($\bar{1}$12).(111)	6	50.57–51.14	51.8	51.4 ½
($\bar{1}$12).($\bar{1}$11)	4	23.52–24.28	24-9 ½	24.19 ½
($\bar{1}\bar{1}$2).(111)	4	86,29–86.52	86.41	86.38
($\bar{1}$12).($\bar{1}\bar{1}$2)	4	59.51–60.36	60.9	60.8

Sfaldatura distinta non osservata.

La sostanza è incolora, con una leggera, ma sensibile, fluorescenza azzurro violetta.

Piano degli assi ottici parallelo al piano di simmetria; la bisettrice acuta, positiva, esce quasi normalmente da (101); l'ottusa quasi normalmente da ($\bar{1}01$). Dispersione inclinata non molto forte, ma evidente. Dispersione degli assi ottici sensibile: $\varrho < v$.

In due lamine tagliate normalmente alle due bisettrici, ho misurato nell'olio di oliva, a luce di Na:

$$2\,H_a = 104°.45';$$
$$2\,H_o = 119°.17';$$

Da questi dati si ricava:

$$2\,V_a = 85°.6';$$

P.M. = 307.146 — $\chi = 6.8474$

P.sp. = 1.363 — $\psi = 5.4794$

V. = 225.346 — $\omega = 6.3990$

Mineralogia. — *Sulla composizione chimica della Stilbite elbana* (1). Nota di P. Comucci, presentata dal Socio F. Millosevich (2).

Dal compianto prof. G. Grattarola (3) fu studiata la varietà di Stilbite di S. Piero in Campo nell'Elba che si presenta in sfere lucide a struttura fibroso-raggiato.

Pur riconoscendo la struttura stilbitica del minerale dai suoi caratteri esterni il Grattarola trovò per esso una composizione chimica che si discosta alquanto da quella della Stilbite normale.

Avendo ripreso in esame tale varietà di Stilbite, posso confermare intanto che dal lato morfologico ed ottico i caratteri sono quelli stessi della tipica Stilbite.

La densità determinata con il liquido del Thoulet è risultata uguale a 2,14.

Disfatte le sferule e osservati i frammenti al microscopio, questi si mostrano cuneiformi, trasparentissimi ed incolori e le superficî di frattura

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia del R. Istituto di Studi Superiori di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1921.

(3) Atti Soc. Tosc. S. N. vol. IV, fas. 2°. *Studî chimici sulla Heulandite e sulla Stilbite di S. Piero (Ello).*

limitanti sono spesso bene nette ed accennanti a piani di sfaldatura. A nicols incrociati le laminette presentano vivaci colorazioni d'interferenza varianti di tono e di colore in un medesimo frammento: ciò non esclude la bassa birifrazione della stilbite perchè qui si tratta certamente di spessori rilevanti.

L'estinzione è di 4° gradi rispetto all'allungamento dei frammenti che ha carattere ottico negativo. Alle due principali direzioni di vibrazione delle lamine corrispondono due indici rispettivamente maggiore e minore di quello dello xilolo che era 1,497. Questo complesso di caratteri ottici permette, a mio avviso, di identificare questo minerale come Stilbite. Infatti, dato che l'asse delle X è la direzione di allungamento dei cristalli ordinarî di Stilbite, è probabile che sia anche la direzione di allungamento degli elementi aciculari che costituiscono le sferrette, ed, essendo 010 il piano di sfaldatura, è da presumere che i frammenti riposino sul vetrino porta-oggetti secondo questa faccia. Essa è poi anche piano degli assi ottici e perciò contiene n_g e n_p il quale ultimo fa un angolo di 5° gradi con la direzione di allungamento; così è giustificato il piccolo angolo di estinzione e l'allungamento negativo. Essendo $n_p = 1{,}494$ e $n_g = 1{,}500$, l'indice dello xilolo deve essere intermedio come lo è difatti. Negli elementi cristallini da me esaminati non mi fu dato di osservare geminazioni.

L'analisi del minerale ha dato i valori indicati nella colonna I.

	I	II	III	IV	V
H_2O	18,11	19,23	18,05	14,94	17,20
SiO_2	56,76	52,34	56,35	61,31	57,64
M_2O_3	17,07	16,94	17,28	15,01	16,56
CaO	8,13	9,22	7,45	6,74	8,91
K_2O	0,63	1,80	1,73	1,91	—
Na_2O	0,92				
	101,62	99,94	100,86	100,11	100,00

Noto che la polvere dopo l'arroventamento non ha ripreso minimamente l'acqua perduta, nonostante l'esposizione all'aria umida durante otto giorni; tale osservazione conferma quello che è stato trovato per le zeoliti in genere e in particolare per la Stilbite elbana secondo le esperienze di E. Manasse (1).

Debbo constatare che le percentuali da me trovate e sopratutto quelle della silice sono abbastanza lontane dai valori centesimali di G. Grattarola (2) (analisi II) mentre risultano assai concordanti con le percentuali della III la quale fu eseguita da E. Manasse (3) su Stilbite elbana in incrostazioni facil-

(1) *Stilbite e foresite del Granito Elbana.* Atti Soc. Tosc. S. N., volume XVII.
(2) Memoria citata.
(3) Memoria citata.

mente disgregabili. Le due analisi I e III sono assai vicine alla composizione teorica della Stilbite indicata nella colonna V; quindi è da dedurre che le sferule da me esaminate corrispondono a Stilbite normale.

È noto che la composizione della Stilbite è alquanto oscillante specialmente per le percentuali dell' H_2O e SiO_2 tanto che sono ammesse la varietà epistilbite per le stilbiti più ricche di SiO_2 e l'altra detta ipostilbite per le più povere. La Stilbite dell'Elba darebbe esempî delle tre varietà: infatti dell'analisi riportate la I e la III sono riferibili a stilbiti normali, la II è propria dell'ipostilbite e la IV dell'epistilbite. Quest'ultima fu eseguita da E. Manasse [1] su materiale stilbitico in sferule opache o per lo meno translucide e con altre apparenze fascicolate.

Non è raro il caso che minerali concordanti fisicamente e mineralogicamente, abbiamo una composizione oscillante intorno ad una certa norma. Per spiegare questa diversità di composizione chimica nelle stilbiti elbane E. Manasse si basò, seguendo il Clarke, sulla sostituzione isomorfa nella formula generale della Stilbite di gruppi Si_3O_8 a gruppi SiO_4, ma in questo caso è forse più conveniente supporre che il minerale rappresenti una soluzione solida nella quale entrino in proporzioni diverse la silice e l'acqua.

Come conclusione mi sembra poter affermare che il minerale che si trova nelle druse di granito in forma di sfere lucide fibroso-raggiante è realmente riferibile a Stilbite, la quale però ha composizione variabile anche in uno stesso giacimento.

Geologia. — *Notizie sopra alcune interessanti formazioni del Supracretaceo del bacino di Eraclea nell'Asia Minore.* Nota II dell'ingegnere Secondo Franchi, presentata dal Socio Carlo Fabrizio Parona [2].

Formazione vulcanica di Eraclea. — Questa formazione ricopre, come già si disse, in perfetta concordanza, quella precedentemente descritta, la cui parte più alta è costituita da una alternanza ripetuta di arenarie in sottili straterelli e di strati marnosi, ricordanti l'analoga associazione di molte regioni eoceniche e miceniche italiane. Il passaggio dall'una formazione all'altra si effettua per mezzo di arenarie nelle quali gli elementi tufacei delle roccie vulcaniche si fanno sempre più abbondanti, finchè si giunge a veri tufi, e lo si nota in corrispondenza della baia di Deirmen-Agzi, presso alla quale la mulattiera incide la più occidentale delle masse di diabase, colla solita divisibilità globulare. Tra questa baia e quella di

[1] Memoria citata.

[2] Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1921.

Eraclea si attraversa sempre la formazione di tufi, i cui banchi sono regolarmente inclinati, con leggera pendenza, di 15-18°. verso S. O. Nei banchi di tufi sono incluse frequenti colate di roccie trachitiche, andesitiche e labradoritiche, delle quali frammenti e blocchi più o meno grandi sono inclusi nei tufi, i quali localmente passano a veri conglomerati a grandi elementi (fino ad 1 m.) di roccie vulcaniche, come nella costa a N-E dal faro. In mezzo ai tufi si intercalano pure qua e là, sottili zone marnoso arenacce, e, a N. del Castello di Eraclea, un grosso banco di calcare scistoso rosso a globigerine, potente 60-80 m., ricordante la scaglia rossa, e sfumante, al muro e al tetto, coi tufi a mezzo di alternanze di marne e di arenarie più o meno ricche di elementi tufacei.

Il modo di presentarsi delle intercalazioni prettamente marnose o marnoso-tufacee, che a luoghi presentano fossili marini, e di detti calcari rossi, in mezzo ai tufi, dimostra chiaramente che il deposito di questi, come l'effusione delle colate, avvenne in fondo al mare.

Sui tufi che ricoprono i calcari rossi a globigerine è fondata in gran parte la città antica, colle rovine del castello e delle mura (1), mentre la parte più moderna, comprendente il quartiere greco, è fondata sui calcari suddetti e sui depositi litoranei. Nelle strade della città e lungo il mare affiorano i tufi e i conglomerati vulcanici, nei quali si osservano delle faglie, con salti di qualche metro. A sud dell'abitato di Eraclea, l'alta collina isolata, vivamente erosa dal mare, dove giunge la teleferica della miniera di manganese di Kefes, è costituita da marne calcaree di color persichino, rossiccie e bianchiccie, le quali sono stratigraficamente superiori ai tufi sui quali è basata la città. Identiche marne si osservono in una lunga collina che sta più a sud, fra la precedente o la foce del fiume Gillik, dove le marne sono, a loro volta, ancora ricoperte da un calcare bianco paroso, scavato per farne calce.

Io e l'ingegnere Giulio Nista, il quale mi è stato gradito compagno in molte escursioni, dedicammo un po' di tempo alle ricerche dei fossili, le quali non furono molto fortunate; tuttavia nei tufi con filaretti marnosi delle balze sotto le rovine del castello genovese, dal lato di ponente, noi raccogliemmo resti fossili mal conservati, fra cui si distinguono pettini, frammenti di rudiste e diversi esemplari di una piccola exogira, e nelle marne dell'alta collina citata dianzi, esemplari di exogire molto affini, se non identiche, a quelle dei tufi e una piccola grifea piatta. La *facies* dei calcari scistosi rossi e delle marne, unitamente al tipo dei fossili, e la sovrapposizione di un lembo di altro terreno che presenta i caratteri dell'Eocene, mi avevano convinto che

(1) Il castelllo e le mura di una certa grandiosità, sono attribuite, al pari di un molo non terminato, alla dominazione genovese. Vi sono poi molti resti marmorei con iscrizioni greche, fra cui cornici, colonne e una vasca monolitica parallelepipeda di circa 5 mc. di capacità, attribuiti ai tempi di Eracleo, fondatare della città.

si dovessero riferire ad un alto orizzonte del Supracretaceo tanto i calcari a globigerine quanto i tufi soprastanti con exogire e le marne persichine a queste posteriori, contenenti exogire e grifee. Una valida conferma a questo mio modo di vedere io trovai, dopo il mio ritorno a Roma, in un lavoro pubblicato nei *Monatsberichte* del bollettino della Società geologica tedesca del 1919, pervenuti da pochi giorni all'Ufficio geologico, in una nota del signor G. Fliegel, il quale afferma di aver trovato nei tufi presso Eraclea, senza indicare esattamente il punto, una fauna con *Inoceramus Balticus* e *Ananchites ovata*, fossili caratteristici del Senoniano. La formazione vulcanica di Eraclea che io osservai per l'estensione di oltre 20 chilometri, e si deve estendere molto di più verso levante, i calcari rossi intercalati nella sua parte superiore, e le marne calcaree superiori grifee ed exogire, costituenti un complesso potente 300 o 400 m., sono adunque di età senoniana.

Le numerose colate di roccie vulcaniche, talora freschissime, di cui una delle più basiche, una labrodorite con grandi inclusi di pirosseno, affiora in mezzo ai calcari a globigerine, in una incisione di torrente a S. E. del castello, non permisero di individualizzare alcun apparecchiò vulcanico, ed è presumibile che tali apparecchi siano stati sprofondati sotto il Mar Nero, dal cui lato, cioè verso N., sono più abbondanti e talora quasi esclusivi i conglomerati a più grandi elementi.

Nelle carte geologiche, comprese quelle più recenti di Frech (Abh. d. Zeit. d. D. Geol. Ges. 2es Heft, 1916), la quale per la regione in parola è molto più inesatta di quella ad 1.500.000 dell'Europa, e quella di Alì Kenan e Hamed Malik ad 1.000.000, recentemente edita a Costantinopoli, la quale è una riproduzione di quest'ultima, non indicano nè la formazione colle colate di diabasi, nè quella vulcanica di Eraclea. Di roccie vulcaniche sono solo indicate due piccole masse isolate, verso sud, di cui la più vicina è a 18 km. da Eraclea, e le grandi masse a S. O. di Boli ed altre a più di 50 km. di distanza, oltre a quelle presso il fiume Filios, molto più a levante.

Sebbene nel Carbonifero e nel Cretaceo inferiore della regione non manchino forti accidentalità tettoniche, e faglie numerose e importanti, le quali interessano pure le due formazioni superiori ora descritte, queste presentano, nel tratto da me visitato fino alla valle di Illi, una generale isoclinalità che è abbastanza regolare al di qua del fiume Ciaus, sboccante al mare a Ciaus-Agzi, presentando direzioni prossime alla E. O. e pendenze di 20-25° verso S. La formazione vulcanica di Eraclea tra Kiösse-Agzi e la città presenta invece direzione media N. O.-S. E., con pendenza di 15-20° verso S. O. Così, un profilo passante pel castello di Eraclea e i pressi della Sella di Kiösse-Agzi, taglierebbbe sempre la formazione vulcanica e i calcari a globigerine intercalati, fin presso la sua estremità orientale, dove esso taglierebbe invece, per un centinaio di metri di potenza, le arenarie e gli scisti argillosi policromi della formazione sottostante.

Eocene (?) — All'uscita della città di Eraclea verso sud, lungo l'unica e poco battuta strada carrozzabile della regione, proprio in una bassa sella a tergo della collina di marne calcaree con exogire e grifee, un ristrettissimo lembo di meno di 100 m. di estensione, costituito da straterelli di arenarie con scisti argillosi molto contorti e certamente trasgressivi sulle dette marne e sui tufi vulcanici, è stato da me riferito all'Eocene, senza che io abbia però trovato alcun fossile. Nelle carte geologiche è indicata un'ampia zona di questo terreno a 45 km. di distanza, estendentesi fra Boli e Kastamuni.

Però il fatto di essere questo terreno così fortemente trasgressivo sul Senoniano, potrebbe anche giustificare l'ipotesi che si trattî di un lembo di Oligocene o di Miocene.

Biologia. — *Osservazioni sul tappeto lucido dei mammiferi domestici* (*Istogenesi*) [1]. Nota II del dott. Angelo Cesare Bruni, presentata dal Socio Benedetto Morpurgo [2].

A complemento delle osservazioni citologiche sul tappeto lucido dei mammiferi domestici, pubblicate in una breve Nota, comparsa in questi stessi Rendiconti, ho condotto alcune ricerche, che si riferiscono all'istogenesi di detto organo.

Da queste mi è risultato che, mentre nei feti bovini il tessuto proprio del tappeto si abbozza e si sviluppa come un qualunque tessuto fibroso, nel gatto alcune delle cellule mesenchimali della parte più profonda della lamina vascolare della coroide aumentano di volume, mentre si vanno differenziando nel loro citoplasma dei gruppi di fibrille, che sono alquanto più grossolane e molto meno numerose di quelle degli iridociti adulti, ma hanno già il carattere principale, quello di costituire varî gruppi distinti ed a direzione diversa, in una stessa cellula (fig. 1). Ben presto avviene una fusione della parte periferica non fibrillare del citoplasma delle cellule che si mettono a contatto, ma i singoli gruppi di fibrille conservano la loro individualità e sono senza dubbio il punto di partenza della disposizione definitiva (fig. 2). Questa evoluzione degli iridociti si segue in un medesimo preparato di gatto neonato, poichè, come già fu visto da Tourneux, il differenziamento procede gradualmennte dall'esterno verso l'interno. Nel gatto neonato i diversi piani di iridociti sono separati da setti connettivi completi, che in corrispondenza dei vasi perpendicolari si espandono su di essi formando un'avventizia. Non

(1) Lavoro eseguito negli Istituti anatomici dell'Università di Torino (direttore professore G. Levi) e della Scuola sup. di Medicina Veterinaria (direttore prof. U. Zimmerl).

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1921.

vidi tra le fibre collagene sparse dei setti in parola nessun fibroblasto, dette fibre hanno coi giovani iridociti gli stessi rapporti, che esse hanno negli strati più esterni coi fibroblasti.

Credo di poter concludere che il tappeto fibroso si costituisce per formazione di numerose fibre collagene nel mesenchima, che sta tra lamina vascolare e corio-capillare della coroide, mentre il tappeto cellulare si costituisce per un'elevata differenzazione degli elementi mesenchimali della stessa regione, i quali ingrossando e mettendosi fra loro a contatto si fondono in

Fig. 1. Tappeto lucido di gatto neonato. Giovani iridociti sparsi. Fissazione Carnoy colorazione Mallory, camera lucida, 1334 d. (ridotta a $^1/_2$).

Fig. 2. Tappeto lucido di gatto neonato. Fusione degli iridociti in sincizio. Fissazione Carnoy, colorazione Mallory, camera lucida, 1334 d (ridotta a $^1/_2$).

un sincizio a costituzione fibrillare, nel quale però l'individualità cellulare non è mai totalmente perduta, e formano una spessa lamina endoteliale pluristratificata.

Analogamente a quanto fu osservato in altre cellule altamente differenziate (Shinkishi Hatai, Levi, Busacca), quali le cellule gangliari e le fibre muscolari striate, ma a differenza di altri elementi (epitelî di rivestimento), le cellule del tappeto crescono notevolmente di grandezza durante il periodo di accrescimento del soma. Infatti nel gatto neonato, quando esistono ancora cariocinesi, il loro volume medio è di 791 μ^3 (rapporto plasmatico nucleare 1 : 4,51), nel gatto di 7 giorni, nel quale non vidi più cariocinesi, 923 μ^3 (rapporto *p.* n. 1 : 9,88), nel gatto adulto 3061 μ^3 (rapporto *p.* n. 1 : 35,41). È notevole il fatto che il nucleo subisce una graduale diminuzione del suo volume assoluto (da μ^3 141,30 nel neonato a μ^3 58.87 nell'adulto).

Ciò lascia supporre che si tratti di elementi perenni.

Biologia. — *Sulle modificazioni morfologiche delle cellule coltivate in vitro al momento della morte* (1). Nota preventiva del dott. Ruggero Romanese, presentata dal Corrisp. prof. Benedetto Morpurgo (2).

Scopo delle osservazioni che qui sommariamente riferisco, iniziate fin dallo scorso anno per consiglio del prof. Giuseppe Levi, fu di ricercare se e quali modificazioni morfologiche intervenissero, al momento della morte, nelle cellule originate da frammenti di tessuti embrionali coltivati e viventi fuori dell'organismo.

Per quanto mi risulta da una rapida scorsa della letteratura una tale questione non è ancora stata direttamente affrontata: solo qualche accenno sulla morte delle cellule si trova in lavori che, del resto si prefiggono altro scopo. A vero dire il problema non si presenta di così semplice risoluzione come è per i protozoi, dove è stato da gran tempo studiato: e ciò specialmente per la difficoltà di determinare, nelle culture dei tessuti, la cessazione delle attività vitali. L'indice più sicuro della morte, la cessazione dei movimenti cellulari, non è sufficente: succede non di rado nelle culture che cellule migrate dal coagulo (zona di invasione) rimangano lungamente immobili, od almeno senza movimenti apprezzabili per riprendere poi piena ed intera la loro attività. La questione diventa ancora più complessa se si cerca

(1) Lavoro eseguito nei Laboratorî di Anatomia umana normale (direttore prof. G. Levi) e di Medicina legale (direttore prof. M. Carrara) della Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1921.

di stabilire quali sono le cause della morte, le quali, nel grande numero di fattori variabili che entrano in gioco nel periodo di vita di una di tali culture non possono che in via eccezionale essere prese, isolatamente, in considerazione.

Le osservazioni che qui riassumo si limitano adunque a quelle sole che sono state ripetute, con identico risultato, in grande numero di esperimenti, così da escludere la possibilità di errori di interpretazione: per questo appunto non ho tenuto conto di altre, fino ad ora non sufficientemente controllate con ulteriori ricerche.

Le esperienze vennero eseguite, colla tecnica nota, su frammenti di miocardio e di tegumento di embrioni di pollo da 5 a 15 giorni coltivati in plasma omogeneo diluito. Le culture venivano seguite al microscopio alla temperatura costante di 38°-40° C. fino alla morte degli elementi migrati: per la osservazione venivano scelte quelle cellule in locomozione corrispondenti pei loro caratteri alla descrizione data dal Levi [1] delle cellule studiate viventi.

Indubbiamente le modificazioni morfologiche degli elementi migrati, al momento della morte, devono essere svariate, in relazione coi varî fattori che l'hanno determinata; fino ad ora però ho fermata la mia attenzione sopra due tipi principali di morte dei quali credo opportuno riassumere i caratteri più salienti.

I. I primi segni di senescenza e di alterazione cellulare si manifestano con la comparsa nel protoplasma dell'elemento in locomozione e fra i condrioconti di minutissimi granuli rifrangenti. Sulla loro genesi non è ancora possibile dare un giudizio; non è però improbabile, e per molti motivi, che derivino dai condrioconti.

Di rado questi granuli rimangono di piccole dimensioni, raggruppandosi in vicinanza al nucleo in due o più ammassi: per lo più invece aumentano di volume fino a dare origine a grosse gocciole fortemente rifrangenti. Dall'esame dei preparati fissati e colorati risulta che i granuli si colorano con la ematossilina ferrica e non assumono il Sudan nelle colorazioni col metodo del Ciaccio; la alterazione cellulare corrisponde quindi a quella già descritta e raffigurata dal Levi (loc. cit.). Le gocciole invece si colorano in rosa pallido col metodo del Lorrain Smith. In questo periodo le parti periferiche della cellula presentano ancora caratteri normali; sono sottili, trasparenti, a contorni frastagliati che cambiano continuamente di forma e contengono condrioconti mobili. Un po' alla volta il protoplasma, posto in maggior vicinanza del nucleo, assume un aspetto torbido, opaco, come di vetro assai finemente smerigliato: il nucleo ed i condrioconti più vicini a questo restano

[1] G. Levi, *Nuovi studî su cellule coltivate in vitro*. Arch. It. di Anat. e di Embriol., vol. XVI, fasc. 4°, 1917-18.

mascherati e nascosti: solo le gocciole rifrangenti rimangono ben visibili. Ne risulta un aspetto assai simile a quello osservato dal Levi (loc. cit.) nelle cellule portate a temperature di 14°-15° C.

Successivamente la cellula ritira i suoi più fini prolungamenti, sia lentamente e progressivamente, sia, di frequente, in modo abbastanza rapido. Rimangono soltanto le propaggini protoplasmatiche più grosse e tozze, alla cui estremità libera appaiono gemmule semisferiche che vengono lentamente emesse e ritirate. Nella maggior parte dei casi anche queste propaggini vengono a poco a poco retratte e la cellula tende ad assumere l'aspetto di una massa sferica di volume minore dell'elemento dal quale origina, gremita di gocciole rifrangenti di varia grandezza. Non è più riconoscibile allora una fine struttura cellulare e neppure la forma ricorda affatto quella delle normali cellule viventi in locomozione: tuttavia si osserva ancora un periodo di movimenti rapidi e tumultuosi. Ora in un punto ora nell'altro della massa vengono emesse grosse gemme ialine, in modo, vorrei dire, esplosivo, ed altrettanto rapidamente ritirate. Questo fenomeno presenta una evidente analogia con quello già osservato dal Burrows e dal Levi nelle cellule in mitosi, nel periodo della telofase, e forse, come i medesimi autori hanno supposto per la mitosi, dipende da un brusco abbassamento della tensione superficiale. Si arriva infine alla immobilità assoluta. Nelle condizioni più favorevoli si osserva una massa sferica che presenta una parte centrale costituita da gocciole rifrangenti ed una parte periferica, ad orletto od alone, di sostanza ialina. Coll'andar del tempo, probabilmente per fatti di autolisi anche la zona ialina scompare: come ultima traccia di un elemento morto rimane un piccolo gruppo di gocciole rifrangenti di varia grandezza.

Talvolta però, sia per i rapporti di unione fra elemento ed elemento, sia per la adesione degli elementi stessi contro il vetrino coprioggetti, la retrazione dei prolungamenti cellulari più voluminosi e tozzi rimane impedita e si osserva solo quella delle propaggini più fini e delicate. La cellula allora mantiene grossolanamente la sua forma, mentre viene a modificarsi la sua intima struttura. In luogo di masse sferiche si vedono allora, come esito, masse fusate, triangolari, poligonali cariche di gocciole rifrangenti. Se però gli ostacoli meccanici vengono a sparire, questi scheletri cellulari tendono a prendere la forma sferica: a me è succcesso più volte di osservare il brusco distacco di qualcuno dei legami protoplasmatici e la retrazione istantanea del prolungamento corrispondente, come potrebbe succedere di un filo di gomma teso oltre il proprio limite di elasticità, fino alla rottura. In tali casi la ulteriore evoluzione è analoga a quella sopra descritta.

A mio giudizio i processi che ho fin qui descritti corrispondono al tipo più comune di morte naturale, spontanea delle cellule; questo esito si osserva di frequente in culture abbandonate per parecchi giorni in termostato, in condizioni pressochè costanti.

II. Al tutto differente è l'altro tipo di morte. Dapprima la periferia della cellula in locomozione presenta qua e là qualche piccolissima gemma o rigonfiamento che dà a quella, sebbene non costantemente, un aspetto finamente dentellato. In seguito a poco a poco i contorni cellulari si fanno sempre meno netti: dapprima scompaiono i prolungamenti più fini ed esili come se si sciogliessero nel medio circostante: poi anche tutta la cellula va diventando sempre più trasparente fino quasi alla scomparsa. Rimane una tenue ombra di quello che era l'elemento primitivo, paragonabile appunto all'ombra degli eritrociti rispetto al globulo rosso normale, e come tale si conserva per ore e giorni immobile ed immutata. Nessun dubbio che in tal caso la alterazione della cellula corrisponde al periodo della morte.

Talora il processo va al di là di questi limiti e la cellula scompare addirittura in totalità come se fosse fusa nel plasma circostante.

A mio avviso queste modificazioni corrispondono ad una morte rapida determinata da bruschi insulti esterni: per così dire ad una specie di fissazione.

Ho osservato infatti questo tipo di morte quando accidentalmente la temperatura del termostato Pfeiffer in cui è contenuto il microscopio era salita rapidamente oltre i 43°-44° C.

In conclusione dunque le osservazioni fin qui fatte mi portano ad ammettere che i tipi di morte che con maggiore frequenza si osservano nelle culture siano i due sopra descritti. In uno la forma e la struttura della cellula in locomozione sono profondamente modificate e, salvo ostacoli meccanici, la cellula tende verso la forma sferica; nell'altro la forma della cellula in locomozione nelle sue linee generali rimane inalterata mentre viene a trasformarsi del tutto la struttura dell'elemento.

A mio avviso il primo tipo corrisponde alla morte lenta, naturale, spontanea; l'altro corrisponde alla morte rapida, artificialmente determinata da fattori esteriori: alla morte per fissazione, come si suol dire in istologia.

Sulla interpretazione di questi fenomeni come pure sulla descrizione di altri fatti osservati, che richiedono nuovi controlli, mi riservo di riferire più estesamente in altra occasione.

G. C

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 novembre 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sopra il comportamento e le proprietà di alcuni derivati aromatici.* Nota del Socio A. ANGELI (1).

In due comunicazioni fatte recentemente a questa Accademia (2), ho fatto notare che *in alcuni derivati aromatici orto e parasostituiti i due radicali si comportano come se fossero direttamente uniti fra di loro:*

$$C_6H_4 \begin{matrix} B \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A \\ | \\ B \end{matrix} ;$$

vale a dire che possono reagire l'un con l'altro come se l'anello aromatico non esistesse. In questa Nota accennerò brevemente ad altre reazioni che si trovano descritte nella letteratura e che riguardano un analogo comportamento che presentano alcuni altri derivati aromatici, nei quali però i due sostituenti non occupano le posizioni orto o para, ma sono situati in residui aromatici diversi, che a loro volta possono essere congiunti direttamente fra di loro ovvero anche separati da gruppi atomici caratteristici.

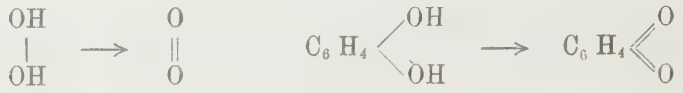
Siccome l'argomento non è stato studiato finora in modo sistematico, io mi devo limitare a citare i pochi esempi sparsi che ho trovati descritti da parte di diversi autori; essi si riferiscono principalmente a derivati ossi-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1921.

(2) Questi Rendiconti *26* (1917), 1° sem., pag. 480; *29* (1920), 1° sem., pag. 375,

drilici ed ammidati, che sono in generale più facilmente accessibili e nei quali le analogie in parola si manifestano in modo più spiccato.

Come ho posto in rilievo ancora nella prima Nota, acqua ossigenata ed idrochinone si comportano in modo analogo rispetto agli ossidanti; tutte e due le sostanze perdono una molecola di idrogeno e nel primo caso si ha sviluppo di ossigeno e nel secondo formazione di chinone:



Come risulta dalle esperienze di Willstätter e Kalb (1), anche il p-diossidifenile può subire un analogo processo di ossidazione per trasformarsi in p-difenochinone:

$$(HO) . C_6H_4 . C_6H_4 (OH) \longrightarrow O = C_6H_4 = C_6H_4 = O .$$

La stessa facoltà di fornire il corrispondente chinone viene presentata pure dal p-biossistilbene, come hanno dimostrato gli interessanti studî di T. Zincke (2):

$$(HO) . C_6H_4 . CH = CH . C_6H_4 . (OH) \longrightarrow O = C_6H_4 = CH . CH = C_6H_4 = O.$$

Questa proprietà viene invece a mancare quando i due anelli aromatici sono riuniti da un residuo saturo, il metilene

$$(HO) . C_6H_4 . CH_2 . C_6H_4 . (OH)$$

Al pari degli ordinari chinoni, anche le nuove sostanze, con i corrispondenti derivati ossidrilati di partenza, forniscono i chinidroni.

Non è necessario che la catena che unisce i residui aromatici sia costituita da atomi di carbonio, giacchè anche il p-biossiazofenolo può subire un processo di ossidazione che corrisponde a quelli ora accennati (3):

$$(HO) C_6H_4 . N = N . C_6H_4 . (OH) \longrightarrow O = C_6H_4 = N - N = C_6H_4 = O .$$

In una mia Nota precedente ho esposto le ragioni per le quali si deve ammettere che, in alcuni processi di ossidazione dell'idrazina, in una prima fare si formi il termine

$$HN = NH$$

il quale successivamente si polimerizza e si scinde in acido azotidrico ed ammoniaca (4):

$$H_2N . N = N . NH_2 \longrightarrow N \equiv N = NH + NH_3$$

(1) Berliner Berichte 38 (1905), pag. 1232.
(2) Liebig's Annalen, *335* (1904), pag. 157.
(3) Willstätter e Benz, Berichte *39* (1906), pag. 3484
(4) Questi Rendiconti *19* (1910), 2° sem., pag. 94.

In modo analogo la o-chinondiimmina, che rappresenta il primo termine di ossidazione della o-fenilendiammina, si polimerizza per dare l'ortodiammino azobenzolo:

$$2\,HN = C_6H_4 = NH \longrightarrow H_2N.C_6H_4.N = N.C_6H_4.NH_2$$

Come ha dimostrato Willstätter, nello stesso modo si comporta anche la benzidina, quando venga ossidata nelle opportune condizioni (1):

$$HN = C_6H_4.C_6H_4 = NH \longrightarrow H_2N.C_6H_4.C_6H_4.N = N.C_6H_4.C_6H_4NH_2$$

Tali esempi dimostrano dunque che, anche in questi casi, ossidrili ed amminogruppi, nei processi di ossidazione, si comportano come se fossero situati in posizione orto ovvero para di uno stesso anello aromatico.

Questo per quanto riguarda il comportamento chimico; ma anche per quel che si riferisce alle proprietà fisiche, e precisamente al colore, si sono potute notare alcune analogie che sono molto interessanti.

P. Friedländer e F. Risse (2) hanno posto in rilievo che i colori della cianina che differiscono per inserzione di $-CH=CH-$ fra i gruppi cromofori si rassomigliano fra di loro. I colori azoici che fornisce la benzidina,

$$H_2N.C_6H_4.C_6H_4.NH_2$$

si rassomigliano a quelli che derivano dal p-diamminostilbene,

$$H_2N.C_6H_4.CH=CH.C_6H_4.NH_2$$

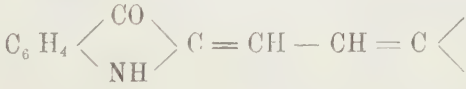
mentre invece ciò non si verifica più nel caso dei derivati del p-diammino-difeniletano,

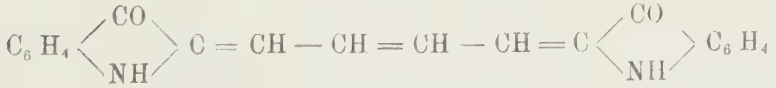
$$H_2N.C_6N_4.CH_2.CH_2.C_6H_4.NH_2,$$

nel quale i due residui aromatici sono riuniti dalla catena satura

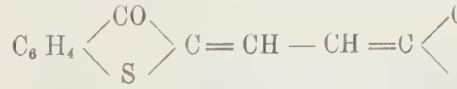
$$-CH_2-CH_2-$$

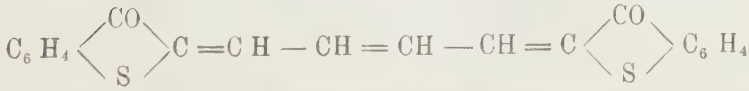
Anche i derivati





e





nei loro caratteri rassomigliano rispettivamente all'indaco ed al tioindaco

(1) Berliner Berichte, *39* (1906), pag. 3474.

(2) Berliner Berichte, *47* (1914), pag. 1919.

Si vede subito che in tutti questi casi i vari anelli sono congiunti fra loro direttamente ovvero sono uniti per mezzo di catene non sature caratteristiche; da quanto finora si conosce sembra invece che le analogie di proprietà più non sussistano quando gli anelli sono congiunti da catene sature.

Come è noto, Ciamician e Ciusa (1), per spiegare le analogie da me poste in rilievo riguardo al comportamento dei derivati orto e parasostituiti del benzolo, hanno fatto l'ipotesi molto ingegnosa che nelle reazioni in parola i due residui sostituenti possano in una prima fase staccarsi dall'anello aromatico, reagire fra di loro e poi, così mutati, riprendere ciascuno il posto primitivo. Questa ipotesi, che è in buona armonia anche con altri fatti, si presta assai bene a spiegare le regolarità e le analogie finora osservate.

Nel caso particolare degli esempi riportati nella presente Nota, e che si riferiscono al comportamento ed alle proprietà fisiche di derivati nei quali i sostituenti sono situati in anelli aromatici differenti, e che a loro volta possono essere direttamente uniti fra di loro ovvero anche per mezzo di catene non sature caratteristiche, si potrebbe anche ammettere che certi sistemi di catene, costituite da anelli aromatici ovvero anche da anelli aromatici e residui non saturi, possiedano una forma di « conducibilità » rispetto ai sostituenti situati in determinate posizioni, i quali per tal modo verrebbero a comportarsi come se fossero congiunti direttamente fra di loro. I residui saturi agirebbero invece come « isolatori ».

Forse a questo modo si potrebbe spiegare anche il fatto interessante, sul quale soprattutto il compianto Johannes Thiele ha richiamato l'attenzione (2), che i sistemi contenenti due doppi legami coniugati

$$— CH = CH — CH = CH —,$$

addizionano p. es. due atomi di idrogeno ovvero di alogeno ai carboni estremi. Sopra queste considerazioni ritornerò in una prossima Nota.

Biologia. — *Razze biologiche di Anofeli.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Questi Rendiconti *30* (1921), 1° sem. pag. 72.
(2) Liebig's Annalen *306* (1899), pag. 87.

Meccanica. — *Constatazioni sulle scie aerodinamiche.* Nota del Corrisp. G. Arturo Crocco (1).

Le indagini sulla reintegrazione della velocità del vento dietro gli ostacoli della quale ho discorso in una precedente Nota (2) hanno condotto a rilievi interessanti la resistenza al moto di corpi in traslazione nell'aria, che crediamo opportuno di esporre sebbene non ancora completi.

Gli esperimenti si sono svolti nell'impianto aerodinamico dell'Istituto Sperimentale Aeronautico (3) esponendo alla corrente della galleria aerodinamica dapprima un *disco* circolare sottile, poi un *prisma* rettangolare che l'attraversava da parte a parte (4): ed esaminando le velocità e le pressioni nella zona perturbata dietro quegli ostacoli, detta *ombra aerodinamica* o, se si pensa all'equivalente fenomeno della traslazione del corpo in aria ferma, semplicemente *scia* (5).

Le velocità di strascinamento *residue* dell'aria lungo la scia in quest'ultimo caso, corrispondono allora alle *velocità perdute* nel caso della corrente (6).

Se chiamiamo con h l'altezza del rettangolo sezion retta del prisma o il diametro del disco, e con d la distanza orizzontale da esso, lungo l'asse della

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

(2) Cfr. questi Rendiconti, pag. 131.

(3) Per gentile concessione del suo attuale Direttore Col. R. Verduzio; e per cura personale dell'ing. Bertozzi d'Olmeyda il quale da parecchi anni magistralmente dirige la Sezione Aerodinamica, e che mi auguro vorrà direttamente esporre in questi Rendiconti le cure particolari richieste da simili delicatissime esperienze.

(4) Le esperienze sul disco, richiedendo maggiore preparazione sperimentale sono state sospese per dar luogo all'apparecchiatura tuttavia in corso. Quelle sul *prisma* furono invece proseguite e ad esse principalmente mi riferisco nella presente Nota.

(5) Vedi in proposito il fondamentale lavoro di T. Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza*, Rend. Circ. mat. di Palermo, tomo XXIII, 1907.

(6) Non è facile eseguire dirette indagini sulla scia di un corpo mobile in aria ferma perchè il fenomeno non è stazionario: e per renderlo tale occorrerebbe muoversi insieme al corpo: il che appunto — relativamente — si tenta di compiere nelle gallerie aerodinamiche generandovi una corrente aerea di velocità eguale e contraria a quella del corpo e tenendo questo immobile insieme allo sperimentatore. L'equivalenza non è tuttavia perfetta perchè la corrente aerea ha limitate dimensioni e non possono rendersi identiche le condizioni ai limiti: ma le cose stesse che esponiamo e quelle che ci ripromettiamo di esporre in seguito potranno arrecar luce anche su questo punto controverso.

scia, del punto sperimentato, la velocità, V, della corrente a valle dell'ostacolo riferita alla velocità, V_0, a monte (prese entrambe positive nel senso della corrente) è riportata nella seguente tabella, la quale contiene anche le velocità perdute $v = V_0 - V$ (1):

Distanza $\frac{d}{h} =$	Velocità V della corrente per $V_0 = 10$ m/sec		Velocità perdute $v = V_0 - V$ per $V_0 = 10$ m/sec	
	Disco	Prisma	Disco	Prisma
0.5	— 3.81	— 2,50	13,81	12,50
1	— 5,65	— 4,10	15,65	14,10
1.5	— 4,76	— 4,50	14,76	14,50
2	— 1,75	— 3,50	11,75	13,50
2.5	+ 4,26	+ 2,06	5,70	7,94
3	6,00	4,45	4,00	5,55
3,5	7,08	5,47	2,92	4,52
4	7,88	5,91	2,12	4,08
5	8,60	6,25	1,40	3,74
6	8,90	6,40	1,10	3,60
8	9 20	6,62	0,80	3,38
10	9.34	6,80	0,66	3,20
20	9,64	7,56	0,34	2,44

In entrambi i casi la velocità sull'asse della scia è inizialmente in *senso opposto* a quello della corrente; indi si annulla, e poi assume valori positivi, rapidamente crescenti nel caso del disco e più lentamente nel caso del rettangolo.

Pensando per contro al fenomeno della scia generata dal corpo mobile nell'aria ferma, le colonne 4ª e 5ª che dànno le velocità perdute, darebbero anche le velocità di strascinamento dell'aria lungo l'asse della scia, prese positive nel senso del moto del corpo: e si dedurrebbe che in tal fenomeno l'aria segue il corpo dapprima con *velocità maggiori* di quella del corpo stesso, poi con eguali velocità e infine con velocità sempre decrescenti; che nel caso del disco diventano ad esempio trascurabili a oltre venti diametri dal disco.

Se ora passiamo ad esaminare la velocità della corrente fuori dell'asse della scia, spostandoci, per ogni distanza, d, orizzontale, anche verticalmente a varie altezze, y; troviamo per il prisma rettangolare i risultati raccolti nel quadro appresso inserito.

(1) Trattasi evidentemente di velocità *medie* nel tempo, giacchè a causa del fenomeno turbolento, le velocità istantanee sono variabili in uno stesso punto della scia.

y altezza in cm. dall'asse della scia	Velocità perdute $v = V - V_0$: per $V_0 = 10$ m/sec in sezioni distanti dall'ostacolo rispettivamente					Perdite di carico $P_0 - P$ in mm. d'acqua per $v_0 = 10$ m/sec alle distanze			
	$\frac{d}{h} = 1$	$\frac{d}{h} = 2$	$\frac{d}{h} = 3$	$\frac{d}{h} = 4$	$\frac{d}{h} = 10$	$\frac{d}{h} = 1$	$\frac{d}{h} = 2$	$\frac{d}{h} = 3$	$\frac{d}{h} = 4$
0	14.2	13.5	5.60	4.3	3.2	12.2	11.85	8.60	6.50
1	13.1	12.3	5.30	4 2	3	12.1	11 60	8.40	6.40
2	10.5	9 5	4.70	3.8	2.7	11.9	11.10	7.90	6.10
3	7.2	6 1	3.80	3 2	2.5	11 3	9 70	7.10	5.40
4	3 5	3.4	2.60	2.3	2.1	9	7.50	5.70	4.60
4.5	1.9	1.9	1.90	1.9	1.9	. .	. .	. .	. .
5	0	0.6	1.20	1.4	1.7	3	5	4.30	3.70
6	— 2.4	— 1.6	0.20	0 8	1.4	0 2	2.40	2.70	2.70
7	— 2 6	— 2 3	— 0.40	0.3	1.1	0.1	0.50	1.10	1.80
8	— 2.1	— 1.8	— 0 70	— 0.1	0.8	0.05	0.15	0 60	1.20
10	— 1.4	— 1.3	— 0.60	— 0 3	0.3	. .	0.05	0.30	0.60
13	— 0.7	— 0.6	— 0.50	— 0 4	— 0.1	. .	. .	0.15	0.20
16	— 0.5	— 0.4	— 0.30	— 0.2	— 0.15	. .	. .	0.05	0.10
19	— 0.3	— 0.2	— 0.10	— 0.05	— 0.1	. .	. .	. .	0.05

Esaminando il quadro, si osserva anzitutto che la parte notevole del fenomeno della scia è localizzata nelle vicinanze dell'asse. In ogni sezione le decrescenze delle velocità perdute, allontanandosi dall'asse, sono assai regolari: e queste cadono rapidamente verso valori assoluti piccolissimi. In secondo luogo si osserva l'esistenza di valori *negativi* notevoli: e cioè di zone della scia ove si ha un evidente *guadagno di velocità*; e, nell'equivalente fenomeno del corpo mobile, se l'equivalenza sussiste, una massa d'aria spinta in senso opposto al moto del corpo. Questi valori negativi vanno decrescendo via via che le sezioni sono più lontane dal corpo: mentre la parte positiva va allargandosi. Si nota infine — come singolarità sperimentale — che all'altezza di 45 mm. (per un rettangolo alto 50) le velocità della scia risultano *eguali* in tutte le sezioni sperimentate.

Queste le constatazioni sperimentali dirette. Osserveremo che gli esploratori di velocità non possono ritenersi strumenti di alta precisione: e che non si può affermare l'uniformità preventiva della velocità del vento nella galleria a meno delle differenze di pochi centimetri al secondo cui queste misure dànno luogo.

Sotto tali restrizioni, vediamo a quali constatazioni indirette si può addivenire.

Anzitutto, per la costanza della sezione della galleria, si deve avere un flusso di corrente costante. Ora entro il campo sperimentato, che non si estende

sino alle pareti della galleria, si osserva che le velocità perdute si compensano in gran parte, ma non interamente, tra loro. È quindi probabile che le piccole velocità negative si estendano al di là del campo sperimentato, per ottenere la compensazione completa.

In altri termini per la costanza della portata deve aversi, in ogni sezione, se consideriamo un tratto di scia corrispondente a una larghezza di sbarramento eguale ad un metro e supponiamo la densità costante (1):

$$(1) \qquad \int_y V\,dy = \text{costante} = \int_{y_0} V_0\,dy_0\,,$$

quando si estendano gli integrali sino alle pareti terminali della galleria. Facendo l'ipotesi che la corrente la occupi tutta quanta, senza singolarità, cioè che $\int_y dy = \int_{y_0} dy_0$, in tal caso potremo assumere $dy = dy_0$ e dovremmo trovare

$$(2) \qquad \int_y (V_0 - V)\,dy = \int_y v\,.\,dy = \text{zero}\,;$$

il che, come abbiamo accennato, non si verifica entro il campo sperimentato.

Posto ciò, proponiamoci di calcolare la variazione nel tempo della *quantità di moto* della corrente dovuta all'azione dell'ostacolo: cioè la derivata rispetto a t della quantità di moto, M, di un tronco di corrente di un metro di larghezza, esteso in altezza sino alle pareti della galleria e compreso in lunghezza fra la sezione a monte, y_0, e quella a valle, y. Avremo, com'è notorio, prendendo positivi i guadagni e chiamando μ la densità:

$$(3) \qquad \frac{dM}{dt} = \mu \int_y V^2\,dy - \mu \int_{y_0} V_0^2\,dy_0 = -\mu \int_y V v\,dy$$

nella quale abbiamo introdotto la relazione (1): ottenendo una espressione valevole in ogni caso e già da noi indicata sin dal 1911 (2).

Se poi ammettiamo la esatta compensazione stabilita dalla (2), la (3) si trasforma nella

$$(4) \qquad \frac{dM}{dt} = -\mu V_0 \int_y v\,dy + \mu \int_y v^2\,dy = \mu \int_y v^2\,dy$$

che risulta essenzialmente *positiva*.

(1) Le variazioni di densità sono infatti di un ordine di grandezza assai più piccolo di quello delle misure in questione.

(2) *Sulla teoria analitica dell'elica*. Rendiconti Stab. Costr. Aer.

Sta di fatto che calcolando l'espressione (3) anche senza introdurvi la (2), noi l'abbiamo trovata per tutte le sezioni sperimentate nettamente positiva; risultato degno di nota, giacchè la presenza dell'ostacolo faceva piuttosto pensare a una *perdita* anzichè a un *guadagno* nella quantità di moto. Se poi ci si riferisce al caso del corpo mobile in aria ferma appare a prima vista paradossale che nella scia generata da questo si verifichi un acquisto di quantità di moto *in senso opposto al moto del corpo*, anzichè nello stesso senso.

Ciò posto, se chiamiamo con p_0 e p le pressioni statiche a monte e a valle, nelle sezioni terminali del tronco di corrente innanzi definito, e indichiamo con R la resistenza del corpo mobile o meglio l'azione da esso esercitata contro la corrente, aggiungendo a questa l'incremento r dell'azione esercitata dalle pareti della galleria, dovremo avere, per l'equilibrio del tronco:

$$R + r = \int_{y_0} p_0 \, dy_0 - \int_y p \, dy - \frac{dM}{dt} .$$

Ma per evitare la difficile misura delle pressioni statiche, le trasformeremo in pressioni totali, $p + \frac{1}{2}\mu V^2$, introducendo nella precedente espressione per $\frac{dM}{dt}$ il suo valore rappresentato dalle (3). Si avrà allora, con agevoli trasformazioni, chiamando P le pressioni totali anzidette:

$$R + r = \int_{y_0} P_0 \, dy_0 - \int_y P \, dy + \frac{\mu}{2} \int V v \, dy \tag{5}$$

nella quale le P sono facilmente misurabili, e anche con maggior precisione delle velocità, mediante un tubo di Pitot semplice.

Se nella (5) poniamo $dy = dy_0$, e supponiamo vera la (2), essa diviene

$$R + r = \int_{y_0} (P_0 - P) \, dy - \frac{\mu}{2} \int_y v^2 \, dy , \tag{6}$$

espressione più comoda giacchè contiene soltanto le differenze di P, che si ottengono per contrasto manometrico.

Queste differenze $P_0 - P$ che potremo chiamare *cadute di pressione* o *perdite di carico* noi abbiamo misurato e riportato alle colonne 7, 8, 9, 10 della precedente tabella. Come si vede si è effettivamente in presenza di perdite di carico rilevanti e ben circoscritte in zone vicine all'asse della scia.

Calcolando la (6) noi abbiamo trovato per $R + r$ valori superiori a quelli effettivamente misurati di R; ma ci promettiamo di tornare su di essi in una successiva Nota dopo che potremo disporre delle esperienze del disco, e di quanto occorre per discutere la eliminazione della incognita r e l'influenza della limitazione della corrente d'aria.

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota III del Corrisp. Quirino Majorana (1).

Criterii sperimentali preliminari. — Come ho già detto nella Nota I, nelle nuove esperienze ho sostituito ai 104 Kg. di mercurio 9603 Kg. di piombo foggiati in un cubo di 95 cm. di lato. Occorreva quindi, anche per tale massa, tanto superiore alla prima, studiare il modo di avvicinarla od allontanarla dalla sfera di piombo, che doveva subirne l'azione schermante. Stabilita anzitutto la convenienza di scomporre in due parti (prismi a base rettangolare che chiamerò semplicemente *i piombi*) la massa totale, per la facilità della manovra a ciò necessaria, due metodi si sarebbero potuti realizzare praticamente: o far scorrere su rotaie perfettamente piane e levigate le dette parti della massa, sostenute da appositi carrelli; oppure far ruotare queste intorno a due robusti assi verticali eccentrici. Scartai il primo metodo, perchè non dava affidamento di conveniente traduzione pratica, in conseguenza delle possibili scosse provenienti dallo scorrimento dei carrelli sulle rotaie; e mi attenni al secondo, che lasciava prevedere una mobilità dolce e silenziosa delle masse di piombo, quantunque, come dirò appresso, accompagnata da deformazioni periodiche (più notevoli che non col primo metodo) di tutto l'edificio nel quale si sperimenta.

Non insisto, per non dilungarmi troppo, su altri criterî preliminari che mi guidarono nella realizzazione del complesso dispositivo necessario alle nuove esperienze, benchè a questo io sia arrivato a traverso una serie di successive modificazioni, specie in quanto riguarda gli accessorî della bilancia. Infatti, avendo cominciato nella primavera 1919 il montaggio delle masse di piombo, iniziai nell'inverno 1920 quello della bilancia, e non potei rendermi conto completamente di tutte le singole cause di errore (principalmente di quelle che hanno occasionato lo studio di cui nella Nota II) se non nell'aprile di quest'anno. Solo nel periodo aprile-luglio 1921, ho potuto eseguire le misure che mi sembrano definitive e di cui dirò in seguito. Passo quindi a descrivere la disposizione suddetta.

Congegno di manovra dei piombi. — In un sotterraneo del Laboratorio di Fisica del Politecnico di Torino, sono state fissate due armature girevoli intorno ad assi verticali, imperniate in cuscinetti a sfere, con reggispinte, pure a sfere, in basso. Esse appariscono sovrapposte in una sola ABCD

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1921.

nella fig. 2; ma in realtà sono distinte ed i loro assi sono discosti per cm. 47,5 (valore corrispondente alla metà del lato del cubo di piombo). I due cuscinetti in A, e gli altri due in B, sono rispettivamente murati con solide grappe in ferro, nello spessore della vôlta e del pavimento. Le dette arma-

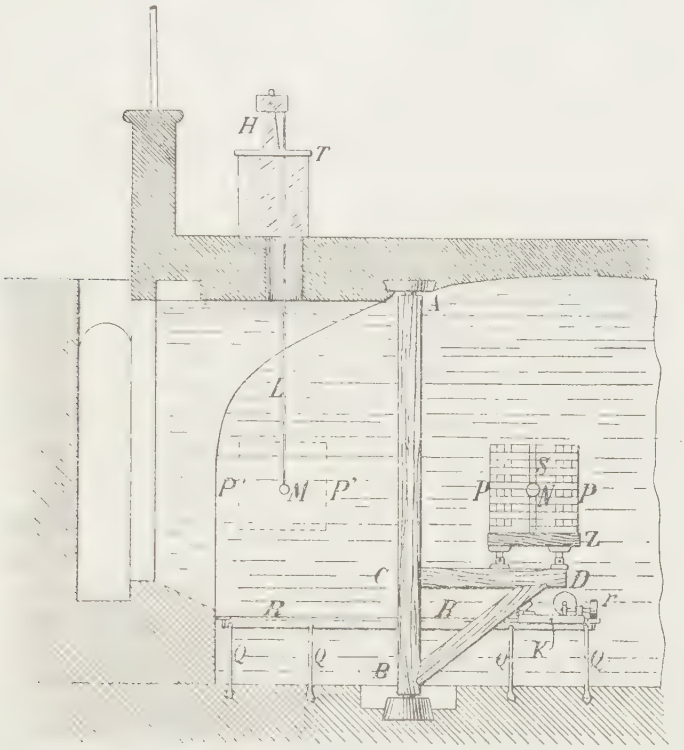


Fig. 2.

ture sono in legno, e ciascun tratto di esse, AB, CD, DB, è costituito da 4 tavole di pitch-pine spesse 5 cm., e larghe 20 o 22 cm. Dei rinforzi o collegamenti (non segnati in figura) fatti con lamine di ferro spesse 4 oppure 10 mm., e dei bulloni di ferro di 20 mm. di diametro, completano le due armature che nel loro insieme furono calcolate cortesemente dal mio collega prof. M. Panetti. I due blocchi di piombo, composti ciascuno da 144 pani (come già dissi), appariscono quadrati in figura e si proiettano sovrapposti in PP. Essi pesano ciascuno circa 5 tonnellate, e sono appoggiati sui bracci CD delle due armature. Ciascuno di essi genera così, in A e B, sforzi orizzontali opposti di circa 2 tonnellate; per cui l'edificio, dove è montato l'apparecchio, è soggetto ad una coppia il cui braccio verticale AB è uguale a 4 metri e ciascuna delle due forze orizzontali è di 4 tonnellate. Grazie ai cuscinetti a sfere, le armature possono venir ruotate facilmente, in sensi opposti, di 180°, in guisa che le due masse di piombo vengano a combaciare

alla sinistra della figura, in P'P'. La coppia suddetta avrà allora ruotato intorno al suo braccio, di 180°; ma, nelle posizioni intermedie, il suo valore si riduce notevolmente, ed anzi, a 90°, va a zero, perchè le rotazioni delle due armature avvengono in senso opposto; per tale posizione angolare le spinte orizzontali sulla vôlta o sul pavimento si controbilanciano esattamente. Si comprende, ora, come una sollecitazione di tale genere possa occasionare qualche deformazione elastica periodica nelle parti dell'edificio, all'alternarsi delle posizioni delle armature. Ritornerò su ciò in seguito.

Su ciascuno dei due bracci CD delle due armature trovasi una robusta zattera Z in legno, di $15 \times 47{,}5 \times 95$ cm., sostenuta da tre viti calanti in ferro, per la livellazione. Su ciascuna delle due zattere sono appoggiati, come in una costruzione con conci di pietra esattamente lavorati, i 144 pani di piombo di $8 \times 8 \times 47.5$ cm. Il peso dei singoli pani non è, per difetto costruttivo, esattamente costante; in media esso è di Kg. 33,390, con un errore medio di circa 100 gr. Ma tale variabilità non può avere conseguenze dannose, dato il numero notevole (288) dei varî pani.

La rotazione delle due armature avviene, come si è detto, in senso opposto e, mediante opportuni arresti regolabili, è limitata a solo 180°; con ciò si viene a costituire il cubo di piombo completo, a volontà in PP, oppure in P'P'. Codesta rotazione è comandata elettricamente dal *posto di osservazione*, sito nel piano superiore, nella guisa seguente: Una rotaia curva orizzontale in ferro RR, che nella figura apparisce rettilinea, larga circa 5 cm., è sostenuta mediante apposite colonnine QQ, a circa 80 cm. dal pavimento. Essa ha la forma di due semicerchi raccordati, aventi un raggio di m. 2,50, e, ciascuno, il centro su di un asse di rotazione AB delle armature. Ogni armatura porta una tavoletta K incernierata sul proprio tratto BD; su di essa è fissato un piccolo motorino elettrico a corrente continua di $^1/_8$ HP. Tale motorino può fare girare, con forte riduzione di velocità, mediante una vite perpetua, una ruota r, il cui bordo guarnito di caucciù, per il peso della tavoletta K e del sovrastante motorino, grava ed aderisce sulla rotaia R; al girare di ciascun motorino, le due masse di piombo PP sono trasportate alternativamente dall'una all'altra posizione estrema; tali posizioni distano m. 2,90 fra i loro centri. Mediante opportune connessioni elettriche, è facile eseguire l'inversione della marcia dei motorini; le posizioni dei due piombi sono in ogni istante controllate dal posto di osservazione mediante l'accensione o lo spegnimento di sei piccole lampadine (simili a quelle di un multiplo telefonico), in conseguenza di opportuni contatti elettrici che si verificano al ruotar delle armature, tra le tavolette K e la rotaia R. Così, oltre poter a piacere invertire la marcia dei due piombi, se ne può rallentare la velocità, facendo in modo che essi, assai dolcemente e senza scosse, vadano ogni volta a raggiungere l'estremo della loro corsa. Il tempo necessario per un trasferimento dei piombi da PP a P'P', o viceversa, è di circa 2'30".

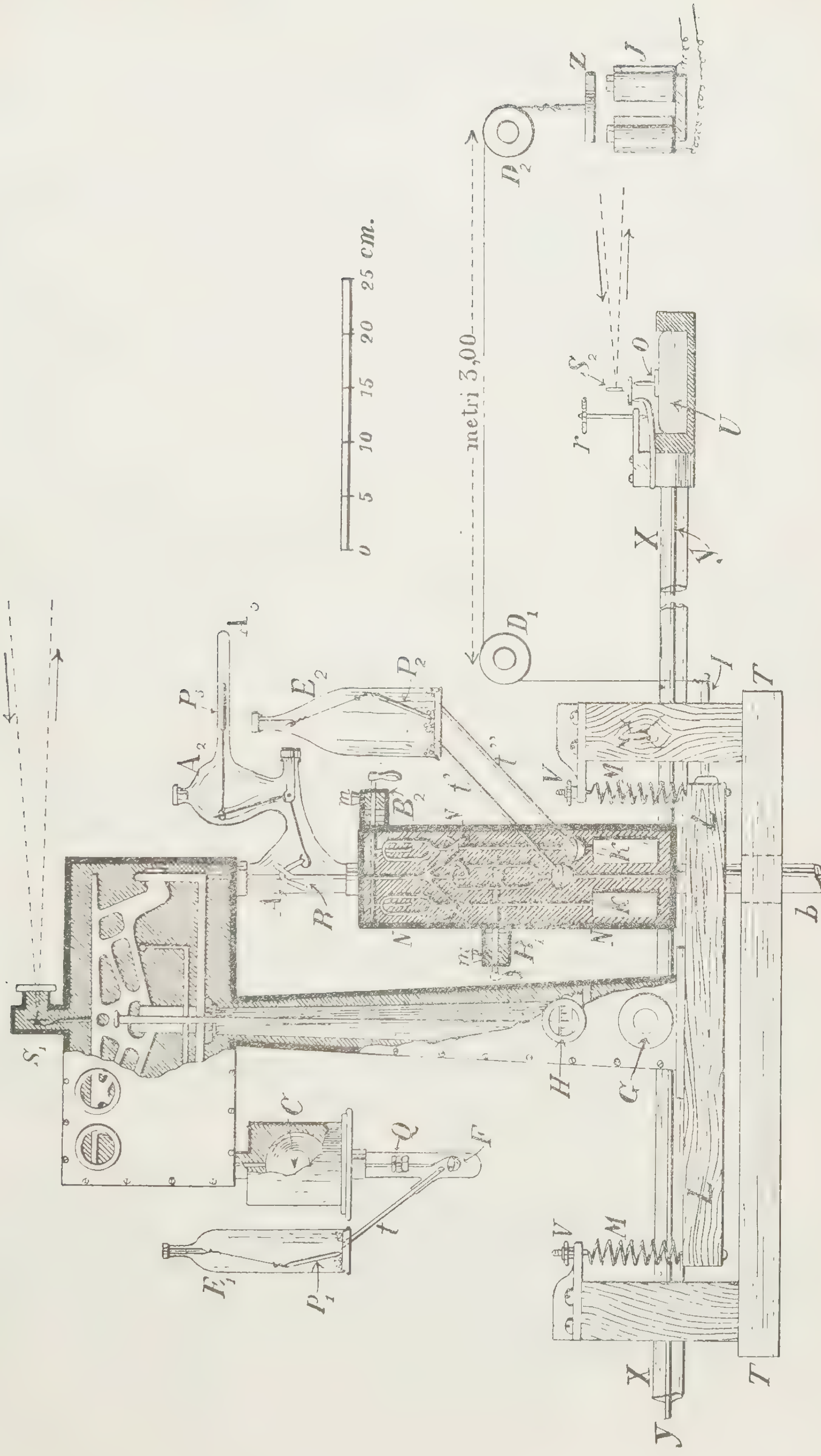


Fig. 3.

La bilancia. — Essa è indicata nella stessa fig. 2, in H; è poggiata su un piano di marmo T, sostenuto da due pilastrini in muratura, costruiti sul pavimento del locale sovrastante al sotterraneo contenente i piombi.

La bilancia, come nelle vecchie esperienze, è rinchiusa nella custodia già altra volta descritta, capace di resistere al vuoto atmosferico; dal lato destro di tale custodia pende un tubo L di ottone di 25 mm. di diametro, terminante in una sfera, pure di ottone, cava M, di 70 mm. di diametro; tale appendice serve a contenere e proteggere la sfera massiccia di piombo di 6 cm. di diametro, pesante 1274 gr., attaccata, mediante un filo di ottone di 0,3 mm. di diametro (e della lunghezza di circa 4 metri) al braccio destro della bilancia. Una scanalatura semicilindrica S, ed una nicchia semisferica N, praticate su ciascuno dei due prismi di piombo, permettono di accostare questi alla custodia M, senza toccarla, e di costituire così il cubo schermante P' P', intorno alla sfera di piombo contenuta in M. È facile, mediante le sei viti calanti delle due zattere Z, oltre che portar allo stesso livello le facce orizzontali superiori e, rispettivamente, inferiori dei due piombi, regolare la posizione del cubo così risultante, rispetto alla sfera di piombo, in guisa che il centro di questa coincida con quello del cubo. Ciò, perchè nel tubo L sono delle piccole finestre (non indicate in figura, per la piccolezza di questa) chiuse con vetro, a traverso le quali si possono puntare con un catetometro degli ingrossamenti del filo di sospensione come quello indicato con Z nella fig. 4 a pag. 485, vol. XXVIII di questi Rendiconti. Così, si correggono errori di aggiustaggio reciproco tra sfera e cubo, nel *senso verticale*. Sarebbe stato desiderabile poter fare altrettanto per il *senso orizzontale*; ma si comprende come non sarebbe stato facile dotare i prismi PP di mobilità laterale sui bracci CD, data la loro grande massa. Per cui mi son limitato ad aggiustare preventivamente tali prismi orizzontalmente, con la migliore approssimazione possibile; nel corso delle esperienze si sono in seguito corretti quegli spostamenti manifestantisi inevitabilmente, in conseguenza delle deformazioni delle armature ABCD, mediante corrispondenti spostamenti della sfera M, insieme con tutta la bilancia. Del resto, come già altra volta feci notare, anche un errore relativamente notevole (qualche millimetro) di aggiustaggio laterale non può dare sensibile componente attrattiva verticale tra il cubo e la sfera.

Venendo ora a parlare più dettagliatamente della bilancia e delle sue ulteriori particolarità costruttive, avverto che queste sono assai più numerose che non nella prima serie di esperienze, principalmente in conseguenza della maggior complicazione del nuovo dispositivo. La bilancia con i suoi accessorî è meglio rappresentata nella fig. 3, di cui mi riservo di dare ampia spiegazione nelle prossime Note.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni fra le misure di un insieme variabile e dell'insieme suo limite.* Nota del dott. Gabriele Mammana, presentata dal Socio Luigi Bianchi (1).

In una Nota sugli integrali dipendenti da parametri, attualmente in corso di stampa presso il Circolo matematico di Catania, stabilisco che un integrale

$$\varphi(q) = \int_{\mathrm{E}(q)} f(pq)\,dp$$

esteso a un insieme $\mathrm{E}(q)$ variabile col punto q, è continuo se

$$\lim_{q'=q} m\left[\mathrm{E}(q) + \mathrm{E}(q') - \mathrm{E}(q)\mathrm{E}(q')\right] = 0 \tag{1}$$

e chiamo insiemi variabili con continuità gli insiemi che soddisfano alla (1).

D'altra parte si ha già il concetto di limite di un insieme variabile (2) per modo che si sarebbe indotti a dire che un insieme varia in modo continuo quando

$$\lim_{q'=q} \mathrm{E}(q') = \mathrm{E}(q)\,. \tag{2}$$

Di questa relazione di limite si è fin ora detto soltanto che

$$\lim_{q'=q} m\,\mathrm{E}(q') = m\,\mathrm{E}(q)\,.$$

In questa Nota dimostrerò che vale invece la relazione (1) che è più significativa, in quanto per essa si mette in evidenza come, col tendere di q' a q *le parti non comuni all'insieme limite* $\mathrm{E}(q)$ *ed all'insieme* $\mathrm{E}(q')$ *finiscono per acquistare e conservare poi sempre misura piccola come si vuole.* Così resta pure provato che la (2) ha di conseguenza la (1); viceversa la (2) in generale non consegue dalla (1), di modo che la definizione

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1921.

(2) Veramente il limite viene definito (ved. De La Vallée Poussin: *Les intégrales de Lebesgue*, etc., Paris, Gauthier-Villars et C., 1916, pag. 8) per una successione illimitata di insiemi; però l'estensione al caso di un insieme $\mathrm{E}(q)$ variabile con un punto è immediata: basterà, per questo, definire $\lim_{q'=q} \mathrm{E}(q')$ l'insieme che ha per funzione caratteristica il limite (quando esiste) per q' tendente a q della funzione caratteristica corrispondente a $\mathrm{E}(q')$. Il limite così definito (si può dimostrare) è misurabile, se lo sono gli insiemi $\mathrm{E}(q')$ considerati, e la sua misura è limite delle misure in $\mathrm{E}(q')$ degli insiemi stessi.

di insieme variabile con continuità, da me data, viene ad avere significato più largo di quello espresso dalla (2).

Per semplicità mi limiterò qui a considerare solo il caso di una successione illimitata di insiemi; l'estensione, del resto, al caso di un insieme $E(q)$ variabile è immediata [ved. la nota (2) della pag. prec.].

Si abbia la successione convergente di insiemi misurabili

$$E_1 , E_2 , \dots E_n \dots \tag{1}$$

e sia

$$E = \lim_{n=\infty} E_n .$$

φ_n e φ, $(\varphi = \lim_{n=\infty} \varphi_n)$ indichino rispettivamente le funzioni caratteristiche di E_n e di E.

Fra le misure dei termini della (1) e del limite E, intanto, vale la relazione (1)

$$\lim_{n=\infty} | mE - mE_n | = 0 . \tag{2}$$

Consideriamo l'altra successione che si ottiene dalla (1) moltiplicandone i termini per E:

$$EE_1 , EE_2 , \dots EE_n , \dots ; \tag{3}$$

dico che questa è convergente ed il suo limite è ancora E.

Invero, la funzione caratteristica Φ_n del termine generale EE_n è data, come è noto, dal prodotto delle caratteristiche di E e di E_n; cioè $\Phi_n = \varphi\varphi_n$. Ora si ha

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n = \lim_{n=\infty} \varphi\varphi_n = \varphi \lim_{n=\infty} \varphi_n = \varphi^2 \varphi$$

e quindi la (3) converge, ed ha per limite l'insieme che ha φ per caratteristica, cioè l'insieme E. Ciò poteva anche vedersi direttamente, applicando i teoremi elementari sui limiti di insiemi.

Ma la misura del limite di una successione di insiemi, è limite delle misure degli insiemi stessi: perciò

$$\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} (mE - mEE_n) = 0 \text{ e, per la (2), anche} \\ &\lim_{n=\infty} (mE_n - mEE_n) = 0 . \end{aligned} \tag{4}$$

A queste due relazioni possiamo sostituire la relazione unica equivalente

$$\lim_{n=\infty} m(E + E_n - EE_n) = 0 . \tag{5}$$

(1) De La Vallée Poussin, opera citata, pag. 27.

Inversamente: Data la (1), ogni insieme F che soddisfi alle condizioni espresse dalla (5) o, ciò che fa lo stesso, dalle (4), e cioè

$$\lim_{n=\infty}(m\mathrm{F} - m\mathrm{FE}_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty}(m\mathrm{E}_n - m\mathrm{FE}_n) = 0\,,$$

può differire dal limite E della (1) al più per insiemi di misura nulla.

Infatti dalla ipotesi consegue

$$m\mathrm{F} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n\,, \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} m\mathrm{E}_n = m\mathrm{E} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n\,,$$

da cui $m\mathrm{F} = m\mathrm{E}$.

D'altra parte, se si considera la successione $\mathrm{FE}_1, \mathrm{FE}_2, \ldots \mathrm{FE}_n \ldots$ pei teoremi elementari sui limiti di insiemi si ha [1]

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{FE}_n = \lim_{n=\infty} \mathrm{F} \lim_{n=\infty} \mathrm{E}_n = \mathrm{FE}\,,$$

quindi anche

$$m\mathrm{FE} = \lim_{n=\infty} m\mathrm{FE}_n$$

e per conseguenza, infine,

$$m\mathrm{F} = m\mathrm{E} = m\mathrm{FE}\,;$$

ciò che dimostra quanto si è asserito.

Nota. L'esistenza di un insieme F che soddisfi alle condizioni di cui sopra, rispetto ad una qualunque successione di insiemi, non basta, in generale, ad assicurare la convergenza della successione stessa, come si può constatare dal seguente

Esempio. Consideriamo l'insieme costituito da tutti i punti di un circolo C, ad eccezione di quelli appartenenti ad un suo raggio r. Facciamo rotare C intorno al proprio centro successivamente per angoli di ampiezza $0, w, 2w, 3w \ldots nw$ $(w \neq 2\pi)$; indichiamo con $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots \mathrm{C}_n \ldots$ (6) gli insiemi corrispondenti alle successive rotazioni, e con $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ i raggi di punti esclusi rispettivamente di $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_n \ldots$ Ora, se w è commensurabile con 2π, per un certo valore m di n e pei suoi multipli, C riprende la posizione iniziale e perciò in un qualunque punto di r_0 (per esempio) la funzione caratteristica φ_n di C_n, col crescere di n, assume alternativamente valori uguali a zero e a uno, e non ha limite; e lo stesso avverrà della (6). Invece, se w è incommensurabile con 2π, C non riprende mai una stessa posizione, per quanto cresca n; quindi in un punto P' qualunque interno a C la φ_n o è sempre uno, qualunque sia n (cioè r_n non passa mai per P), o assume il valore zero solo per un dato valore m di n, e poi per $n > m$ ritorna ancora e rimane sempre 1. In ogni caso il suo limite per $n = \infty$ esiste ed è uno nei punti interni a C, e zero nei punti esterni; e la (6) per conseguenza ha per limite l'insieme (dominio) di tutti i punti di C.

[1] Ved. De La Vallée Poussin, opera citata, pag. 10,

D'altra parte il dominio costituito da tutti i punti di C gode, tanto nel primo come nel secondo caso, delle proprietà espresse dalla (5).

Possiamo enunciare il teorema:

Teorema. Condizione necessaria perchè un insieme E sia limite di una successione di insiemi $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ è che

$$\lim_{n=\infty} m(E + E_n - EE_n) \text{ sia } = 0 .$$

Questa condizione non basta in generale ad assicurare l'esistenza del limite della successione stessa; però, se questo esiste, può differire da E al più per insiemi di misura nulla.

Ma si può dire di più, e cioè: Fra i termini di una successione di insiemi $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n \ldots$ e il suo limite E, intercede la relazione $\lim_{n=\infty} (E + E_n - EE_n) = 0$ che è caratteristica del limite; in altri termini: La condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme E sia limite di una data successione, è che la successione formata colle parti non comuni a E e ai termini della data successione, converga non soltanto verso un insieme di misura nulla [come risulta dalla (5)], ma addirittura verso l'insieme nullo. Così, per esempio, nel caso di insiemi superficiali la successione delle parti non comuni, di cui sopra, non potrebbe tendere neanche a delle linee o a dei punti isolati. Tutto ciò ci darà ragione del perchè la (5) non assicura la convergenza della successione.

Infatti: conservando le notazioni del precedente paragrafo, prendiamo a considerare la successione $(E + E_n - EE_n)$, per $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ formata colle parti non comuni a E e ai termini della (1), e calcoliamone la caratteristica f_n del termine generale, in funzione delle caratteristiche φ e φ_n rispettivamente di E ed E_n. Applicando i teoremi sulle funzioni caratteristiche [1], si ha

$$f_n = 1 - (1 - \varphi)(1 - \varphi_n) - \varphi\varphi_n = \varphi + \varphi_n - 2\varphi\varphi_n ,$$

che potremo anche scrivere:

$$f_n = \varphi^2 + \varphi_n - 2\varphi\varphi_n = (\varphi - \varphi_n)^2 ,$$

e quindi $f_n = \varphi - \varphi_n$.

Ora, se $E = \lim_{n=\infty} E_n$, cioè $\varphi = \lim_{n=\infty} \varphi_n$, sarà $\lim f_n = 0$ e per conseguenza $\lim_{n=\infty} (E + E_n - EE_n) = 0$. Viceversa da quest'ultima consegue la prima, ciò che dimostra il nostro asserto.

[1] De La Vallée Poussin, op. cit., pag. 7.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Socio Guido Castelnuovo (1).

In uno dei miei corsi di lezioni di geometria superiore di questi ultimi anni ebbi occasione di far rilevare che il procedimento aritmetico ben noto, indicato dal Weierstrass per stabilire l'esistenza di sistemi di periodi ridotti per un integrale abeliano riducibile, poteva essere utilmente sostituito con un ragionamento di più succinta eleganza e di maggiore efficacia pratica.

Data l'importanza della questione, non mi pare inutile di pubblicare qui quel mio ragionamento, tanto più che, a causa forse di una definizione non felice dei periodi ridotti di un integrale riducibile che si trova in qualche libro, non è mancato chi ha creduto di poter sostituire il procedimento di Weierstrass con un ragionamento affatto inadeguato allo scopo.

1. Sia J un integrale abeliano (di 1ª specie) riducibile, appartenente a una curva di genere p, e siano

$$\omega_1 , \dots , \omega_{2p}$$

i suoi periodi a un sistema normale di tagli della riemanniana corrispondente alla curva.

Poi si supponga che $r(\geq 1)$ sia il massimo numero di relazioni lineari omogenee indipendenti a coefficienti interi passanti tra le ω_j e che

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,\omega_1 + \dots + a_{1,2p}\,\omega_{2p} &= 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \quad (1) \\ a_{r,1}\,\omega_1 + \dots + a_{r,2p}\,\omega_{2p} &= 0 \end{aligned}$$

siano r di codeste relazioni formanti *base minima* per l'insieme delle relazioni lineari omogenee a coefficienti interi intercedenti fra le ω_j.

Per teoremi notissimi di analisi indeterminata, la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1} , \dots , a_{1,2p} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r,1} , \dots , a_{r,2p} \end{matrix} \right\| \quad (2)$$

sarà di caratteristica r, e il massimo comune divisore dei suoi minori di ordine r sarà 1 (2).

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1921.

(2) Per tutte le affermazioni contenute nel testo vedi, p. es., il n. 1 della mia Memoria: *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLIII, 1918-1919, pp. 213-238).

Ma allora, in virtù di un bel teorema di Hermite-Frobenius (1), è possibile costruire un determinante unimodulare a elementi interi di ordine $2p$, così che delle sue righe le prime r siano appunto le righe delle (2).

Siano

$$a_{r+1,1}\ ,\ \dots\ ,\ a_{r+1,2p}\ ,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ ,$$
$$a_{2p,1}\ ,\ \dots\ ,\ a_{2p,2p}$$

le rimanenti righe di un tal determinante, e si ponga

$$\begin{aligned} a_{r+1,1}\,\omega_1 + \dots + a_{r+1,2p}\,\omega_{2p} &= \Omega_1\ , \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ &, \\ a_{2p,1}\,\omega_1 + \dots + a_{2p,2p}\,\omega_{2p} &= \Omega_{2p-r}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Le (3) mostrano che $\Omega_1\ ,\ \dots\ ,\ \Omega_{2p-r}$ sono *periodi* di J; le (1) e (3), prese insieme, essendo unimodulare il determinante delle $a_{i,j}\ (i\ ,j = 1\ ,\ \dots\ 2p)$, mostrano che ciascuna delle ω_j è una combinazione lineare omogenea a coefficienti interi delle $\Omega_1\ ,\ \dots\ ,\ \Omega_{2p-r}$; dunque

$$\Omega_1\ ,\ \dots\ ,\ \Omega_{2p-r} \tag{4}$$

è un sistema di periodi ridotti (primitivi) di J.

Dopo di che è ben noto ed è anche ben chiaro come ogni altro tale sistema possa essere dedotto dal sistema (4).

Avvertasi che, dato il significato di r, tra i periodi (4) non può passare alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi non tutti nulli.

Fisica. — *Sul potenziale di risonanza e di ionizzazione nei vapori misti di sodio e potassio con mercurio* (2). Nota II di Adolfo Campetti, presentata dal Socio Andrea Naccari (3).

1. Seguendo il metodo indicato nella Nota precedente, furono determinate le intensità di corrente tra rete e cilindro (malgrado un campo ritardatore costante) in funzione del potenziale acceleratore applicato tra filamento e rete, e si tracciarono le curve relative, prendendo come ascisse le differenze di potenziale in Volt (ogni divisione equivale a due Volt) e come ordinate le intensità di corrente in unità arbitrarie. Per evitare sovrapposizioni delle curve, ad ogni curva viene spostata l'origine.

(1) Vedi, per es., Frobenius: *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik; Bd. 86 (1879), pp. 146-208], § 8.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Sassari.

(3) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1921.

Tenendo conto delle curve tracciate (e dei dati numerici relativi che qui non sono riferiti per disteso) e osservando che l'ascissa x_1 del primo massimo rappresenta il potenziale di risonanza p_r più il potenziale p_0 corrispondente alla velocità con cui vengono emessi gli elettroni dal filamento incandescente, che il secondo massimo x_2 rappresenta il doppio del potenziale di risonanza più il potenziale iniziale, si hanno le relazioni

$$x_1 = p_r + p_0 \quad ; \quad x_2 = 2p_r + p_0$$

e perciò si ricavano p_0 e p_r. Così pure, col metodo indicato nella Nota precedente, si ottiene il potenziale di ionizzazione p_i.

Furono eseguite prima esperienze di controllo con sodio puro (curva 1ª, la 2ª esperienza non essendo rappresentata in figura), con potassio puro (3, 4) e con vapore di mercurio (5): altre esperienze si riferiscono a sodio e mercurio (6, 7, 8), a potassio e mercurio (9, 10, 11).

Nelle tabelle che seguono, t è la temperatura della camera di ionizzazione (superiore di una ventina di gradi a quella della regione ove vengono ridotti in vapore il sodio ed il potassio), t_1 la temperatura del mercurio, per le esperienze in cui esso è presente al fondo dell'apparecchio; i numeri della prima colonna corrispondono a quelli delle curve della figura.

Tabella I.

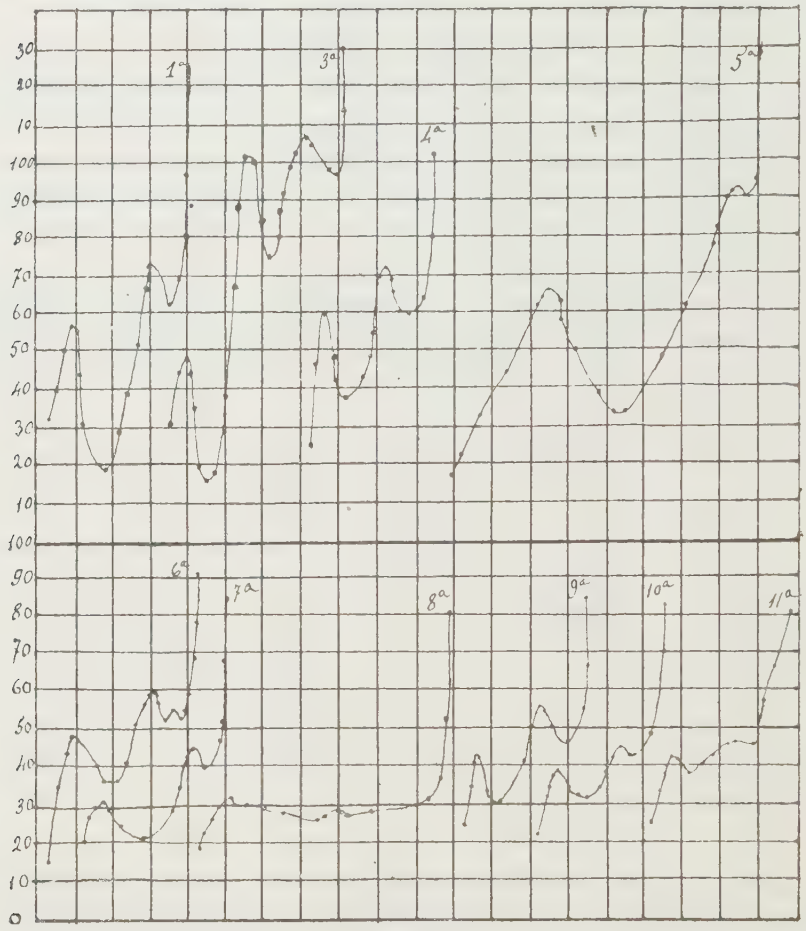
		t	p_0	p_r	p_i
1	Na	425°	1,21	2,13	5,16
2	Na	417°	1,07	2,14	5,22
3	K	325°	0,67	1,57	—
4	K	319°	1,08	1,58	4,38
5	Hg	300°	1,50	4,95	10,50

Tabella II.

		t	t_1	p_0	p_r	p_i
6	Na + Hg	421°	45°–50°	1,34	2,27	5,34
7	Na + Hg	418°	60°–65°	1,50	2,30	5,30
9	K + Hg	315°	45°–50°	1,06	1,63	4,41
10	K + Hg	325°	60°–65°	1,05	1,70	4,45

2. Per l'intelligenza di queste tabelle riassuntive e della figura relativa conviene fare le seguenti osservazioni: *a*) La tensione del vapore di mercurio nella camera di ionizzazione non si può precisare con sicurezza, trattandosi di un processo di diffusione di vapore dalla parte inferiore dell'apparecchio alla superiore sempre in comunicazione colla pompa Gaede in azione, non potendosi quindi applicare il principio della parete fredda; d'altra parte, alcune goccioline di mercurio, provenienti dalla condensazione nella regione superiore fredda del tubo, ricadendo eventualmente attraverso alla camera di ionizzazione, possono dare temporaneamente una più elevata concentrazione di vapore di mercurio, producendo così qualche irregolarità nelle esperienze. *b*) Per quanto riguarda i dati e le curve relative ai metalli puri, niente è da osservare in particolare, perchè i potenziali ottenuti corrispondono

a quelli delle esperienze precedenti; riguardo alle miscele di vapori, la curva 6 presenta due massimi che (come risulta dai dati numerici delle misure qui non riferiti) corrispondono a 0,93 e 3.10 Volts (3,10 — 0,83 = 2,27) e un massimo poco marcato, corrispondente, aggiungendo il potenziale iniziale, circa al potenziale di risonanza del mercurio. La 7 presenta pure due massimi corrispon-



denti al vapore di sodio a 0.80 e 3,10 Volts; ma il massimo corrispondente al mercurio non appare, probabilmente perchè coperto dalla relativamente rapida ascesa della curva; la 8 non permette più la determinazione di p_r e p_i, essendovi un solo massimo per il sodio, mentre il secondo appartiene al mercurio. Analogamente si comportano le curve 9, 10, 11 ottenute con K e Hg, essendo nelle 8 e 11 la temperatura del mercurio di circa 80°. È notevole il fatto che la 8 indica un rapido aumento di corrente a circa 6,7 Volt, valore che non corrisponde al potenziale di ionizzazione del sodio, nè del mercurio; tuttavia numerose esperienze qui non riferite hanno dato il medesimo risultato con notevole accordo (vedansi analogamente le curve delle

esperienze precedenti). *c*) La scala assai ridotta del disegno nel senso orizzontale (per economia di spazio) fa apparire l'ascesa delle curve, per es. in corrispondenza del potenziale di ionizzazione, in ogni caso molto rapida; in realtà, come risultò dai dati numerici delle esperienze, per le curve relative a vapori misti, il potenziale di ionizzazione non resta determinato con molta precisione.

Concludendo, si può enunciare il risultato che *la presenza del vapore di mercurio altera sensibilmente il potenziale di risonanza dei vapori di sodio e potassio: meno ben determinata è l'azione sul potenziale di ionizzazione.*

Tale risultato dovrebbe essere posto in relazione col comportamento ottico di tali vapori misti, esaminandone cioè la radiazione corrispondente. Questo esame però, dovendolo operare in apparecchi fortemente riscaldati entro stufa elettrica, dati i mezzi attualmente a mia disposizione, non mi è stato ancora possibile.

Fisica terrestre. — *I terremoti mondiali del 1916 e l'Osservatorio di Rocca di Papa.* Nota II di G. Agamennone, presentata dal Socio V. Cerulli (1).

In una Nota precedente (2) ho esposto che dei 59 più importanti terremoti mondiali del 1916, ben 48 furono segnalati a Rocca di Papa. Per formarsi un'idea delle distanze da cui vi giunsero, trovo che le medesime variano

												Km.
5	volte	da	3°	a	10°	d'arco di circolo mass., cioè	da	330	a	1110	c.
3	»		44	»	56	»	»	»	4880	»	6220	»
5	»		71	»	80	»	»	»	7880	»	8880	»
19	»		83	»	90	»	»	»	9210	»	10000	»
9	»		91	»	100	»	»	»	10100	»	11100	»
5	»		116	»	134	»	»	»	12880	»	14870	»
2	»		152	»	156	»	»	»	16870	»	17320	»

Da ciò si vede che 13 telesismi provennero da distanze varianti da 330 fino a 8880 km.; altri 28, cioè più della metà del totale, ebbero origine a distanze corrispondenti all'incirca a quella d'un intero quadrante terrestre (da 9210 a 11100 km.) e ben 7 ebbero l'epicentro ancor più remoto, fino ad avvicinarsi all'antipodo!

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) *I terremoti mondiali del 1916.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 6 febbraio 1921.

Per chi avesse vaghezza di conoscere la distribuzione geografica degli epicentri di tutti i predetti 59 terremoti mondiali, osservo che ben 40 se ne trovano a longitudini orientali, e precisamente: 1 in Romagna, 1 nell'Alto Adriatico, 1 in Croazia, 1 nella penisola Balcanica, 1 nelle Alpi transilvaniche, 2 in Asia Minore e Persia, 2 tra il Polo nord e la Russia settentrionale, 4 nella catena montuosa dell'Indostan settentrionale, 4 nel golfo di Bengala, Sumatra e adiacenze, 3 alle Isole Filippine, 2 a Formosa, 9 nel Giappone o nelle vicine acque del Pacifico, 2 nelle Isole Aleutine, 7 nella Nuova Guinea o vicinanze. I restanti 19 epicentri hanno, invece, longitudine occidentale, e cioè: 2 nelle Antille, 3 nel Messico meridionale o nel Pacifico presso il Messico e S Salvator, 4 nella Columbia e Venezuela, 1 al Perù, 3 presso le frontiere tra la Bolivia, il Brasile, l'Argentina ed il Cile, 4 nell'Alaska o nel Panifico presso le Aleutine, 2 alle Isole Samoa presso l'Australia e la Nuova Zelanda. E resta così provato, una volta di più, come le onde sismiche giungano in Italia con maggior frequenza dall'oriente in confronto dell'occidente; e nel caso nostro il rapporto è circa doppio!

Sommando i predetti 59 telesismi con gli altri 72, meno bene determinati e generalmente meno intensi, troviamo un totale di 131, dei quali 67 registrati a Rocca di Papa, 63 a Moncalieri e 20 a Monte Cassino, tralasciando gli altri 2 osservatorî di Padova e Valle di Pompei, pei quali mancano i dati per gli ultimi mesi del 1916. Il numero totale di terremoti, registrati in detto anno a Rocca di Papa, Moncalieri e Monte Cassino, è stato rispettivamente di 507, 221 e 221 (1); e se da queste cifre sottragghiamo il numero dei telesismi (rispettivamente 67, 63 e 20), rimangono 440 registrazioni per Rocca di Papa, 158 per Moncalieri e 201 per Monte Cassino. Di queste ultime, certamente molte sono state causate da fenomeni sismici italiani, ma la maggior parte son dovute a terremoti avvenuti fuori del Regno e persino extra-europei, ma che tuttavia devono essere stati, in generale, di moderata intensità, tale da perturbare bensì più o meno debolmente i nostri sismografi, ma non quelli a distanze più ragguardevoli, per cui non si è creduto di classificarli tra i cosiddetti mondiali. Può anche essere avvenuto che, a causa della guerra, molti osservatorî già non funzionassero più nel 1916, oppure che il compilatore dei terremoti mondiali di detto anno non abbia potuto conoscere affatto, o almeno in tempo utile, le osservazioni eseguite in altre località. Ne segue che il numero dei telesismi, con epicentro più o meno lontano, registrati nei predetti tre osservatorî, deve restare bene al di sopra di quelli sopra riportati.

Comunque sia, rimane bene assodato il fatto che con i moderni e sen-

(1) A *Padova* furono registrati 96 terremoti nei primi 9 mesi, ed a *Valle di Pompei* 48 nei due primi quadrimestri. Supponendo un'uguale frequenza media per i restanti mesi dell'anno, si sarebbero avute in tutto 128 registrazioni per la 1ª, e 72 per la 2ª località.

sibilissimi sismografi vanno sempre più crescendo i sismi registrati, e prova ne è il ragguardevole numero di quelli (507) segnalati a Rocca di Papa nel 1916. A spiegare poi la maggior quantità di registrazioni in detto osservatorio in confronto di Moncalieri — in cui pur funzionavano parecchi e potenti strumenti, tenuti con somma cura e perizia — bisogna considerare che Rocca di Papa è circondata da molti ed attivi focolari sismici, e che, trovandosi più ad oriente, è in grado di registrare più visibilmente l'arrivo delle onde sismiche, talvolta debolissime, che giungono, quale eco lontana, dai numerosi terremoti delle Calabrie, della Sicilia, del Mar Ionio, della Grecia, della Balcania ecc. La superiorità poi di Rocca di Papa, in confronto di Monte Cassino, è certamente dovuta al maggior numero ed alla maggiore potenza degli apparati posseduti.

Da quanto ho esposto a proposito di Rocca di Papa, emerge la necessità di aumentare l'attuale ristrettissimo personale di quell'osservatorio (direttore, assistente e custode) il quale è rimasto invariato fin dalla fondazione del medesimo (anno 1889), quando, per la scarsissima sensibilità degli strumenti allora in uso, si potevano tutt'al più registrare qualche diecina di terremoti all'anno, e quasi tutti avvertiti dalle persone! E bisogna anche riflettere che se con tutta l'abnegazione del personale si riesce a stento a compiere l'analisi del numero stragrande dei sismi registrati (1), manca la possibilità di discutere ed utilizzare le osservazioni, per dedicarsi a studî sintetici, che sono appunto quelli che fanno progredire la scienza, sicchè disgraziatamente resta in gran parte frustrato lo scopo precipuo pel quale fu fondato l'osservatorio.

Da ultimo, è bene ch'io faccia rilevare, anche in questa occasione, che il numero dei sismi registrati a Rocca di Papa sarebbe ancor più considerevole se, a causa della sua troppa altitudine, gli strumenti non ne restassero più o meno perturbati dai forti venti che lassù quasi sempre imperversano; e talora la perturbazione raggiunge tale intensità da render vana la ricerca di sismogrammi, anche d'una certa importanza, registrati altrove, e, a più forte ragione, di quelli più o meno microscopici, eppur sempre utili ai nostri studî. Si aggiunga il frequente disturbo, arrecato ai sismografi e perfino ai sismoscopii, dal suono delle campane del sottostante paese, specialmente nei giorni festivi, e così pure quello proveniente dai lavori in una vicinissima cava di pietre, e si resterà pienamente convinti che l'ubicazione dell'osservatorio, giudicata opportuna dal mio predecessore, quando gli strumenti non erano allora in grado di risentire gli effetti delle predette cause di perturbazione, risulta ormai inadatta per le moderne esigenze della sismometria;

(1) Per non parlare che delle sole repliche del terremoto Marsicano del 1915 registrate a Rocca di Papa, esse sommano alla bellezza di 1275 dal 13 gennaio al 30 giugno 1915.

e perciò sarebbe logico, dopo l'esperienza di più d'un trentennio, che l'osservatorio venisse trasferito in altra località meglio rispondente ai fini scientifici per i quali fu decretato.

Alla comunicazione del prof. Agamennone il Socio V. Cerulli, che conosce bene l'osservatorio di Rocca di Papa, aggiunge di esser convinto anche lui che il trasferimento del medesimo ormai s'imponga nell'interesse degli studî sismici, ed opina che potrebbe sorgere senz'altro nei dintorni della stessa Capitale in località sufficientemente lontana da strade rotabili e da linee tramviarie e ferroviarie. A tal riguardo, egli fa riflettere che molti altri osservatorî somiglianti importantissimi, tanto in Italia quanto all'estero, si trovano precisamente presso grandi città e perfino entro le stesse; e che qualche eventuale disturbo, causato dall'attività umana, è largamente compensato dai numerosi vantaggi provenienti dalla immediata vicinanza di un grande centro intellettuale, munito di istituti scientifici, biblioteche, laboratorî, officine meccaniche ecc. Ad ogni modo, fa rilevare che le eventuali cause di perturbazione su apparati sismici in Roma non saranno certo più numerose e dannose di quelle sopra esposte dall'Agamennone per l'osservatorio di Rocca di Papa.

A tal proposito gli piace di ricordare come un sismografo installato fin dal 1909 al Collegio Romano, nell'atrio del R Uff. Centr di Met. e Geod. e, cioè, proprio nel centro di Roma, ha reso e rende ancora preziosi servigi. col registrare numerosi terremoti e talvolta alcuni, la cui registrazione viene perduta a Rocca di Papa per il forte disturbo del vento [1]. Se si volesse un osservatorio sismico che risentisse il meno possibile le perturbazioni atmosferiche e quelle derivanti dall'attività umana, non sarebbe difficile farlo sorgere in una località propizia poco esposta ai venti e distante da centri abitati e da vie rotabili, tramviarie e ferroviarie; ma, in tal caso, sarebbe pur necessario dotarlo di ben più larghi mezzi di quelli ora concessi agli attuali osservatorî, e soprattutto per provvedere alle forti spese di una sufficiente biblioteca e di una conveniente officina meccanica. Oltracciò, sarebbe indispensabile retribuire gli impiegati con stipendî proporzionati ai gravissimi sacrifici imposti ad essi ed alle loro famiglie, pel fatto di dover vivere segregati dal consorzio umano!

A tal proposito, ricorda che il chiarissimo consocio prof. Ròiti, nelle ferie del 1918, ebbe a comunicare a quest'Accademia alcune sue idee intorno all'Osservatorio Vesuviano, e tra le altre considerazioni diceva che « *sarebbe*

[1] *Le registrazioni sismiche a Roma nel triennio 1910-1912*. Rivista di astron. e scienze affini, anno VII, maggio 1913, Torino.

inumano ed antiscientifico pretendere la permanenza di un personale di ruolo là su relegato, che dovesse consacrarsi esclusivamente allo studio dei problemi offerti dal Vesuvio », ed aggiungeva che « *non è possibile compier lassù un corso metodico e continuativo di ricerche scientifiche, e ciò non solo in considerazione del personale.....* »; e più sotto: « *..... per le rimanenti operazioni e deduzioni di carattere continuativo è indispensabile stabilire una sede in Napoli..... e che gli impiegati scientifici di ruolo agiranno comunemente nella sede di Napoli e solo occasionalmente all'Osservatorio* ». Ma se per il Vesuvio è ovvio che debba esistere un permanente punto di osservazione nei suoi fianchi, quale sentinella avanzata, questa necessità non si vede per l'osservatorio di Rocca di Papa il quale, per le ragioni accennate dall'Agamennone, si trova in gran disagio in quel paese di montagna, anzi con evidente danno della scienza e sacrificio inutile del personale. E tanto meno si vede la necessità che lo stesso direttore vi abbia a risiedere in permanenza, quando si consideri che all'osservatorio stesso abitano già l'assistente ed il custode, e non v'è neppure posto per l'abitazione del direttore, costretto a dimorare nel sottostante paese.

Meccanica. — *Sul calcolo dell'energia del vento.* Nota I preliminare del dott. Mario Tenani, presentata dal Corrisp. G. Arturo Crocco [1].

1. In un recente lavoro è stato dimostrato che, nel caso ideale in cui non esistano perdite per attrito e per vortici, l'energia utilizzata da un motore a vento in un determinato intervallo di tempo raggiunge al massimo i due terzi di quella posseduta dall'aria in moto che ha attraversato la macchina stessa; e siccome il rendimento delle migliori eliche attuali può raggiungere l'85 90% nelle migliori condizioni di funzionamento, si ha in definitivo che l'energia utilizzata può raggiungere la metà di quella posseduta dall'aria che attraversa il motore [2].

Poichè la forza viva dell'unità di volume d'aria in moto è proporzionale al quadrato della sua velocità e attraverso il motore a vento passano in ogni secondo, per ogni unità di superficie, tante unità di volume d'aria quanto è la velocità del vento, risulta che la potenza utilizzabile in ogni istante è proporzionale al cubo della velocità suddetta. Se la superficie interessata del motore a vento è S mq. se σ indica la massa di 1 mc. d'aria,

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] W. Hoff, *Zeitsch. für Flugtechnik und Motorluftschiffhart*, 15 agosto 1920.

V la velocità del vento in m/sec. e se ϱ è il rendimento dell'organo propulsivo, la potenza P del motore in kgm/sec. sarà:

$$P = \varrho \frac{S a V^3}{3}; \text{ e in cavalli vapore: } P' = \varrho \frac{S a V^3}{225}.$$

Il lavoro prodotto in un determinato periodo di tempo T sarà l'integrale di tale funzione esteso a tale intervallo di tempo; e da esso si potrà dedurre, dividendo pel tempo, la potenza media P'_m nella località considerata.

Sarà quindi in cavalli-vapore (ritenendo a praticamente costante e uguale ad a_0, media annua della densità dell'aria)

$$P'_m = \frac{S a_0}{225\,T} \int_0^T \varrho V^3 dT .$$

In tale integrale potremo sostituire a ϱ, variabile con la velocità del vento, un valore costante ϱ_m intermedio fra gli estremi fra cui varia ϱ quando il motore è in funzione, e scrivere

$$P'_m = \frac{S a_0 \varrho_m}{225} \frac{\int_0^T V^3 dT}{T} .$$

Si ritrova così che la potenza media di un motore a vento in un determinato periodo di tempo si può ritenere proporzionale alla media dei cubi delle velocità osservate del vento. Questa media permette un comodo confronto tra le varie località nel medesimo intervallo di tempo; fra i vari intervalli di tempo (mesi) nella stessa località; fra le varie altezze a cui sia possibile collocare il motore a vento.

2. Il col. Crocco, avviandomi a queste ricerche destinate a servire di base a suoi studi sulle applicazioni pratiche dei motori a vento, trovò comodo definire come *media efficace della velocità del vento* in un dato periodo di tempo e in una data località, la radice cubica della media suddetta. Essa rappresenta infatti la velocità costante che avrebbe dovuto avere il vento in quella località, durante l'intervallo considerato di tempo, per dare al motore a vento una potenza costantemente uguale alla potenza media e cioè per fornire il medesimo lavoro meccanico. Questa media serve pertanto a caratterizzare le varie località e a dare un'idea della convenienza o meno dell'impianto dei motori a vento e del loro uso in determinati periodi di tempo.

Dopo quanto si è detto si vede che le conclusioni basate sulla considerazione delle medie aritmetiche della velocità del vento, quali comunemente sono offerte dalle pubblicazioni meteorologiche, possono condurre a risultati del tutto errati e non sono utilizzabili a questo scopo.

Lo studio della forza motrice del vento richiede invece una elaborazione delle osservazioni anemometriche che tenga conto dei cubi delle velocità osservate e che finora non era stata tentata.

Scopo di questo lavoro è quello di dar conto dei metodi seguiti e dei risultati conseguiti nella via dianzi fissata, in alcuni casi particolari già esaminati e dimostrare l'interesse che può offrire uno studio completo del problema, che, utilizzando le osservazioni anemometriche esistenti per le varie località, riuscirà a dare un'idea generale della convenienza di adottare su larga scala tale sorgente d'energia e fisserà nettamente gli scopi a cui essa si adatta.

3. Il calcolo della media dei cubi si presenta a prima vista estremamente complicato, se si pensa che la velocità del vento è estremamente variabile col tempo specie in prossimità del suolo. Riflettendo però che le oscillazioni a breve periodo, causate dagli ostacoli del suolo, intorno alla velocità media presentata dal vento e che determinano la *struttura del vento* o la sua *turbolenza*, non possono essere seguite o sfruttate da una macchina che coinvolga parti dotate di forti momenti d'inerzia, basta riferirsi pel calcolo ai valori medii della velocità del vento, come quelli che verrebbero indicati da un anemometro del tipo Robinson a registrazione continua. Ciò posto è facile trasformare la curva di registrazione che rappresenta l'andamento della velocità del vento col tempo, in una curva che rappresenti invece l'andamento del cubo della velocità del vento (ordinata) col tempo (ascissa); basterà poi calcolare l'ordinata media del diagramma ottenuto, per avere senz'altro la media dei cubi cercata e dedurne subito la velocità efficace.

Nella maggior parte dei casi non si possiede una registrazione continua della velocità del vento, ma solo i valori della velocità media durante un certo breve periodo intorno a una o più determinate ore del giorno. In tal caso la media dei cubi non si può eseguire nel senso sopra indicato; ma i rapporti tra la media dei cubi delle velocità osservate alle stesse ore per il considerato periodo di tempo in due luoghi diversi, ci daranno modo di eseguire utili confronti presso a poco equivalenti per quanto riguarda la convenienza dei luoghi, l'andamento annuo della potenza, ecc. al calcolo sopra accennato.

Per la trasformazione del diagramma, nei casi che ho dovuto esaminare, ho ideato uno speciale pantografo che permette di passare direttamente alla curva di registrazione alla curva dei cubi; ma nei casi di osservazioni discrete è forse più comodo seguire uno di questi due procedimenti: a) *grafico*, descrivendo il diagramma su carta che potremo chiamare semi-cubica a somiglianza dell'ordinaria carta semi-logaritmica e deducendo l'ordinata media con un planimetro; b) *statistico*, determinando la frequenza dei singoli valori della velocità del vento, moltiplicando poi per i rispettivi cubi e calcolando la media di questi aritmeticamente.

Petrografia. — *Su la « Italite » e la « Vesbite » di H. S. Washington.* Nota di U. Panichi, presentata dal Socio Ettore Artini (1).

Il prof. Washington del Carnegie Geophysical Laboratory di Washington, in un suo recente viaggio in Italia ebbe in dono un frammento di roccia (circa 80 grammi), quasi totalmente costituito da cristalletti leucitici e con l'indicazione di provenienza dai pressi di S. Carlo, sul fianco occidentale del vulcano di Roccamonfina, dove la roccia costituirebbe « una vera corrente lavica con una lunghezza di più di 100 metri ed uno spessore notevole » (2).

Il prof. Washington, che ha esaminato il frammento, ha dato alla roccia, con pensiero molto gentile, il nome di *Italite*. Egli poi ha proposto anche il nome *Vesbite* per la roccia costituente un « blocco rigettato » del Monte Somma, formato da leucite e da melilite. Tale roccia però potrebbe, secondo l'Autore, chiamarsi anche *Italite melilitica* (3).

Ora, poichè la regione di Roccamonfina fu da me percorsa e studiata negli anni scorsi (4), senza che la suddetta colata mi si presentasse, io sono tornato espressamente a visitare il fianco occidentale del gran cono e specialmente le vicinanze del paese di S. Carlo; ma neppure in questa nuova visita ho potuto osservarla.

Ciò fa pensare alla possibilità che il campione esaminato dal professore Washington rappresenti non un tipo di roccia in colata, ma solo un piccolo blocco corrispondente ad un prodotto o di concentrazione magmatica, o di alterazione intercraterica. Questa supposizione troverebbe appoggio nel fatto che di tali blocchi essenzialmente leucitici se ne possono osservare disseminati anche altrove, come ad esempio, nel Vulcano Laziale e nel M. Somma.

Ad ogni modo io non ho trovato a Roccamonfina neppure in blocchi erratici questo tipo tutto leucitico; ma non credo impossibile che in rocce ricchissime di leuciti, come ad esempio nelle tefriti dei pressi di Ponte, si possano anche rinvenire noduli, quali masse costitutive accessorie, simili a quella descritta da Washington.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1921.

(2) H. S. Washington, *Sull'Italite: un nuovo tipo di roccia leucitica*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta 4 giugno 1920, pag. 425.

(3) Id., id., pag. 431.

(4) U. Panichi, *Ricerche petrografiche su la Regione Aurunca*. Lavoro terminato sulla fine del 1919 e tuttora in corso di stampa presso la Soc. Ital. di Scienze, detta dei XL.

Ora, se l'esistenza della colata di *Italite* di S. Carlo non venisse confermata, mi pare (e forse anche il prof. Washington sarà di questa opinione) che non sarebbe più necessaria la creazione di un nome nuovo di roccia per una masserella accessoria; e, ad ogni modo, riterrei che il bel nome *Italite* potrebbe venir riservato ad altra roccia o minerale che fossero in avvenire scoperti come tipicamente esistenti in Italia.

Ed anche per il blocco del M. Somma, non sarebbe allora da conservare nè il nome di *Italite melilitica*, una volta soppresso quello di *Italite*, nè quello di *Veshite*, trattandosi di un semplice blocco rigettato, molto più che tal nome potrebbe anche creare qualche confusione col nome *Veshina*, proprio di un minerale assai raro della stessa località.

Aggiunta sulle bozze.

Il dott. Blanc (che donò al prof. Washington alcuni campioni di varie località, fra cui quello leucitico in questione), da me interpellato, mi ha detto che ritiene esser nata confusione fra i campioni da lui forniti, come del resto egli comunicò allo stesso prof. Washington fino da quando ebbe comunicazione della sua Nota.

La gentile risposta del dott. Blanc mi rende evidentemente ancor più sicuro del risultato negativo delle ricerche da me fatte in proposito presso S. Carlo.

Chimica. — *Carvomentoli attivi dalla riduzione del carvone con platino* [1]. Nota del dott. V. Paolini, presentata dal Corrisp. A. Peratoner [2].

In alcune precedenti Note [3] ho comunicato i risultati delle mie prime indagini sui carvomentoli, dirette essenzialmente a separare ed individuare i diversi isomeri otticamente attivi, di cui la formula di costituzione di p.mentanol[2] lasciava prevedere l'esistenza in numero di 8 a causa di tre atomi di carbonio asimmetrici. Alle ricerche sul composto racemico dal carvenone, e sul prodotto levogiro dall'α-fellandrene, faccio seguire nella presente Nota lo studio di un altro carvomentolo levogiro, segnalato fin dal

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico Farmaceutico della R. Università di Roma.

[2] Presentata all'Accademia il 16 agosto 1921.

[3] R. Accademia dei Lincei [5] *28*, 2°, 82; 134. Vedi anche i fascicoli precedenti del presente volume.

1911 dal Vavon (1), ma che ora ho riconosciuto anch'esso quale miscuglio di isomeri ottici.

Il carvomentolo in parola, ottenuto da questo autore per riduzione diretta del carvone ordinario (destrogiro) mediante platino ed idrogeno, presentava la rotazione ottica specifica $[\alpha]_D = -24°,7'$.

Preparandomi questo alcool di partenza secondo le indicazioni del Vavon, ma curando di giungere alla riduzione completa per assorbimento della quantità teorica di idrogeno, ho ricavato un prodotto che presentava tutte le proprietà descritte, tranne del potere rotatorio, che ho trovato notevolmente più basso, cioè $[\alpha]_D = -2°,75'$.

Mi sorse subito il sospetto di essere di fronte ad un corpo non unico, ma, non essendo racemo, costituito da un miscuglio di isomeri ottici, di cui l'uno o l'altro potesse prevalere a seconda del modo di riduzione. E tale assunto mi venne confermato dalla separazione accurata dei componenti del miscuglio, che ho operato nel modo in precedenza già da me descritto e caratterizzato come « metodo a freddo » di preparazione e di purificazione di ftalati acidi dell'alcool terpenico. Nel caso in specie poi il lavoro è riuscito particolarmente faticoso per la natura persistentemente molle e resinosa degli eteri ftalici, che poterono venire ridotti a sostanze cristallizzabili e pure solamente a traverso ripetute trasformazioni in ftalati doppî di alcool e di argento, e di alcool e stricnina.

Potei isolare in tal modo due carvomentoli, uno destrogiro con $[\alpha]_D = +8°,29'$, l'altro levogiro con $[\alpha]_D = -8°,54'$, i quali con ogni probabilità stanno nel rapporto di antipodi ottici.

Merita intanto di essere notato, che di questi due carvomentoli quello levogiro sembra identico con uno degli isomeri levogiri, che avevo ricavato dal prodotto di riduzione del nitro α.fellandrene, e che possiede eguale potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -8°,63'$.

Essendo questo prodotto precedentemente stato designato come l-β.carvomentolo, ne seguirebbe che per i carvomentoli della presente Nota si debba mantenere la notazione di d-β.carvomentolo e l-β.carvomentolo.

Ftalato di d-β.carvomentolo e stricnina. — L'etere ftalico acido (2) dell'alcool di riduzione, sciropposo, nella salificazione con stricnina fornisce un prodotto solido, e non pastoso, solamente se prima è stato alquanto depurato attraverso il sale doppio argentico, cristallizzabile dall'alcool; depurazione del resto che lascia l'etere acido sempre sciropposo. Il sale doppio di stricnina solido, preparato poi con l'alcaloide libero, si scinde in due frazioni dotate di solubilità marcatamente diverse in alcool-etere. La frazione di sale meno solubile è destrogira. Facilmente solubile in alcool, viene ri-

(1) Comptes rendus, 153, 68 (1911).

(2) Per la modalità della preparazione vedi le Note precedenti sui Carvomentoli.

cristallizzata ad oltranza da quello diluito, sino ad avere costanti il punto di fusione a 154° ed il potere rotatorio $[\alpha]_D = +15°,84'$ (in alcool assoluto).

Ftalato acido di d-β. carvomentolo. — Si ottiene cristallizzabile soltanto dal puro sale di stricnina precedente, agitandone la soluzione alcoolica con eccesso di acido cloridrico diluito. Comunque ricristallizzato non muta il suo punto di fusione a 85°, nè il potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = +38°,53'$. Rappresenta quindi una sostanza unica.

Gr. 0,355 consumarono cc. 11,6 di $NaOH\frac{N}{10}$, mentre un acido monobasico $HOOC.C_6H_4.COOC_{10}H_{19}$ richiede cc. 11,67.

d-β. Carvomentolo. — Saponificando lo ftalato acido si ottiene un carvomentolo destrogiro con $[\alpha]_D = +8°,29'$ che è sostanza unica, perchè dall'anidride ftalica a freddo, senza formazione di alcun altro prodotto secondario, viene eterificato direttamente allo ftalato acido destrogiro, fusibile a 85°,

p. eb. 218° (corr) ; $\delta_{15°} = 0,9074$; $n_{D_{15}} = 1,464$

Carvomentolo gr. 15,064; alcool assoluto 100 cc.; $\alpha_D = +2°,30'$ (tubo lungo 2 dm.) onde $[\alpha]_D = +8°,29'$.

Ftalato di l-β. carvomentolo ed argento. — Le acque madri di cristallizzazione del sale di stricnina destrogiro contengono un altro sale di questo alcaloide, estremamente solubile, ma sciropposo, che però è sinistrogiro. Per isolare questo non giova, come prima, lo ftalato acido corrispondente, che si libera dal sale di stricnina sempre molle e resinoso. Bisogna depurarlo attraverso il suo sale di argento, che viene precipitato dalla soluzione acquosa del sale ammoniacale (privo di ogni eccesso di ammoniaca) mediante nitrato argentico. Cristallizzato dall'alcool etilico costituisce laminette bianche, soffici, che fondono a 180–182° (1).

l-β. Carvomentolo. — Rigenerando dal sale d'argento precedente l'etere acido dell'alcool, persiste ancora lo stato sciropposo di esso. Il carvomentolo corrispondente si isola per saponificazione della massa sciropposa così depurata, e per distillazione a vapor d'acqua.

p. eb. 218° (corr) ; $\delta_{15°} = 0,9073$; $n_{D^{15}} = 1,463$

Carvomentolo gr. 14,621 ; alcool assoluto 100 cc. : $\alpha_D = -2°,30'$ (tubo lungo 2 dm), onde $[\alpha]_D = -8°,54'$.

(1) Il sale argentico, precedentemente preparato, del prodotto dal fellandrene, sembra meno puro, dapoichè fonde qualche grado prima, ed è anche lievemente colorato in giallino.

Chimica. — *Azossiammidi e diazocomposti.* Nota di Antonio Pieroni, presentata dal Socio A. Angeli [1].

La fenilazocarbonammide fu ottenuta la prima volta da O. Widman [2] per spontanea trasformazione del nitrosofenilsemicarbazide ed in seguito per ossidazione del fenilsemicarbazide con permanganato in presenza di acido solforico. Più tardi Thiele [3] consigliò di eseguire l'ossidazione con permanganato in ambiente neutro, cioè in presenza di solfato di magnesio e quindi di portare in soluzione il biossido di manganese e l'idrato di magnesio formatosi con anidride solforosa.

Io ò creduto opportuno di sostituire con l'acido ossalico l'anidride solforosa, che durante la reazione viene in parte ossidata ad acido solforico, il quale decompone l'ammide formatasi. Soltanto pochi anni or sono Angeli [4] riprese lo studio di detta ammide:

$$C_6H_5N : NCONH_2$$

e dimostrò che questa si decompone in presenza di potassa caustica per dare in un primo tempo:

$$C_6H_5N : NCOOK$$

sale molto instabile che a sua volta reagisce con l'alcali libero per dare carbonato di potassio e fenildimmide; $C_6H_5N : NH \longrightarrow$ e quindi

$$C_6H_6 \text{ e } N_2.$$

Dimostrò inoltre che allo stesso modo di tutti gli azoderivati l'ammide di Widman, trattata con acqua ossigenata, in soluzione di acido acetico glaciale dà l'azossiderivato corrispondente:

$$C_6H_5N : NCONH_2$$
$$\|$$
$$O$$

Composto di grande interesse poichè à stretta analogia con i derivati del diazobenzolo; in ambiente alcalino esso reagisce anche più prontamente e nettamente degli stessi composti diazoici, così con il β naftolo dà l'azoderivato corrispondente dal caratteristico colore rosso scarlatto.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1921.
(2) B. 28, 1925.
(3) l. c. 2599.
(4) R. A. L., 26, I, sem. 207 (1917).

Allo scopo di generalizzare le interessanti reazioni accennate e di portare un certo contributo alla tanto dibattuta questione riguardante la struttura ed il comportamento dell'idrato di diazobenzolo, ò creduto opportuno intraprendere lo studio di altre ammidi e di alcuni nitrili.

Qui mi limito ad esporre brevemente i risultati ottenuti con le seguenti sostanze:

$C_6H_5N:NCONH_2$; $BrC_6H_4N:NCONH_2$; $NO_2C_6H_4N:NCONH_2$; $BrC_6H_4N:NCN$; $NO_2C_6H_4N:NCN$; $Br_2C_6H_3N:NCONH_2$.

La bi- la mono bromo e la nitroazocarbonammide vennero da me preparate con metodi differenti da quello seguìto da Widman per la sua ammide, metodi che verranno descritti in altra parte.

Ad eccezione della bibromofenilazocarbonammide tutte le altre più o meno facilmente per azione dell'acqua ossigenata in acido acetico glaciale, diedero l'azossiderivato corrispondente alla formula generale

$$RN:N.\underset{\underset{O}{\|}}{C}ONH_2$$

Per quello che si sa dopo i lavori di Angeli sulla costituzione degli azossi composti [1] devono esistere le due forme isomere:

$$RN:N.\underset{\underset{O}{\|}}{C}ONH_2 \qquad RN:N\underset{\underset{O}{\|}}{C}ONH_2$$

ma poichè le ricerche dirette nel senso di ottenerle finora non condussero al voluto risultato e nel dubbio che gli azossiderivati ottenuti corrispondessero a sostanze più complesse esprimibili p. es. con la formula

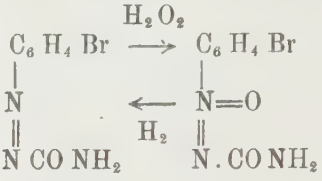
$$\begin{array}{l} R.N-N.CONH_2 \\ O\diagup\quad\diagdown O \\ R.N-N.CONH_2 \end{array}$$

o con altre simili ò voluto determinare il peso molecolare della fenilazossicarbonammide il quale risultò di 160, mentre il calcolato per $C_6H_5N_2OCONH$ è 165.

La costituzione della p.bromofenilazossiammide è stata anche riconfermata dalla facilità con la quale si lascia ridurre. La sua soluzione acquosa alcoolica trattata con polvere di zinco ed acido acetico si decolora immediatamente; se al liquido filtrato si aggiunge permanganato di potassio in quantità sufficiente si depone la p. bromofenilazocarbonammide cristallizzata in sottili aghi di colore giallo aranciato.

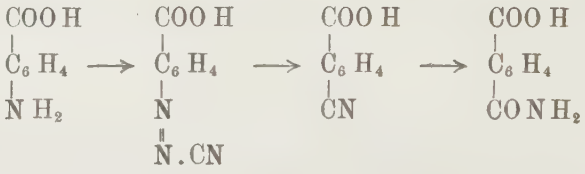
[1] G. Ch. XLVI, II, pag. 67.

Dunque la trasformazione dell'una sostanza nell'altra si ottiene con relativa facilità nel senso rapresentato dallo schema:



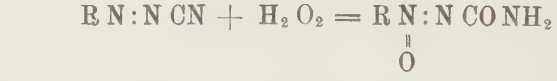
Devo ancora aggiungere a proposito di questa azossiammide che essa reagisce in soluzione acquosa con ipobromito di potassio senza sviluppo gassoso, il prodotto della reazione con β naftolo si colora in bruno, successivamente dà un leggero sviluppo gassoso e formazione di bromofenilazoβ-naftolo. Mi riservo di studiare ulteriormente questa reazione.

La p. nitroazossicarbonammide, che si ottiene al solito modo per azione dell'aqua ossigenata sull'ammide corrispondente sciolta in acido acetico glaciale è meno stabile della corrispondente ammide bromurata. Ciò è dovuto al gruppo NO_2 che più stabile e più negativo dell'azossigruppo tende ad eliminarlo; per una ragione analoga gli acidi p. e m, aminobenzoici, trattati opportunamente con nitrito di sodio e ciamuro di potassio, anche se si opera a —7°, dànno luogo spontaneamente alle trasformazioni seguenti:

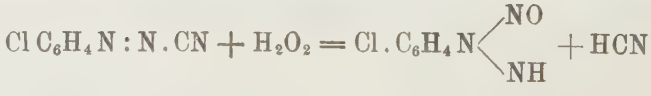


mentre la p. nitro e la p. bromoanilina trattate allo stesso modo a 0°, dànno il diazonitrile corrispondente relativamente stabile.

Il p. nitro e p. bromonitrile (forme anti) sciolti in acido acetico e trattati con acqua ossigenata reagiscono in modo analogo secondo la reazione seguente:



Bamberger e O. Baudisch [1] trattarono in ambiente neutro con acqua ossigenata il p. clorodiazobenzolo, ottennero per la massima parte la p. cloroazocarboneammide e piccole quantità di nitrosofenilidrossilammina la cui formazione fu dai citati autori spiegata con l'equazione seguente:



[1] B. 45, 2154.

ma per i fatti da me stabiliti questa interpretazione non è esatta; più conforme alla realtà è quella data da Angeli (1). Egli previde che si doveva formare prima l'azossinitrile

$$Cl\,C_6\,H_4\,N:NC\,N + H_2\,O_2 = Cl\,C_6\,H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,CN + H_2\,O$$

da cui per idrolisi

$$Cl\,C_6H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,CN \xrightarrow{H_2O} Cl\,C_6H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N.OH \text{ e } HCN \qquad (3$$

La 2 — 4 bibromofenilazocarbonammide nelle ordinarie condizioni di esperienze non dà l'azossiderivato corrispondente; evidentemente il carattere, il numero, e la posizione dei sostituenti nel gruppo benzenico esercitano una grande influenza sulla capacità del diazogruppo ad addizionare stabilmente un atomo d'ossigeno.

Tutte le azossiammidi quì descritte, mostrano una grande analogia coi diazocomposti; oltre reagire con il β naftolo reagiscono come questi col pirrolo e derivati, compreso l'indolo, coi fenoli, con l'etere acetacetico, col nitroetano, ma di queste reazioni mi occupo particolarmente in altra Nota.

Della p. bromoazossicarbonammide trattata opportunamente con potassa caustica, sono riuscito ad isolare il sale potassico dell'acido corrispondente

$$Br\,C_6\,H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N.COO\,K.$$

che è il sale del primo azossiacido noto.

Questo con gli acidi svolge anidride carbonica, con il β naftolo manifesta intensamente la reazione dei diazocomposti; così resta dimostrato che le azossiammidi con gli alcali, subiscono le seguenti trasformazioni:

$$Br\,C_6H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,CO\,NH_2 \rightarrow Br\,C_6H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,COOH \rightarrow Br\,C_6H_4\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:NH \rightarrow$$

$$\rightarrow Br\,C_6H_4\,N:N.OH.$$

È noto che i due isomeri

$$C_6\,H_5\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,C_6\,H_4\,OH \text{ e } C_6\,H_5\,\underset{\underset{O}{\|}}{N}:N\,C_6\,H_4\,OH$$

per ossidazione dànno entrambi $C_6\,H_5\,N:NOH$.

(1) R. A. L. LXXVI, 1° sem., pag. 212.

A cui si deve arrivare attraverso le trasformazioni:

$$\left.\begin{array}{l} C_6H_5N(=O):NC_6H_4OH \rightarrow C_6H_5N(=O):N.COOH \rightarrow C_6H_5N(=O):NH \quad (5 \\ C_6H_5N:N(=O)C_6H_4OH \rightarrow C_6H_5N:N(=O)COOH \rightarrow C_6H_5N:N(=O)H \quad (6 \end{array}\right\} \rightarrow C_6H_5N:N.OH$$

La nitrosoammina della fenilurea:

$$C_6H_5N(CONH_2) - N:O$$

in ambiente alcalino con β naftolo dà, come i diazoderivati e le azossiammidi il fenilazonaftolo.

Tutto dunque induce a credere che possano esistere i due isomeri:

$$C_6H_5N(=O):NH \quad e \quad C_6N_5N:N(=O)H$$

Cosicchè, come già ammise Angeli, i diazotati normali sarebbero rappresentati dalle formule generali

$$\text{I} \quad O=N(R)=NH \qquad\qquad \text{II} \quad N(R)=NH=O$$

Hantzsch ammette invece che ai diazotati normali ed agli iso corrispondano rispettivamente le formule:

$$\begin{array}{c} RN \\ \| \\ HO.N \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} RN \\ \| \\ N.OH \end{array}$$

le quali differiscono unicamente dalla loro configurazione e quindi male spiegano il diverso comportamento dei varî derivati del diazobenzolo e specialmente la grande facilità con cui i diazonormali prendono parte a molte reazioni. Questa invece è resa più comprensibile se si ammette nei diazotati, come è espresso nelle formule I e II l'esistenza di un sistema di doppi legami gemelli ([1]).

([1]) La presente Nota coi relativi dati sperimentali verrà pubblicata per esteso in altro periodico.

Chimica fisiologica. — *Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia* (1). Nota III di Sabato Visco, presentata dal Corrisp. D. Lo Monaco (2).

In una Nota precedente (3) riferimmo come due ratti alimentati esclusivamente con farina di semi di *Ervum Ervilia* perdessero continuamente di peso, e come poi morissero l'uno al 18° giorno di esperimento e l'altro al 20° giorno, avendo perduto rispettivamente il 39 ed il 41.3 % del peso iniziale. Continuando le ricerche, il fatto ci si è ripetuto costantemente, come si rileva da quest'altri due protocolli che riassumiamo.

Ratto *A*, bianco, maschio, pesa gr. 238. Si mette in esperimento il 14 maggio del 1921, alimentandolo esclusivamente con farina di semi di *Ervum Ervilia*. Perde continuamente di peso, ed il 16 di giugno si trova morto. Pesa gr. 138. In 32 giorni ha perduto il 42 % del proprio peso. Nulla all'esame necroscopico.

Ratto *B*, bianco, maschio, pesa gr. 145. Si mette in esperimento il 15 maggio del 1921, alimentandolo esclusivamente con farina di semi di *Ervum Ervilia*. Perde continuamente di peso ed il 16 giugno si trova morto. Pesa gr. 83. In 32 giorni ha perduto il 41,9 % del proprio peso. Nulla all'esame necroscopico.

Se questi risultati dimostravano in modo indubbio che i ratti alimentati soltanto con farina di semi di ervo perdevano continuamente di peso, fino ad un limite incompatibile con la vita, nulla però ci rivelavano sulle cause intime che determinavano tale continua ed inesorabile perdita di peso, che, ipoteticamente, poteva dipendere tanto da qualche principio tossico presente nei semi e capace di provocare un'esagerata o abnorme scomposizione di qualche tessuto o l'alterazione di qualche organo dell'animale in esperimento, quanto dall'insufficienza quantitativa o qualitativa del cibo ingerito. Nuove ricerche si rendevano perciò necessarie. Nostra prima cura fu quella di sgomberare il terreno delle indagini dalla prima ipotesi; e perciò somministrammo a due ratti una certa quantità di estratto acquoso dei semi di *Ervum Ervilia*, preparato come segue: In un apparecchio a spostamento si estraeva con acqua distillata una certa quantità di semi ridotti in polvere finissima; l'estratto si defecava con acetato barico di piombo, si allontanava

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. D. Lo Monaco.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1921.

(3) Ved. questi Rendiconti, fasc. 7°-8°, ottobre 1921.

il piombo con H^2S, si filtrava ed il filtrato si concentrava a bagno maria. Si otteneva così una massa molle di colore giallo bruno, attaccaticcia, igroscopica, con sapore urente, con reazione acida al tornasole, insolubile nell'etere, nell'alcool assoluto, nell'acetone, solubilissima in alcool, riducente il liquido di Fehling, ecc. ecc. Col metodo descritto, che poi è uno di quelli più comunemente usato per l'estrazione dei glicosidi, si ottenevano da 1 kg. di farina di ervo, circa 10-12 gr. della sostanza descritta, e costituita in massima parte, come risulta da alcune ricerche iniziate in questo laboratorio dal dottor Giuseppe Salimei, da due glicosidi diversi. Riassumiamo i protocolli di queste esperienze.

Ratto *A*, bianco, femmina, pesa gr. 166. Si mette in esperimento il 2 maggio 1921, alimentandolo con farina di ceci, contenente il 10 % di estratto di ervo. Il 6 maggio si aggiunge a tale alimentazione un miscuglio a parti uguali di grasso di bue ed estratto di ervo. Il 9 maggio l'animale pesa gr. 170. In sette giorni ha complessivamente ingeriti 11 grammi di estratto di ervo, ed ha guadagnato 4 grammi in peso. Appare sana, è incinta, ed il 18 dello stesso mese partorisce 8 figli vivi che però non allatta.

Ratto *B*, bianco, maschio, pesa gr. 220. Si mette in esperimento il 6 maggio 1921, alimentandolo con farina di frumento contenente il 10 % di estratto di ervo. Il 16 maggio pesa gr. 221. In 10 giorni ha ingeriti complessivamente gr. 14 di estratto di ervo, ed ha guadagnato 1 grammo in peso. Appare sano.

Assodato così che i glicosidi estraibili dall'ervo col metodo indicato non influenzavano affatto il peso degli animali, passiamo a verificare quale delle due altre ipotesi indicate trovasse rispondenza nei fatti. Le ricerche bibliografiche, eseguite per conoscere la costituzione chimica dei semi dell'*Ervum Ervilia*, hanno dato risultati negativi. Il Wehmer [1] dice che essa è uguale a quella dell'*Ervum Leus*, ma ciò, volendo compiere un'indagine rigorosa sul valore del seme in oggetto, non poteva appagarci; perciò ne riprendemmo l'esame ottenendo i seguenti valori medi: sostanze azotate, 23.6 %; sostanze non azotate, 62.49 %; ceneri, 3.45 %; acqua, 13.15 %; amido, 52.90 %; cellulosa, 5,50 %; grasso, 1.09 %. Anche questo terzo gruppo di esperimenti fu eseguito sui ratti tenuti in gabbie da ricambio in maniera da poter raccogliere separatamente le orine dalle feci, ed ai quali somministrammo, come alimento, del pane fatto con farina di ervo impastata con acqua, senza lievito, e cotto nella stufa a secco a temperatura non superiore ai 90° C. Come alimento di confronto scegliemmo il pane di farina di *Triticum sativum*. Tanto di un pane quanto dell'altro determinammo quotidianamente il contenuto in H^2O, e tre volte per settimana il contenuto in azoto col metodo di Kjeldahl.

Riassumiamo nelle tabelle seguenti i risultati ottenuti.

[1] Wehmer C., *Die Pflanzenstoffe*, Jena, 1911.

Ratto n. 1.

TABELLA *A*.

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di semi di *Ervum Ervilia*.

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	220,000
1	7,677	0,233	2,210	0,067	0,166	0,199	—	0,033	219,000
2	6,413	0,194	0,730	0,026	0,168	0,190	—	0,022	209,000
3	4,288	0,129	1,248	0,035	0,094	0,120	—	0,026	203,000
4	6,050	0,183	1,211	0,049	0,134	0,140	—	0,006	198,000
5	6,305	0,191	1,017	0,034	0,157	0,186	—	0,029	197,000
6	5,027	0,152	1,548	0,056	0,096	0,227	—	0,131	190,000
7	8,575	0,260	1,513	0,049	0,211	0,257	—	0,046	187,000
Totali	44,335	1,342	9,477	0,316	1,026	1,319	—	0,293	— gr. 33
	Percentuali . . .			23 54	74,46	128.56	—	28.56	—15,0 %

Ratto n. 1.

TABELLA *B*.

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di semi di *Ervum Ervilia*.

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	187,000
1	7,852	0,238	2,073	0,065	0,173	0,277	—	0,104	186,000
2	10,040	0,305	3,173	0,071	0,234	0,252	—	0,018	184,000
3	10,180	0,309	2,430	0,072	0,237	0,252	—	0,015	181,000
4	9,513	0,289	2,998	0,086	0,203	0,252	—	0,049	175,000
5	10,100	0 307	1,203	0,055	0,252	0,258	—	0,006	174,000
6	8,620	0,261	2,018	0,081	0,180	0,207	—	0,027	170,000
7	6,855	0,233	1,388	0,057	0,176	0,209	—	0,033	168,000
Totali	63,160	1,942	15,283	0,487	1,455	1,707	—	0,252	— gr. 19
	Percentuali . . .			25.08	74.92	124.19	—	11.19	—10,1 %

Ratto n. 1.

TABELLA *C.*

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di cariossidi di *Triticum sativum.*

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	168,000
1	11,290	0,203	2,158	0,081	0,122	0,204	—	0,082	168,000
2	9.865	0,177	1,243	0,042	0,135	0,111	0,024	—	167,000
3	10,318	0,185	0,663	0,028	0,157	0,138	0,019	—	167,000
4	10,470	0,188	0,695	0,028	0,160	0,137	0,023	—	167,000
5	10,345	0,186	1,188	0,015	0,171	0,141	0,030	—	168,000
6	9,530	0,171	0,315	0,011	0,160	0,120	0,040	—	170,000
7	10,548	0,189	0,795	0,032	0,157	0,120	0,037	—	171,000
Totali	72,366	1,299	7,057	0,237	1,062	0,971	0,091	—	+ gr. 3,0
	Percentuali . . .			18,24	81.76	91.43	8.57	—	+1.78 %

Ratto n. 2.

TABELLA *A.*

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di cariossidi di *Triticum sativum.*

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	230,000
1	10,040	0,180	1,058	0,050	0,130	0,115	0,015	—	225,000
2	10,705	0,192	1,403	0,046	0,146	0,095	0,051	—	220,000
3	10,035	0,180	1,078	0,036	0,144	0,084	0,060	—	219,000
4	9,781	0,177	0,750	0,028	0,149	0,100	0,049	—	216,000
5	11,335	0,204	0,725	0,028	0,176	0,134	0,042	—	216,000
6	10,045	0,180	0,315	0,008	0,172	0,109	0,063	—	216,000
7	11,503	0,207	0,930	0,033	0,174	0,128	0,046	—	217,000
Totali	73,444	1,320	5,259	0,229	1,091	0,765	0,326	—	— gr. 13
	Percentuali . . .			17.35	82.65	70.11	+ 29.89	—	—5,64 %

Ratto n. 2.

TABELLA *B*.

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di semi di *Ervum Ervilia*.

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	217,000
1	7,190	0,244	0,978	0.035	0,209	0,166	0,043	—	209,000
2	3,185	0,108	1,195	0,040	0,068	0,149	—	0,081	200,000
3	5,082	0,172	0,855	0,037	0,135	0,229	—	0,094	193,000
4	5,269	0,179	1,300	0,058	0,121	0,249	—	0,128	187,000
5	6,930	0,235	1,650	0,073	0,162	0,251	—	0,089	186,000
6	7,150	0,243	1,750	0,076	0,167	0,282	—	0,115	184,000
7	8,707	0,296	2,985	0,088	0,208	0,283	—	0,075	182,500
Totali	43,513	1,477	10,713	0,407	1,070	1,609	—	0,539	— gr. 35
	Percentuali . . .			27.48	72.52	150.37	—	50.37	—16.12 %

Ratto n. 2.

TABELLA *C*.

ALIMENTAZIONE: Pane fatto con farina di semi di *Ervum Ervilia*.

GIORNI	Alimento ingerito — Grammi	Azoto ingerito — Grammi	Feci emesse — Grammi	Azoto eliminato con le feci — Grammi	Azoto assorbito — Grammi	Azoto eliminato con le orine — Grammi	Bilancio dell'azoto +	Bilancio dell'azoto —	Peso dell'animale — Grammi
0	—	—	—	—	—	—	—	—	182,000
1	6,695	0,227	1,635	0,061	0,166	0,246	—	0,080	180,000
2	7,293	0,248	1,905	0,088	0,160	0,264	—	0,104	175,000
3	7,100	0,241	2,185	0,093	0,148	0,248	—	0,100	171,000
4	6,945	0,236	1,092	0,053	0,183	0,280	—	0,097	165,000
5	6,700	0,227	1,910	0,088	0,139	0,233	—	0,094	163,000
6	6,573	0,222	1,925	0,092	0,130	0,252	—	0,122	161,000
7	6,739	0,229	1,645	0,074	0,155	0,253	—	0,098	157,000
Totali	48,045	1,630	12,297	0,549	1,081	1,776	—	0,695	— gr. 25
	Percentuali . . .			33.68	66.32	164.29	—	64.29	—13,66 %

Paragonando il valore alimentare del pane di cariossidi di *Triticum sativum*, con quello del pane di semi di *Ervum Ervilia*, si rileva che:

1°) nell'alimentazione con pane di ervo l'azoto eliminato con le feci raggiunge sempre una cifra più alta, tanto in via assoluta quanto in via proporzionale a quella dell'azoto ingerito, che non nell'alimentazione con pane di frumento;

2°) il *minimum* di azoto, che nell'alimentazione con pane di frumento si raggiunge e supera con un quantitativo di esso uguale ad x, nell'alimentazione con pane di ervo non si raggiunge nè con quantitativi uguali ad x, nè con quelli uguali ad $x + y$.

Da quanto abbiamo esposto risulta che i ratti alimentati con semi di *Ervum Ervilia* perdono continuamente di peso sino ad un limite incompatibile con la vita, perchè col cibo che quotidianamente ingeriscono non arrivano a coprire nè i loro fabbisogni energetici, nè quelli azotati. Dei due *deficit* ha maggiore importanza quello azotato, perchè potrebbe eventualmente dipendere dal fatto che nella molecola proteica dell'ervo manchi qualcuno degli amino-acidi indispensabili all'economia dell'organismo dei ratti. La emissione di azoto urinario in quantità oscillanti dal 24 al 64 % in più di quello assorbito, farebbe pensare che l'aumentata scomposizione delle proteine dei ratti in esperimento sia la conseguenza della necessità di fornire al loro organismo qualche radicale di aminoacido indispensabile all'economia animale, e non quella di soddisfarne i bisogni energetici. Un confronto tra di loro delle tabelle *A* dei ratti n. 1 e n. 2 ci fa sembrare probabile questo modo di vedere. Ambedue gli animali perdono di peso; ma, mentre quello indicato col n. 2 assicura il suo bilancio azotato con, in media, gr. 0,095 di azoto al giorno, e copre i fabbisogni energetici bruciando le sue riserve di grassi; il secondo, pur ingerendo in media gr. 0,146 di azoto al giorno e pur disponendo di un abbondante tessuto adiposo, disintegra parte delle sue proteine, ma in misura così esigua [gr. 1.85 circa in una settimana (moltiplicatore 6.25) = calorie 1.6 al giorno] da rendere poco probabile che siano impiegate a colmare i fabbisogni energetici dell'animale. Ancora più dimostrativa è la tabella *B* del ratto indicato col n. 2, in cui, pur essendo aumentato l'azoto ingerito (in media gr. 0,208 per giorno); del 12 % nei confronti della settimana precedente, il *deficit* dell'azoto è aumentato di una cifra quasi uguale (13 %); ebbene, se la disintegrazione delle sostanze proteiche dipendesse da esigenze energetiche, in questo caso avrebbe dovuto essere maggiore, perchè l'animale non disponeva più di grandi riserve di grasso, avendo già perduto nella prima settimana circa 35 grammi di peso. Ciò non ostante, non ritenendo affatto di aver dimostrato con questo che le proteine dell'ervo siano *incomplete*, abbiamo ripreso lo studio dell'argomento adottando un diverso dispositivo sperimentale, col quale speriamo di potere ottenere risultati più certamente conclusivi.

Biologia. — *Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi*. Nota I del dott. Umberto D'Ancona, presentata dal socio B. Grassi (1).

Come è noto, fino dal 1893 Grassi e Calandruccio (2) avevano notato nei Leptocefali una particolare formazione circondante gli organi assili, e la avevano chiamata *scheletro gelatinoso* (*ialoscheletro*). In seguito Grassi, continuando le sue ricerche sull'argomento, osservò che questo ialoscheletro presenta esternamente, nelle parti in cui confina colla muscolatura del tronco, una *zona limitante* costituita, andando dall'esterno (dalla muscolatura) verso l'interno (lo ialoscheletro), dai seguenti strati: 1°) uno strato di tubuli paralleli alle fibre muscolari, provvisti di nuclei e verosimilmente aventi il valore di cellule; 2°) uno strato gelatinoso; 3°) uno strato di fibre oblique; 4°) un secondo strato di fibre oblique incrocianti le prime; 5°) un endotelio a cellule allungate; 6°) un secondo endotelio, a cellule poligonali, separato dal primo da una lacuna.

Questo interessante reperto, come pure le altre ricerche sulla morfologia dei Murenoidi, rimase inedito, essendo il Grassi passato nel 1898 a studiare altri argomenti. In seguito altri autori non fecero attenzione a queste formazioni. Il Sella (3) le accenna soltanto chiamandole *strati limitanti periferici*, ma non entra in maggiori particolari.

L'argomento meritava di essere ulteriormente approfondito e perciò ne ripresi l'esame su consiglio del prof. Grassi, che mise gentilmente a mia disposizione l'abbondante materiale, in parte raccolto e preparato per le sue ricerche e in parte continuato a raccogliere anche in questi ultimi anni, e mi affidò, sotto gli auspicii del R. Comitato Talassografico, lo studio della parte morfologica della sua opera sui Murenoidi.

I còmpiti che mi proposi furono: descrivere particolarmente le formazioni in parola nelle varie specie di Murenoidi; vedere quale origine avevano e se potevano essere messe in relazione colle condizioni esistenti in forme inferiori (*Amphioxus*); vedere come si comportavano nell'ulteriore sviluppo e quale significato funzionale potevano avere.

(1) Dall'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Grassi e Calandruccio, *Ulteriori ricerche sui Leptocefali*. Rendiconti R. Accad. Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1° sem., pag. 450 (1893).

(3) Sella M., *Sullo sviluppo dello scheletro assiale dei Murenoidi*. R. Comitato talassogr. ital., Mem. V. (1912).

Quì mi limito ad accennare brevemente ad alcuno di questi punti che formano oggetto di ricerche tuttora in corso.

Oltre che delle sezioni, mi sono valso principalmente di preparati per dilacerazione ottenuti togliendo i due strati muscolari del tronco e lasciando allo scoperto lo ialoscheletro. In tal modo gli strati limitanti rimangono in parte aderenti a quest'ultimo e possono venir esaminati sia a fresco sia con svariate colorazioni.

Tra le forme esaminate (*Congromuraena mystax*, *Conger conger*, *Anguilla anguilla*, *Ophisoma balearicum*, *Tilurus hyalinus*, *T. trichiurus*), ho trovato che i preparati migliori si ottengono dagli esemplari di *C. mystax* e perciò, e anche per l'abbondanza del materiale, ho studiato principalmente questa specie, cui essenzialmente si riferisce la seguente descrizione. Nelle altre specie esaminate ho riscontrato condizioni simili.

Il primo degli strati osservati dal Grassi, quello dei tubuli, si presenta nelle sezioni trasversali formato da due membranelle, l'una saldata allo strato muscolare, l'altra allo strato gelatinoso, riunite fra loro da tanti sepimenti perpendicolari in modo da formare attrettanti tubuli a sezione più o meno quadrangolare. Addossati alla membranella mediale si notano dei nuclei appiattiti.

Nei preparati per dilacerazione i tubuli si presentano di fronte, separati da linee longitudinali (che talvolta appaiono doppie), parallele alle fibre muscolari. Spessissimo si notano, nei tubuli, dei precipitati provenienti probabilmente da liquidi contenutivi. I nuclei, già osservati nelle sezioni, sono seriati, per lo più molto regolarmente, in linee oblique poste nel mezzo di ciascun miomero e seguenti l'andamento di questo; più raramente sono un po' più disordinati, ma mai ho osservato in un miomero più di un nucleo per tubulo. In corrispondenza ai miocommi, nei preparati per dilacerazione, lo strato dei tubuli appare generalmente strappato; però, nei tratti in cui rimane conservato, si osserva che i singoli tubuli terminano affusolati cogli estremi alternati, quelli di un miomero tra quelli del miomero adiacente. Nelle sezioni si vedono i miocommi attraversare lo strato tubulare e penetrare nello strato gelatinoso. Ritengo quindi di poter considerare i tubuli come altrettante cellule occupate quasi completamente da un vacuolo ripieno di un contenuto liquido.

Tra lo strato dei tubuli e lo strato muscolare appaiono spesso delle cellule stellate, probabilmente connettivali.

Medialmente ai tubuli segue, come s'è detto, uno strato gelatinoso, piuttosto spesso nelle semilarve, più sottile nelle larve. Questa differenza è specialmente evidente nell' *O. balearicum*. Nei Tiluri lo strato è molto sottile.

In esso strato gelatinoso, nelle forme giovani, non si distinguono nè fibre nè cellule; in alcune fra le semilarve più progredite invece si vedono delle cellule connettivali penetrarvi assieme colle fibre dei miocommi o al dorso

e al ventre dal connettivo sottostante all'epidermide. Nello strato gelatinoso decorrono dei vasi sanguigni in ordine metamerico.

I due strati di fibre possono dirsi immersi nella parte più interna dello strato gelatinoso. I fasci di fibre dello strato mediale sono più fitti, più sottili e più diritti; quelli dello strato laterale (almeno nei preparati) più radi, più robusti e più ondulati. Nei Tiluri e nell' *O. balearicum* invece ambedue gli strati presentano fasci ugualmente sottili. Le fibre (specialmente quelle dello strato laterale) non si vedono che indistintamente a fresco o colle più comuni colorazioni; sono invece meglio evidenti in preparati per dilacerazione colorati coll'ematossilina ferrica di Heidenhain, meglio ancora coi metodi di Bielschowsky - Levi e di Achúcarro - Rio Hortega.

Le fibre dello strato mediale hanno un andamento quasi normale alla direzione dei miomeri; così, corrispondentemente alle pieghe a Σ di questi (in cui si ha cioè nel mezzo un vertice rivolto verso il capo, e nelle parti dorsale e ventrale due rivolti verso la coda) [1], si ha nelle fibre una curva in corrispondenza all'asse del corpo colla convessità rivolta verso la coda, e due curve (una dorsale e una ventrale) colle convessità dirette in senso cefalico. Le curve delle fibre sono però più dolci che gli angoli dei miocommi, e così quelle incontrano questi con degli angoli più o meno acuti.

Un simile decorso hanno anche le fibre dello strato laterale, però in senso opposto; esse ripetono all'incirca l'andamento dei miomeri, ma la curvatura loro è molto meno rilevante che quella dello strato mediale. In conseguenza i due strati di fibre formano una sorta di graticcio.

Lo strato endoteliale laterale è addossato allo strato di fibre mediale tanto da sembrar situato nello stesso piano; esso consta di cellule allungate nello stesso senso di queste fibre. In ciascuna cellula si nota un nucleo per lo più ovale, più o meno allungato nel senso della maggior lunghezza, talvolta incurvato a semiluna (p. es. in *O. balearicum*).

L'endotelio più interno riveste lo ialoscheletro ed è formato da cellule poligonali col nucleo generalmente a semiluna.

Tra i due strati endoteliali esiste la lacuna notata dal Grassi, lacuna nella quale nelle sezioni si osservano spesso delle sostanze coagulate. Questa lacuna, per quanto nei preparati sia talvolta molto ampia, è verosimile che *in vivo* sia quasi virtuale. Nelle sezioni generalmente la lacuna appare continua, talvolta però sembra divisa da setti sottili; se questi siano dei veri setti oppure se risultino soltanto da sostanza coagulata, non posso dirlo. Certo è soltanto che in corrispondenza all'asse del corpo la lacuna è attraversata dai nervi spinali e che qui è realmente settata. Nei preparati per dilacerazione gli strati di fibre e gli endotelii sembrano continui anche in corrispondenza ai miocommi.

[1] Nei Tiluri, come è noto, questi ultimi mancano.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

1. Bompiani E. « Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici ». Pres. dal Socio Castelnuovo.

2. Sapuppo R. « Sul fenomeno dell'assorbimento gravitazionale ». Pres. dal Segretario.

3. Pontremoli A. « La doppia rifrazione accidentale meccanica nei liquidi ». Pres. dal Socio Corbino.

4. Cotronei G. « Correlazioni e differenziazioni. (Ricerche sperimentali sullo sviluppo degli Anfibi) ». Pres. dal Socio Grassi.

5. Jucci C. « Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi. I Neotenici ». Pres. Id.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra nell'iniziare, colla odierna seduta, i lavori del nuovo anno accademico, manda un cordiale saluto ai Colleghi e particolarmente all'on. Corbino, che è tra i Soci presenti, al quale porge vivi ringraziamenti per aver condotto a termine le pratiche relative all'assestamento finanziario dell'Accademia, per il corrente anno accademico. Coll'aiuto ottenuto dal Governo, quest'ultima è stata rimessa in grado di esplicare la propria alta funzione, diretta a favorire gli studî e il progresso scientifico del nostro paese.

Il Presidente Volterra accenna alle perdite che l'Accademia subì durante le ferie, nelle persone del Socio nazionale prof. Antonino Borzì, morto il 24 agosto passato, e del Socio straniero prof. Gabriele Lippmann, mancato ai vivi il 12 luglio. Dei due Accademici il Presidente fa una breve ed affettuosa commemorazione, ricordando del Borzì la bella carriera scientifica, durante la quale ebbe ad occuparsi dei più svariati rami della botanica, e la vasta sua cultura; dà poscia comunicazione dei ringraziamenti trasmessi, per mezzo del Socio Angelitti, dalla famiglia del defunto Collega in occasione delle condoglianze inviatele dall'Accademia. Anche del Socio Lippmann, mancato ai vivi durante il suo viaggio di ritorno da una missione al Canadà, il Presidente ricorda i meriti scientifici; e principalmente mette in rilievo gli studî sulla elettrocapillarità e sul principio della conservazione dell'elettricità, che condussero a importantissimi risultati, e la scoperta della

fotografia dei colori riprodotti per interferenza, in condizioni identiche a quelle della natura. Il Presidente propone, e la Classe approva, che alla vedova dell'illustre Socio straniero siano mandate le condoglianze dell'Accademia.

Il Presidente annuncia poscia che hanno inviato ringraziamenti all'Accademia per la loro recente elezione:

i Soci nazionali: Cantone, Canavari, Dainelli, Di Legge, Garbasso, Fantoli, Marcolongo, Millosevich;

i Soci corrispondenti: Antoniazzi, Armellini, Bemporad, Marinelli, Palazzo, Parravano, Puccianti, Zambonini;

e i Soci stranieri: De La Vallée Poussin, Einstein, Guye, Wood.

Lo stesso Presidente aggiunge che il prof. Federico Giolitti non ha accettato la nomina a Corrispondente.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Socî: Fantoli, *Il lago di Como e l'Adda emissario nella condizione idraulica odierna e nella divisata regolazione del deflusso mediante opere mobili di trattenuta e di scarico*; Favaro, *Adversaria Galileiana*, serie 6ª: *Intorno ad una nuova edizione delle opere letterarie di Galileo*; *I primordi dell'osservatorio astronomico di Padova*, opera postuma di G. Lorenzoni; Severi, *Lezioni sulla geometria algebrica*, traduzione tedesca del dott. Löffler, nella quale trovansi aggiunti in appendice alcuni importanti articoli che non comparivano nell'edizione italiana. Lo stesso Segretario richiama l'attenzione della Classe anche sul vol. VII delle *Lettere di Jac. Berzelius*, pubblicate dalla R. Accademia delle scienze di Svezia; sopra due volumi della ristampa dell'opera, *The scientific Papers of the Honourable Henry Cavendish*; e sul volume contenente i risultati della *Spedizione britannica* (*Terra nova*) *al polo antartico, del 1910-1913*.

Il Presidente Volterra presenta la pubblicazione del Socio straniero Lacroix: *Les pierres de Madagascar*, e fa omaggio, a nome dell'editore Hermann, dell'opera: *Espace, Temps et Gravitation* di A. S. Eddington. Menziona inoltre una pubblicazione del *Rice Institut* del Texas, dedicata a commemorazioni di Dante; tra queste ne segnala una del prof. Evans sul viaggio dantesco considerato dal punto di vista scientifico.

Il Socio Levi-Civita fa omaggio del primo fascicolo delle *Abhandlungen* di cui inizia ora la pubblicazione il Seminario matematico della Università di Amburgo.

AFFARI DIVERSI

Il Presidente VOLTERRA presenta varî pieghi suggellati, inviati per esser deposti negli Archivi accademici, dai signori: BARRICELLI, BIANCO, BRUNI, PAIS e PASTORI.

Dà comunicazione di un voto dell'Accademia Reale di scienze fisiche e matematiche di Napoli al Ministro della P. Istruzione e al Ministro della Guerra, voto relativo all'acquisto dei libri nei paesi ex-nemici. L'Accademia si associa a tale voto.

Il Segretario CASTELNUOVO dà parte di un invito per il Congresso internazionale di Geologia che si terrà nel Belgio nella seconda quindicina del mese di agosto dell'anno prossimo.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 novembre 1921.

BARREL J. — The Piedmont Terraces of the Northern Appalachians (From the « American Journal of Science », volume XLIX, pp. 227-428). New Haven, 1920, 8°.

BERZELIUS F. — Bref genom H. G. Söderbaum. Uppsala, 1920. 8°, pp. 1-336.

BROCA A. — Chirurgie de guerre et d'après-guerre. Paris, 1921. 8°, pp. I-VII, 1-479.

BRYAN K. — Origin of Rock Tanks and Charcos (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 187-206). New Haven, 1920. 8°.

CAVENDISCH I. R. S. — Scientific Papers, vol. I, II. Cambridge, 1921. 8°, pp. 1-452, 1-496.

CHREE CH. — Terrestrial Magnetism (British Antartic Expedition 1910-13). London, 1921. 4°, pp. I-XII, 1-548.

DE REY-PAELHADE J. — Lés ferments d'hydrogénation. Toulouse, 1921. 8°, pp. 1-8.

EDDINGTON A. S. — Espace, temps et gravitation. Paris, 1921. 8°, pp. I-XII, 1-262.

FANTOLI G. — Il lago di Como e l'Adda emissario. Milano, 1921. 8°, pp. I-XIX, 1-306.

FAVARO A — Adversaria Galilaeiana (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova », vol. XXXVII). Padova, 1921. 8°, pp. 1-35.

FAVARO ANTONIO. — I primordii dell'Osservatorio astronomico di Padova (Estr. da « Contributo del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti alla celebrazione del VII centenario della Università di Padova »). Venezia, 1921. 8°, pp. 1-94.

Favaro A. — Indice dei rotuli dello Studio di Padova (Estr. da « Contributo del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti alla celebrazione del VII centenario della Università di Padova »). Venezia, 1921. 8°, pp. 1-27.

Favaro A. — Intorno ad una nuova edizione di opere letterarie di Galileo (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova », vol. XXXVII). Padova, 1921. 8°, pp. 1-11.

Foà P. — Virchow in Italien (Estr. da « Virchow's Archiv », Bd. 235, pp. 379-384). Berlin, 1921. 8°.

Fusco P. — La sifilide ereditaria e acquisita in rapporto alle malattie del corpo umano, vol. III. Philadelphia, 1921. 8°, pp. 1-413.

Gabba L. — Cenno necrologico ed elenco degli scritti di Giovanni Celoria (Estr. dal « Bollettino bimensuale della Società meteorologica italiana », nn. 7-8-9). Torino, 1921. 8°, pp. 1-12.

Hume G. S. — The Stratigraphy and geologic Relations of the paleozoic Outlier of Lake Timiskaming (From the « American Journal of Science », vol. L, p. 293-309). New Haven, 1920. 8°.

Johnstone J. H. L. — The relative Activity of Radium and the Uranium with which it is in Radioactive Equilibrium (From the « American Journal of science », vol. L. New Haven, 1920. 8°, pp. 1-19.

Kemmerling G L. L. — De geologie en geomorphologie van den Idyen. Batavia, 1920. 4°, pp. I-XV, 1-162.

Lacroix A. — Les Pierres de Madagascar (Extr. de la « Revue scientifique », 1921). Paris, 1921. 8°, pp. 1-59).

Livraghi E. — Memoria scientifica e studio tecnico industriale delle alluvioni del Ticino. Milano, 1921, 8°, pp. 1-47.

Lockyer W. J. — The spectrum of Cassiopee in relation to those of a Cygni and 7 Cygni (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXI, pp. 495-501). Edinburg, 1921. 8°.

Lumière A. — Rôle des colloïdes chez les êtres vivants. Paris, 1921. 8°, pp. I-VIII, 1-311.

Mancini N. — Magnetizzazione della elettricità. Firenze, 1921. 8°, pp. 1-89.

Martel E. A. — Nouveau traité des eaux souterraines. Paris, 1921. 8°, pp. 1-838.

Mascart J. — Sur l'établissement des moyennes en Météorologie (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », tome 173). Paris, 1921. foll. pp. 1 3.

Matteini C. — Equazioni delle caratteristiche delle dinamo (Estr. dal Giornale l' « Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-10.

Montibelli A. — Memoria scientifica e studio tecnico industriale delle alluvioni del Ticino. Milano, 1921. 8°, pp. 1-47.

Mouret M. G. — Antoine Chézy, histoire d'une formule d'hydraulique (Extr. des « Annales des Ponts et Chaussées », tom. II, pp. 165-268). Paris, 1921. 8°.

Noether M. — Hieronymus Georg Zeuthen (Sond. aus « Mathematische Annalen », Band 83). Berlin, 1921. 8°, pp. 1-23.

Pubblicazioni della R. Specola di Collurania, vol. I, serie A e serie B. Roma, 1921.

Reyes C. — Potere endocrine della Tiroide nei rapporti col gozzo e col cretinismo; nella etiologia della cachessia strumipriva; nei rapporti con l'opoterapia e con la tiroidectonica. Riposto, 1921. 8°, pp. 1-6.

Richard S. L. — New tertiary Artiodactyls (From the « American Journal of science », vol. I, pp. 83-130). New Haven, 1910. 8°.

Richard. S. L. — An upper carboniferous Footprint from Attlebora, Massachusetts (From the « American Journal of Science », vol. I, pp. 233-236). New Haven, 1920. 8°.

Rutherford M. — New species of Oligocene (White River) Felidae (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 207-024). New Haven, 1920, 8°,

See T. J. J. — New Theory of the Aether (Repr. from « Astronomische Nachrichten », nn. 5079, 5085, pp. 234-454). Kiel, 1921. 4°.

Silvestri F. — A new species of Termitaphis (Hemiptera Heteroptera) from India (Extr. da « Records of the Indian Museum », vol. XXII, pp. 71-74). Calcutta, 1921. 8°.

Severi F. — Vorlesungen über algebraische Geometrie. Berlin, 1921 8°, pp. I-XV, 1-408.

Sordina U. — Sul generatore a induzione eccitato mediante condensatori (Estr. dal Giornale l' « Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-10.

Troxell E. L. — A Tiny Oligocene Artiodactyl, Hypisodus Alacer (From the « Amer. Journ. of Science », vol. XLIX, pp. 391-398). New Haven, 1920. 8°.

Vogel H. — Vergleichende Betrachtungen über das variskische Gebirge am Rhein und in Oberschlesien unter Berücksichtigung der darin auftretenden nutzbaren Lagerstätten (Sonderabdruck aus der « Zeitschrift des Oberschlesischen Berg- und Hüttenmännischen Vereins », Jahrgang 1921). Kattowitz, 1921. 8°, pp. 1-21.

Wright W. H. — The Spectra of the temporary Stars. California, 1920. 4°, pp. 1-26.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 novembre 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Botanica agraria. — *Su la Vite selvatica della Maremma.* Nota del Corrispondente Biagio Longo [1].

Abbondante e rigogliosa cresce nella Maremma toscana la Vite selvatica (*Vitis vinifera silvestris*) come ho avuto occasione di constatare durante un mio soggiorno estivo nel corrente anno. Spesso i suoi fusti giganteschi come immani serpenti avvolgono i tronchi degli alberi ed i suoi rami contorcendosi nelle più strane guise, come le liane della vegetazione tropicale, salgono fin sui più alti alberi ricadendo in mille festoni. Abbondanti pendono i grappoli dell'uva, chiamata in Maremma « zampina », costituita da acini piccoli, neri e di cui nel luogo si fa vino, detto anche « zampino ». Uno dei più grossi fusti da me visti misurava m. 0,92 di circonferenza, e mi si disse che ve ne erano altri più grossi ancora. Queste richiamano alla mente le Viti selvatiche degli Etruschi menzionate da Plinio quando dice che precisamente a Populonia si ammirava una statua di Giove scolpita in un tronco di Vite.

Tali colossi, che destarono la mia meraviglia di Botanico, m'indussero ad alcune considerazioni d'indole agraria. Sta di fatto che queste Viti selvatiche presentano uno straordinario rigoglio ed una grande produttività non

[1] Presentata nella seduta del 6 novembre 1921.

ostante che nessun aiuto abbiano avuto da parte dell'uomo. Potrebbe ciò far pensare che esse siano resistenti a varie malattie che tormentano la Vite coltivata? Circa ad Oidio e Peronospora le osservazioni da me fatte e le informazioni assunte mi farebbero rispondere affermativamente. Circa a Fillossera è da notare che siamo in zona fillosserata e che tuttavia, come si è detto, le Viti selvatiche sono rigogliosissime.

Si tratta dunque di una razza di Vite selvatica veramente resistente alle varie malattie che tanto ostacolano la coltivazione della Vite domestica? E allora perchè non si tenta di stabilire con adeguati esperimenti se e in qual misura la nostra Vite selvatica si addimostri resistente in cultura, allo scopo di ricorrere ad essa nella ricostituzione dei vigneti come finora si è fatto con le Viti americane?

Agli egregi signori Maruzzi e Morghen, possidenti di Maremma, che gentilmente mi accompagnavano nella gita, io tracciavo il programma degli esperimenti da farsi, e che qui brevemente accennerò nell'augurio che anche altri possano essere invogliati a tentarli.

Prima di tutto fare una piantata di Viti selvatiche in terreni fillosserati per vedere se anche le piante provenienti da magliuoli, o anche da semi, abbiano resistenza alla Fillossera, perchè può venire il sospetto che la resistenza delle grosse piante (veramente ne ho vedute anche delle piccole) sia dovuta allo straordinario sviluppo che certamente deve avere il loro sistema radicale.

Nel caso, come sarebbe da augurarsi, che gli esperimenti diano esito positivo, allora innestare le razze di Vite coltivata sulla nostra Vite selvatica, come ora si fa sulle Viti americane. In tal modo si avrebbe maggiore affinità tra il soggetto e l'innesto, ed è da supporsi anche maggiore rigoglio, maggiore longevità, non che eliminazione di qualche altro inconveniente lamentato con l'innesto su le Viti americane. Notai, ai margini dei campi, qualche innesto tentato già dai contadini con buoni risultati; però gl'innesti erano stati praticati senza rimuovere dal posto, ove erano nate, le piante di Vite selvatica.

Consigliavo inoltre — dati i risultati non completamente soddisfacenti finora avuti dagli ibridi produttori diretti — di provare ad ottenere dei meticci tra la nostra Vite selvatica e la domestica (prendendo il polline ora dalla Vite selvatica ora dalle razze di Vite coltivata), e di scegliere poi tra i meticci quelli che si addimostreranno più vantaggiosi.

Non resta che da provare; soltanto i risultati degli esperimenti ci diranno se e fino a qual punto la nostra Vite selvatica potrebbe essere utilizzata nella viticultura.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle varietà contenenti più serie di superficie totalmente geodetiche.* Nota di Enrico Bompiani, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. È noto che se una V_3 possiede ∞^1 superficie totalmente geodetiche (tali cioè che ogni geodetica di una di esse è geodetica per V_3), il suo elemento lineare ha la forma data da Hadamard (1)

$$ds^2 = \sum_1^2 a_{ik}(x_1, x_2)\, dx_i\, dx_k + a_{33}(x_1, x_2, x_3)\, dx_3^2$$

quando le superficie tot. geod. siano le $dx_3 = 0$.

Qui mi propongo di caratterizzare le V_3 che posseggono due serie ∞^1 di sup. tot. geod. con la condizione che la congruenza delle loro linee d'intersezione sia normale.

2. Se entro una V_3, definita metricamente dal $ds^2 = \sum_1^3 a_{ik}(x_1, x_2, x_3) dx_i dx_k$, è data una superficie col porre $x_i = x_i(u_1, u_2)$ e di $ds^2 = \sum_1^2 b_{rs}(u_1, u_2)\, du_1 du_2$, condizione necessaria e sufficiente affinchè questa risulti totalmente geodetica per la V_3 è che si abbia (2)

$$\Omega_{rs}^{(i)} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\, \partial u_s} - \sum_\tau \frac{\partial x_i}{\partial u_\tau} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \tau \end{matrix} \right\}_b + \sum_{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \rho\sigma \\ i \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial x_\rho}{\partial u_r} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u_s} = 0.$$

Per esprimere p. es. che le superficie $dx_3 = 0$ (sulle quali si può assumere $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$) sono tot. geod. basta scrivere i simboli $\left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\}_b$ ed $\left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\}_a$

(1) J. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* [Bull. Sciences Mathém., t. XXV, 1901]; ivi sono determinate anche le V_3 con ∞^2 superficie tot. geod., ma non le V_3 con più serie ∞^1 di tali superficie. G. Ricci, nella Nota *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni* [Rend. Acc. Lincei, vol. XII, serie 5ª, 1903_1], ha ripreso il problema in generale e, nel caso delle V_3, ha determinato le caratteristiche geometriche di quelle contenenti ∞^2 sup. tot. geod., in relazione alle curvature e congruenze principali in esse contenute.

(2) In questa forma si trovano nella mia Memoria: *Studî sugli spazî curvi; la 2ª forma fondam. di una* V_m *in* V_n [Atti R. Istituto Veneto di Scienze ecc., in corso di stampa, 1921_1].

in funzione di simboli di Christoffel di 1ª specie relativi a V_3, $[\ ]_a$, e si ottiene

$$a^{(31)} X_1 + a^{(32)} X_2 + a^{(33)} X_3 = 0$$

che deve esser soddisfatta da

$$X_1 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 1 \end{matrix}\right]_a , \quad X_2 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 2 \end{matrix}\right]_a , \quad X_3 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 3 \end{matrix}\right]_a \qquad (i\,,\,k = 1\,,\,2).$$

Di qua, riferita la V_3 alle ∞^1 sup. tot. geod. e alle loro traiettorie ortogonali, si ha il risultato citato di Hadamard.

3. Esistano in V_3 due serie ∞^1 di sup. tot. geod., facenti parte di un sistema triplo ortogonale. Si ha subito

$$ds^2 = dx_1^2 + a_{22}(x_1\,,\,x_2)\,dx_2^2 + a_{33}(x_1\,,\,x_3)\,dx_3^2 ;$$

cioè: *se una* V_3 *contiene due serie* ∞^1 *di sup. tot. geod. facenti parte di un sistema triplo ortogonale, le superficie di una stessa serie sono fra loro applicabili e l'applicabilità è determinata dalle traiettorie ortogonali alle superficie della serie considerata; e viceversa.*

Se poi esiste una terza serie di sup. tot. geod. passanti per la congruenza d'intersezione delle due prime, si trova

$$ds^2 = \theta^2(x_1)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2);$$

quindi: *se in una* V_3 *contenente due serie di sup. tot. geod. facenti parte di un sistema triplo ortogonale esiste una terza serie di sup. tot. geod. passanti per la congruenza d'intersezione delle due prime, la* V_3 *contiene* ∞^2 *sup. tot. geod. passanti per la congruenza ed è rappresentabile conformemente sopra uno* S_3 *euclideo.*

Fra queste sono le V_3 a curvatura costante.

4. La V_3 contenga due serie ∞^1 di sup. tot. geod. *non* ortogonali fra di loro, con congruenza d'intersezione normale. Assunte le sup. ortog. alla congruenza come $dx_1 = 0$ e quelle tot. geod. come $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0$, $a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{23} \neq 0$.

Le equazioni da soddisfare sono

$$a^{(32)} X_2 + a^{(33)} X_3 = 0$$
$$a^{(22)} Y_2 + a^{(23)} Y_3 = 0$$

per $X_2 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 2 \end{matrix}\right]$, $X_3 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 3 \end{matrix}\right]$ $(i\,,\,k = 1\,,\,2)$; $Y_2 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 2 \end{matrix}\right]$, $Y_3 = \left[\begin{matrix} i\,k \\ 3 \end{matrix}\right]$ $(i\,,\,k = 1\,,\,3)$.

Da esse si ricava

$$ds^2 = \theta^2(x_1)\,[dx_1^2 + \mathrm{F}\,(e^{\lambda}\,dx_2^2 + 2\,dx_2\,dx_3 + e^{\mu}\,dx_3^2)]$$

con F, λ, μ funzioni soltanto di x_2, x_3 legate dalle equazioni

$$\frac{\partial \log F}{\partial x_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_2} - e^{-\mu} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial \log F}{\partial x_3} = \frac{\partial \mu}{\partial x_3} - \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3} - e^{-\lambda} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2(\lambda + \mu)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[e^{-\mu} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[e^{-\lambda} \frac{\partial \log (e^{\lambda+\mu} - 1)}{\partial x_3}\right];$$

sicchè, prese due funzioni λ, μ soddisfacenti a quest'ultima, con la condizione $\lambda + \mu \neq 0$, si ha F con una quadratura.

Le ultime equazioni esprimono che linee coordinate (x_2 o x_3) sopra una superficie $x_1 = 0$ sono per essa geodetiche; riferendo queste superficie ad un sistema di geodetiche e alle loro traiettorie ortogonali, si ha ($x = x_1$):

$$ds^2 = \theta^2(x)\,[dx^2 + dy^2 + G(y, z)\,dz^2];$$

questo ds^2, come si vede subito, contiene ∞^2 sup. tot. geod. (altro risultato di Hadamard); quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_3 *contenga* ∞^2 *sup. tot. geod. è che essa contenga due serie* ∞^1 *di sup. tot. geod.* NON *ortogonali con congruenza d'intersezione normale* (1).

L'interesse di questo risultato sta nel fatto che si ritrova il ds^2 di Hadamard partendo da ipotesi molto meno restrittive: una delle ∞^2 sup. tot. geod. è individuata da una geodetica di una sup. ortogonale alla congruenza più volte nominata e contiene le ∞^1 geodetiche di V_3 che vi si appoggiano.

Tutte le V_2 tot. geod. sono applicabili fra loro e sopra superficie di rotazione (Ricci, loc. cit.).

5. Numerose proprietà di queste V_3 seguono da una delle due forme adottate per il ds^2.

Due superficie tot. geod. si tagliano lungo tutta la geodetica d'intersezione sotto angolo costante $\left(\cos\omega = e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}}\right)$ (2); *le geodetiche di una*

(1) Questo fatto è in intima relazione con l'altro (Ricci) che la congruenza ortogonale ad ∞^1 sup. tot. geod. è principale e che non possono esistere due congruenze principali non ortogonali, se non se hanno ∞^1, cioè la V_3 ha necessariamente due curvature principali uguali, ecc.

(2) Ciò è chiaro geometricamente. L'angolo delle due sup. tot. geod. per un punto è l'angolo delle linee x_2, x_3 che vi passano: se il punto si sposta lungo una geodetica della congruenza, gli elementi lineari di x_2, x_3 si spostano per parallelismo di Levi-Civita (perchè formano sempre lo stesso angolo $\pi/2$ con la geodetica ed appartengono in ogni posizione a sup. tot. geod.): in questo spostamento il loro angolo, per una proprietà nota del parallelismo, non varia.

superficie $x_1 = \text{cost.}$ *hanno tutte la stessa curvatura geodetica* (*risp. a* V_3) *in tutti i loro punti* $\left(= \frac{d}{dx_1}\frac{1}{\theta}\right)$; il quadrato di questa è la curvatura relativa della superficie rispetto a V_3 (differenza fra la curvatura gaussiana e la curvatura riemanniana secondo la stessa giacitura), cioè: *le* V_2 *ortogonali alla congruenza sono a curvatura relativa costante.*

Di più: *è costante la curvatura riemanniana della* V_3 *per tutte le giaciture tangenti alla congruenza, e in tutti i punti di una* V_2 *ad essa ortogonale* (poichè dipende soltanto da θ).

Per caratterizzare fra le nostre V_3 quelle per le quali le V_2 normali alla congruenza sono a curvatura gaussiana costante, possiamo servirci di un teorema di Finsterwalder [1]: esse contengono, oltre alle due serie ∞^1 di sup. tot. geod. da cui siamo partiti, altre due serie ∞^1 contenenti la congruenza d'intersezione delle due prime, rappresentabili linearmente per mezzo dei parametri i quali, uguagliati a zero, individuano le due serie date.

Infine, se le due serie ∞^1 date si tagliano ovunque sotto lo stesso angolo $\omega\ (\neq \pi/2)$, le V_2 normali alla congruenza loro intersezione sono euclidee e si ritrova il $ds^2 = \theta^2(x_1)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ dato al n. 3 partendo da un'altra proprietà. Queste V_3 si costruiscono in S_5 con equazioni parametriche del tipo

$$y_1 = f(t)\cos\theta \qquad y_3 = f(t)\cos\varphi \qquad y_5 = t.$$
$$y_2 = f(t)\operatorname{sen}\theta \qquad y_4 = f(t)\operatorname{sen}\varphi$$

6. Scritto il ds^2 di una V_3 del tipo esaminato nella forma $ds^2 = \theta^2(x_1)\,ds_1^2$, si osserva che il ds_1^2 è del tipo di Levi-Civita [contenente una congruenza a parallelismo completo [2]]; sicchè:

Ogni V_3 *con due serie di sup. tot. geod. non ortogonali a congruenza d'intersezione normale è rappresentabile in modo conforme sopra una* $\overline{V}_3$ *dello stesso tipo in cui però le superficie ortogonali alla congruenza sono pure totalmente geodetiche, e la congruenza è a parallelismo completo* (la $\overline{V}_3$, se non è già euclidea, si costruisce in uno S_4 euclideo).

Il modulo della rappresentazione è costante sulle sup. ortog. alla congruenza: sicchè queste si corrispondono in modo isometrico-simile.

[1] Cfr. Jahresbericht d. Deutsch. Mathem. Vereinigung, Bd. V, Leipzig 1899, pp. 50-51.

[2] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, ecc. [Rend. Circ. Matem. di Palermo, tomo XLII, 1917].

Matematica. — *Sulle trasformazioni* T *dei sistemi tripli coniugati di superficie.* Nota del prof. L. P. Eisenhart (Princeton), presentata dal Socio L. Bianchi (1).

1. Se le coordinate cartesiane x, y, z di un punto M nello spazio sono funzioni dei tre parametri u_1, u_2, u_3, affinchè le superficie $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$, formino un sistema triplo coniugato C, è necessario e sufficiente che x, y, z soddisfino alle equazioni

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{\partial \log a_1}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \log a_2}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{\partial \log a_2}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial \log a_3}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{\partial \log a_3}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} + \frac{\partial \log a_1}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} \end{aligned}\right.$$

dove le funzioni a_i $(i = 1, 2, 3)$ verificano le tre condizioni

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 a_i}{\partial u_j\,\partial u_k} = \frac{\partial \log a_j}{\partial u_k}\frac{\partial a_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \log a_k}{\partial u_j}\frac{\partial a_i}{\partial u_k},$$

avendo indicato con i, j, k una permutazione ciclica degli indici 1, 2, 3.

Se θ è una soluzione delle (1), le funzioni

$$(3)\qquad \bar{x} = \frac{x}{\theta},\quad \bar{y} = \frac{y}{\theta},\quad \bar{z} = \frac{z}{\theta}$$

sono soluzioni del sistema che si ottiene da (1) cangiandovi le a_i nelle a_i, date da

$$\bar{a}_i = \frac{a_i}{\theta}.$$

Il sistema $\bar{C}$, di coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, si dirà un *trasformato radiale* di C.

2 Siccome le a_i soddisfano le (2), le sei equazioni

$$(5)\qquad \frac{\partial h_i}{\partial u_j} = (h_j - h_i)\frac{\partial \log a_i}{\partial u_j} \qquad (i \neq j)$$

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

nelle tre funzioni h_1, h_2, h_3 sono compatibili. Se abbiamo un sistema di soluzioni di queste, sono compatibili, per $i = 1, 2, 3$, le equazioni

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial y'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial z'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial z}{\partial u_i}, \tag{6}$$

e le funzioni x', y', z', definite così per quadrature, soddisfano le tre equazioni

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial \log a_i'}{\partial u_j} \frac{\partial \theta'}{\partial u_i} + \frac{\partial \log a_j'}{\partial u_i} \frac{\partial \theta'}{\partial u_j}. \tag{7}$$

Ne segue che queste funzioni sono le coordinate di un sistema C', tale che le tangenti alle curve di parametro u_i di C e C', in punti corrispondenti, sono parallele; e diremo che C e C' sono sistemi tripli coniugati *paralleli*.

3. Se θ è una soluzione delle (1), la funzione θ', definita da

$$\frac{\partial \theta'}{\partial u_i} = h_i \frac{\partial \theta}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3,), \tag{8}$$

è una soluzione delle (7); diremo che essa è la soluzione delle (7) *corrispondente* alla soluzione θ delle (1). Ed ora, se definiamo le tre funzioni x_1, y_1, z_1, con equazioni della forma

$$x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'} x', \tag{9}$$

ne deduciamo, derivando,

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_i} = \frac{\tau_i}{\theta'^2} \left(x' \frac{\partial \theta}{\partial u_i} - \theta' \frac{\partial x}{\partial u_i} \right) = - \frac{\tau_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{x'}{\theta'} \right), \tag{10}$$

avendo posto

$$\tau_i = h_i \theta - \theta'. \tag{11}$$

Derivando le (10) rapporto a u_j, si vede che x_1, y_1, z_1 sono soluzioni delle tre equazioni

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial \log a_{1i}}{\partial u_j} \frac{\partial \theta_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \log a_{1j}}{\partial u_i} \frac{\partial \theta_1}{\partial u_i}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$a_{1i} = \frac{a_i \tau_i}{\theta'}. \tag{13}$$

Dunque il punto di coordinate x_1, y_1, z_1 descrive un sistema triplo coniugato C_1. Se ora prendiamo due superficie $u_i =$ cost. dei sistemi C e C_1 rispettivamente, le rette che uniscono i punti corrispondenti definiti dalle (9) formano una congruenza le cui sviluppabili tagliano queste superficie nelle linee $u_j =$ cost., $u_k =$ cost., come ho dimostrato in altro luogo [1],

[1] Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), p. 109

e le superficie sono nella relazione di una trasformazione T, come ivi è stata definita. Perciò diciamo che le equazioni (9) definiscono una *trasformazione* T di C in C_1. Una tale trasformazione è determinata da un sistema parallelo C′ e da una soluzione θ del sistema (1). Dalle (10) si vede che il trasformato radiale C_1' di C′, definito dalle

$$x_1' = \frac{x'}{\theta'}, \tag{14}$$

è parallelo a C_1, e che $\theta^{-1} = -\frac{\theta}{\theta'}$, $\theta'^{-1} = \frac{1}{\theta'}$, sono le corrispondenti soluzioni delle equazioni per C_1 e C_1'. Inoltre le formule

$$x = x_1 - \frac{\theta^{-1}}{\theta'^{-1}} x_1'$$

definiscono C come un trasformato T di C_1.

Se C_1 e C_2 sono trasformati T di C, per mezzo dei sistemi C′ e C″ paralleli a C e delle soluzioni θ_1, θ_2 delle (1), e con θ_1', θ_2'; θ_1'', θ_2'' indichiamo le soluzioni corrispondenti per le equazioni relative a C′ e C″, allora il sistema C_{12}, definito dalle equazioni della forma

$$x_{12} = x_1 - \frac{\theta_{12}}{\theta_{12}'''}\left(x'' - \frac{\theta_1''}{\theta_1'} x'\right),$$

$$\theta_{12} = \theta_2 - \frac{\theta_1}{\theta_1'}\theta_2', \quad \theta_{12}''' = \theta_2'' - \frac{\theta_1''}{\theta_1'}\theta_2',$$

è un trasformato T di C_1, C_2. Siccome θ_1' e θ_2'' contengono costanti arbitrarie additive, esistono ∞^{12} di tali sistemi C_{12}.

4. La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema C colle equazioni (1) sia ortogonale, che cioè si abbia

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_j} = 0 \ (i \neq j = 1, 2, 3),$$

è che $\theta = \Sigma x^2$ sia una soluzione delle (1). Un tale sistema si dirà un sistema O. Se un sistema è O, anche ogni suo parallelo è un sistema O.

Supponiamo di avere un sistema O ed un suo parallelo O′. Se nelle (9) poniamo $\theta' = \Sigma x'^2$ e la corrispondente θ data delle (8), il sistema trasformato C è un sistema O. Si vede facilmente che questa è la trasformazione generalizzata di Ribaucour trattata da Bianchi (1), e in particolare i sistemi paralleli O′ e O_1' sono in relazione d'inversione, come segue dalle (14).

5. Il Bianchi (2) ha dimostrato che ogni sistema triplo coniugato nello spazio euclideo dà origine ad una infinità di spazî normali, pei quali le direzioni principali sono tangenti alle curve parametriche. Quindi i risultati precedenti conducono a trasformazioni degli spazî normali.

(1) Questi Rendiconti serie 5ª, vol. 34 (1915) p. 161.

(2) Annali, serie 3ª, vol. 23 (1914) p. 141.

Matematica. — *Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali.* Nota I di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio V. VOLTERRA (1).

1. Nella teoria delle funzioni di linee si presentano, oltre alle equazioni integrali ed integro-differenziali, delle altre equazioni, di un carattere più elevato, che il prof. Volterra (2) ha chiamato *equazioni alle derivate funzionali*. Queste equazioni possono riguardarsi come caso limite per $n \to \infty$ delle equazioni a derivate parziali con n variabili indipendenti; pertanto esse potranno trattarsi con metodi ottenuti estendendo opportunamente quelli che si adoperano per le equazioni differenziali. Nella presente Nota e in un'altra che seguirà mi permetto di mostrare appunto come, generalizzando il così detto *primo metodo di Jacobi* per la integrazione delle equazioni a derivate parziali del prim'ordine e giovandosi della feconda teoria delle equazioni integrali, si pervenga all'integrazione di una classe molto generale di equazioni *quadratiche* alle derivate funzionali del prim'ordine.

2. Sia V una funzione incognita della linea $[x]$ (nel senso di Volterra) e della variabile numerica z, e sia $[p]$ la linea definita dalla condizione che la sua ordinata in un punto qualsiasi ξ dell'intervallo (a, b) in cui si suppone data $[x]$, sia uguale al valore della derivata prima di V rispetto alla linea $[x]$, presa nel punto ξ. Allora una relazione del tipo

$$\frac{\partial V}{\partial z} + H(z, [x], [p]) = 0 \tag{1}$$

dove H è una funzione regolare, assegnata di z, $[x]$ e $[p]$, sarà una di quelle equazioni alle derivate funzionali di cui poc'anzi si diceva.

L'equazione (1) si è presentata al prof. Volterra (3) studiando un sistema integro-differenziale importante che può scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial [x](\xi)}{\partial z} = H'_{|p|(\xi)}(z, [x], [p]), \quad \frac{\partial [p](\xi)}{\partial z} = -H'_{|x|(\xi)}(z, [x], [p]) \tag{2}$$
$$(a \leq \xi \leq b),$$

convenendo d'indicare coi simboli $H'_{|p|(\xi)}$ e $H'_{|x|(\xi)}$ le derivate prime della

(1) Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

(2) *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 61.

(3) *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali* [Rendic. R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

funzione H prese ordinatamente rispetto alla linea $[p]$ e al punto ξ e rispetto alla linea $[x]$ e al punto ξ. Nel sistema (2) le incognite sono le due linee $[x]$ e $[p]$ che si riguardano dipendenti dalla variabile z; in altri termini le incognite sono le due funzioni ordinarie a due variabili

$$\varphi(\xi, z) = [x](\xi) \quad \text{e} \quad \psi(\xi, z) = [p](\xi).$$

Propriamente il Volterra ha dimostrato come, conoscendo una soluzione V della (1) contenente una linea arbitraria (e che perciò potrà chiamarsi un *integrale completo* dell'equazione), sia possibile risolvere agevolmente il sistema (2).

È però facile vedere che anche la reciproca di questa proposizione è vera, e cioè che *se è possibile determinare una soluzione del sistema* (2) *della forma*

$$(3) \qquad [x](\xi) = \varphi(\xi, z, [a], [b]) \quad , \quad [p](\xi) = \psi(\xi, z, [a], [b]),$$

dove $[a]$ *e* $[b]$ *sono due linee arbitrarie aventi il significato di valori iniziali di* $[x]$ *e* $[p]$ *per* z *uguale ad un certo* z_0, *e se inoltre la funzione* φ *è tale che la prima delle* (3) *possa risolversi rispetto a* $[b]$; *allora la funzione*

$$(4) \qquad V(z, [x], [a]) = \int_a^b [a](\xi)\,[b](\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \left\{ \int_a^b H'_{p(\xi)}(z, [x], [p])\,[p](\xi)\,d\xi - H(z, [x], [p]) \right\} dz,$$

nella cui espressione devono pensarsi sostituiti alle linee $[p]$ *e* $[b]$ *i loro valori tratti dalle* (3), *fornirà un integrale completo della* (1).

La dimostrazione è un'ovvia generalizzazione di quella che serve nella teoria delle equazioni a derivate parziali per istabilire il primo metodo di Jacobi [1], e noi la ometteremo per brevità.

3. In una sua Nota [2], il prof. Volterra ha risoluto l'equazione (1), per mezzo di una serie di potenze di composizione, in un caso che corrisponde a quello di H funzione bilineare, cioè della forma

$$H = \int_a^b \int_a^b E(\eta, \zeta)\,[x](\eta)\,[p](\zeta)\,d\eta\,d\zeta.$$

Noi ci proponiamo di mostrare come, avvalendosi invece del teorema enunciato nel § precedente e della teoria delle equazioni integrali, sia possibile

[1] Cfr. p. es. Goursat, *Leçons sur l'intégr. des éq. aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, Hermann, 1891), pag. 136.

[2] *Sulle equazioni alle derivate funzionali* [Rendic. R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

risolvere l'equazione in discorso anche nel caso che H sia una funzione quadratica di tipo generale, cioè abbia la forma

$$(5)\quad H = A(z) + \int_a^b \Big\{ B_1(\eta, z)\,[x](\eta) + B_2(\eta, z)\,[p](\eta) \Big\}\, d\eta + \int_a^b \int_a^a \times$$

$$\times \Big\{ C_1(\eta, \zeta)\,[x](\eta)\,[x](\zeta) + C_2(\eta, \xi)\,[x](\eta)\,[p](\zeta) + C_3(\eta, \zeta)\,[p](\eta)\,[p](\zeta) \Big\}\, d\eta\, d\zeta$$

dove $A, B_1, \ldots C_3$ sono certe funzioni assegnate.

Nel caso in esame il sistema (2) diviene

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial [x](\xi)}{\partial z} = B_2(\xi, z) + \displaystyle\int_a^b \Big\{ C_2(\eta, \xi)\,[x](\eta) + 2C_3(\eta, \xi)\,[p](\eta) \Big\}\, d\eta, \\ \dfrac{\partial [p](\xi)}{\partial z} = -B(\xi, z) - \displaystyle\int_a^b \Big\{ 2C_1(\eta, \xi)\,[x](\eta) + C_2(\eta, \xi)\,[p](\eta) \Big\}\, d\eta; \end{cases}$$

$$(a \leq \xi \leq b),$$

che, con un artificio perfettamente simile a quello che si adopera per risolvere i sistemi di equazioni integrali [1], e supponendo inoltre, per comodità, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, può porsi sotto la forma dell'equazione integro-differenziale unica

$$(7)\quad \frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} = \alpha(\xi, z) + \int_0^1 K(\xi, \eta)\, \Phi(\eta, z)\, d\eta, \qquad (0 \leq \xi \leq 1),$$

dove α e K sono funzioni note e la funzione incognita $\Phi(\xi, z)$ è uguale ad $[x](\xi)$ per $(0 \leq \xi < \frac{1}{2})$ ed uguale invece a $[p](\xi)$ per $(\frac{1}{2} < \xi \leq 1)$.

4. Per risolvere l'equazione integro-differenziale (7), al che è ora ridotta tutta la questione, ci avvarremo del metodo che si ottiene con un passaggio al limite per $n \to \infty$ da quello che si adopera per integrare un sistema di n equazioni differenziali simultanee del tipo

$$d\varphi_i(z)/dz = \alpha_i(z) + k_{i1}\,\varphi_1(z) + k_{i2}\,\varphi_2(z) + \cdots + k_{in}\,\varphi_n(z), \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

sistema di cui l'equazione (7) è il caso limite per $n \to \infty$. Cerchiamo dunque di soddisfare la (7) ponendo

$$(8)\quad \int_0^1 f(\eta)\, \Phi(\eta, z)\, d\eta = e^{kz} - \varrho(z)$$

dove f e ϱ sono due funzioni e k una costante da determinarsi.

Moltiplicando la (7) per $f(\xi)\, d\xi$, integrando fra 0 ed 1 e tenendo conto della (8) si ha

$$\int_0^1 \Phi(\eta, z) \Big\{ f(\eta) - \frac{1}{k} \int_0^1 K(\xi, \eta)\, f(\xi)\, d\xi \Big\}\, d\eta + \varrho(z) -$$

$$- \frac{1}{k} \frac{d\varrho(z)}{dz} - \frac{1}{k} \int_0^1 f(\xi)\, \alpha(\xi, z)\, d\xi = 0;$$

[1] Cfr. p. es. Vivanti, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari* (Milano, Hoepli, 1916), pag. 278.

ma quest'uguaglianza dovrà essere verificata identicamente, dunque dovrà essere

$$(9)\qquad f(\eta)-\frac{1}{k}\int_0^1 K(\xi,\eta)\,f(\xi)\,d\xi=0\quad,\quad \frac{d\varrho}{dz}-k\varrho=-\int_0^1 f(\xi)\,\alpha(\xi,z)\,d\xi\,.$$

La prima di queste due formule si interpetra immediatamente nella teoria delle equazioni integrali di Fredholm: essa ci dice che $1/k$ *ed* $f(\xi)$ *devono essere un parametro ed una corrispondente funzione parametrica associata del nucleo* $K(\xi,\eta)$. Quanto all'altra, essa ci consente di calcolare facilmente la funzione ϱ fissati che siano k ed f, e precisamente si trova

$$(10)\qquad \varrho(z)=Ce^{kz}-\int_0^1 f(\xi)\,\gamma(\xi,z)\,d\xi$$

avendo indicato con C una costante arbitraria ed avendo posto

$$(11)\qquad \gamma(\xi,z)=e^{kz}\int_0^z \alpha(\xi,z)\,e^{-kz}\,dz\,.$$

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota II di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bagnera (1).

4. Passiamo ora a dimostrare quanto abbiamo asserito al n. 3 sulla rappresentazione di una funzione $f(x)$ analitica regolare all'interno di un cerchio C con centro nell'origine.

Si ha

$$|u_n(x)|\leq u_n(|x|)\leq u_0(|x|)\,|x|^n\,.$$

Intanto, se ϱ è minore del raggio di C, si potrà fissare una costante A tale da avere, per qualunque n,

$$|f^{(n)}(0)|<A\,\frac{n!}{\varrho^n}\,.$$

Fisseremo poi una costante B tale da avere, per qualunque n,

$$\frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}<B\,,$$

e perciò, definendo a_n per mezzo delle (2), sarà

$$|a_n|<\frac{AB}{n!}\left(\frac{n!}{\varrho^n}+\frac{(n-1)!}{\varrho^{n-1}}+\dots+1\right);$$

quindi, per n sufficientemente grande,

$$|a_n|<\frac{AB}{n!}(n+1)\,\frac{n!}{\varrho^n}=AB\,\frac{n+1}{\varrho^n}\,,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

e perciò

$$|a_n u_n(x)| < \mathrm{AB}\, u_0(|x|)\,(n+1)\left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^n;$$

quindi la serie $a_0 u_0(x) - a_1 u_1(x) + \cdots$ converge uniformemente in qualunque regione interna al cerchio di raggio ϱ concentrico a C, e rappresenta evidentemente la $f(x)$.

5. Le serie di funzioni u presentano una grande analogia con le serie di potenze e si riducono a queste ultime se $\alpha = 0$.

Dallo sviluppo di una funzione $f(x)$ si può ottenere subito quello della sua derivata; ed infatti, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x),$$

derivando termine a termine e tenendo conto della (7), troviamo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\,a_{n+1} + (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n+1})}\,\frac{a_0}{n!}\right] u_n(x).$$

Dallo sviluppo di $f(x)$ si può ottenere quello di una sua funzione integrale $\mathrm{F}(x)$:

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a_{n-1}}{n} + (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)}\,\frac{\mathrm{F}(0)}{n!}\right] u_n(x).$$

Così dalla (6) otteniamo

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+m}(x)}{(n+m)!}.$$

6. Quando è noto lo sviluppo di $f(x)$, si ottiene quello della funzione $\mathrm{S}[f(x)]$, dove S è l'operazione funzionale definita al n. 1, moltiplicando i coefficienti di $f(x)$ ordinatamente per $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$.

Infatti

$$\mathrm{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \mathrm{S}[u_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n u_n(x).$$

Viceversa, conosciuto lo sviluppo di $\mathrm{S}[f(x)]$, si trova quello di $f(x)$ dividendo i coefficienti del primo rispettivamente per $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$.

Così si ha un altro metodo per trovare lo sviluppo di e^{-x}. Essendo $\mathrm{S}[e^{-x}] = 1$, dalla (6) otteniamo subito la (9).

Così ancora, essendo

$$\mathrm{S}\left[\frac{1}{1-\alpha}\,e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{-x}\right] = e^{-x},$$

dalla (9) possiamo formare subito lo sviluppo di $\dfrac{1}{1-\alpha}\,e^{-\frac{x}{\alpha}} - \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{-x}$, e perciò quello di $e^{-\frac{x}{\alpha}}$.

Si trova così

$$e^{-\frac{x}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\alpha+\alpha^{n+1}}{\alpha^n(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}.$$

7. Lo sviluppo di $e^{-\frac{x}{\alpha}}$ si può anche ottenere con un metodo generale che permette di trovare lo sviluppo di $f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ quando è noto quello di $f(x)$.

Si ha

$$(10) \qquad u_n x = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(\alpha x) - \int_0^{\alpha x} u_n(s)\,ds\right) = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(\alpha x) + \frac{u_{n+1}(\alpha x)}{n+1}\right)$$

e, cambiando x in $\frac{x}{\alpha}$,

$$u_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n}\left(u_n(x) + \frac{u_{n+1}(x)}{n+1}\right)$$

e perciò, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$,

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\alpha^n} - \frac{a_{n-1}}{n\alpha^{n-1}}\right) u_n(x).$$

Servendoci di questa formula ne possiamo ottenere un'altra che dà lo sviluppo di $f(\alpha x)$. Se denotiamo con $b_0, b_1, b_2, \dots$ i coefficienti dello sviluppo di $f(\alpha x)$, si deve avere

$$a_0 = b_0$$

$$a_n = \frac{b_n}{\alpha^n} + \frac{b_{n-1}}{n\alpha^{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

e da questa si ricava

$$b_n = \frac{\alpha^n}{n!}\left[n!\,a_n - (n-1)!\,a_{n-1} + \dots + (-1)^n a_0\right],$$

cioè

$$(11) \qquad f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[n!\,a_n - (n-1)!\,a_{n-1} + \dots + (-1)^n a_0\right] \cdot \frac{u_n(x)}{n!}.$$

In particolare si ha

$$u_m(\alpha x) = m! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^{n+m} \frac{u_{n+m}(x)}{(n+m)!}.$$

8. Applicando i risultati dei tre ultimi numeri, possiamo trovare lo sviluppo di $x^m e^{-\alpha}$ con m intero e positivo.

Per $m = 1$ si ha

$$S[x e^{-\alpha}] = -e^{-\alpha x} + 1;$$

quindi, dopo avere trovato con la (11) lo sviluppo di $e^{-\alpha x}$, potremo formare quello del primo membro ed in seguito quello di $x e^{-x}$. Troviamo così

$$x e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[1 + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-1})} \right] \frac{u_n(x)}{n!}.$$

Per $m = 2$, abbiamo

$$S[x^2 e^{-x}] = 2 \int_0^{\alpha x} s e^{-s} ds;$$

conoscendo già lo sviluppo di $x e^{-x}$, possiamo formare quello di $\int_0^x s e^{-s} ds$, poi quello di $\int_0^{\alpha x} s e^{-s} ds$ e perciò quello di $x^2 e^{-x}$; troviamo così

$$x^2 e^{-x} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2} \left[n - 1 + \frac{n-2}{1-\alpha} + \frac{n-3}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-2})} \right] \frac{u_n(x)}{n!}.$$

Facilmente si trova in generale

$$x^m e^{-x} = m! \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n+m} \left[\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} \frac{1}{1-\alpha} + \right.$$
$$\left. - \binom{n-3}{m-1} \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} + \cdots \pm \binom{m-1}{m-1} \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-m})} \right] \frac{u_n(x)}{n!}.$$

9. Abbiamo trovato lo sviluppo di $x e^{-x}$ con un metodo particolare. Ora esporremo un metodo che permette di trovare lo sviluppo di $x f(x)$ quando è noto quello di $f(x)$. Ci occorre a questo scopo lo sviluppo di $x u_n(x)$. Questa funzione si annulla per $x = 0$ insieme con le sue prime n derivate: quindi il suo sviluppo comincia col termine in u_{n+1} ed il primo coefficiente è l'unità, come facilmente si vede. Il coefficiente a_{n+k} di u_{n+k} si calcola nel seguente modo:

Si ha

$$S[x u_n(x)] = \alpha x u_n(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} s u_n(s) ds =$$
$$= \alpha x u_n(\alpha x) + \frac{\alpha x u_{n+1}(\alpha x)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\alpha x} u_{n+1}(s) ds,$$

e, per la (10),

$$S[x u_n(x)] = \alpha^{n+1} x u_n(x) - \frac{u_{n+2}(\alpha x)}{(n+1)(n+2)}.$$

Al primo membro il coefficiente di u_{n+k} è $\alpha^{n+k} a_{n+k}$, nella prima parte del secondo membro è $\alpha^{n+1} a_{n+k}$, nella seconda parte è $-(-1)^k n! \frac{\alpha^{n+k}}{(n+k)!}$;

sarà dunque

$$\alpha^{n+k}\, a_{n+k} = \alpha^{n+1}\, a_{n+k} - (-1)^k \frac{n!}{(n+k)!}\, \alpha^{n+k}.$$

Da questa ricaviamo a_{n+k} e troviamo

$$x\, u_n(x) = u_{n+1}(x) + n! \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}.$$

10. Servendoci di questa formola, avremmo potuto trovare lo sviluppo di $x\, e^{-x}$. ma i coefficienti si sarebbero presentati in forma meno semplice di quella ottenuta al numero precedente.

La stessa osservazione si può fare relativamente allo sviluppo di $x^2\, u_n(x)$. Invece di ottenerlo da quello di $x\, u_n(x)$ moltiplicandolo per x, procederemo nel seguente modo:

Abbiamo

$$S[x^2\, u_n(x)] = \alpha^{n+2}\, x^2\, u_n(x) - \frac{2}{n+1} \int_0^{\alpha x} s\, u_{n+1}(s)\, ds.$$

Chiamando a_{n+k} il coefficiente di u_{n+k} nello sviluppo di $x^2\, u_n(x)$, si ha $a_{n+2} = 1$, ed $a_{n+k} = 0$ per $k < 2$.

Per $k \geq 3$ il coefficiente di u_{n+k} nel primo membro dell'ultima eguaglianza è $\alpha^{n+k}\, a_{n+k}$, nella prima parte del secondo membro è $\alpha^{n+2}\, a_{n+k}$, e facilmente si calcola il coefficiente analogo nella seconda parte del secondo membro. Infatti si ha

$$x\, u_{n+1}(x) = u_{n+2}(x) + (n+1)! \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}} \cdot \frac{u_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)!}$$

e perciò

$$\int_0^{\alpha x} s\, u_{n+1}(s)\, ds = \frac{u_{n+3}(x)}{n+3} + (n+1)! \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!};$$

quindi in $\int_0^{\alpha x} s\, u_{n+1}(s)\, ds$ il coefficiente di $u_{n+k}(x)$ è

$$(-1)^k \frac{(n+1)!}{(n+k)!}\, \alpha^{n+k} \left(\frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} + \frac{\alpha^{k-4}}{1-\alpha^{k-4}} + \cdots + \frac{\alpha}{1-\alpha} - n - 2 \right).$$

Possiamo così calcolare a_{n+k} e troviamo

$$x^2\, u_n(x) = u_{n+2}(x) + 2\, n! \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-2}}{1-\alpha^{k-2}} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha^{k-3}}{1-\alpha^{k-3}} + \frac{\alpha^{k-4}}{1-\alpha^{k-4}} + \cdots + \frac{\alpha}{1-\alpha} - n - 2 \right) \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}.$$

Con questo metodo non è difficile trovare la formola generale che dà lo sviluppo di $x^m u_n(x)$. Si trova

$$(12)\quad x^m u_n(x) = u_{n+m}(x) + n!\, m! \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{k-m}}{1-\alpha^{k-m}} H_{n,k}^{(m)} \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}$$

dove è

$$H_{n,k}^{(m)} = P_{m-1,k}^{(m)} - \binom{n+m}{1} P_{m-2,k}^{(m)} + \binom{n+m}{2} P_{m-3,k}^{(m)} -$$

$$- \cdots + (-1)^{m-2} \binom{n+m}{m-2} P_{1,k}^{(m)} + (-1)^{m-1} \binom{n+m}{m-1},$$

dove con $P_{r,k}^{(m)}$ denotiamo la somma dei prodotti di r fattori distinti scelti tra le quantità

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \cdots, \frac{\alpha^{k-m-1}}{1-\alpha^{k-m-1}}.$$

Per mezzo della (12) si può formare lo sviluppo del prodotto di due funzioni quando è dato lo sviluppo di una in serie di funzioni $u(x)$ e quello dell'altra in serie di potenze di x.

Matematica. — *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi.* Nota di M. Picone, presentata dal Socio L. Bianchi (1).

Sia D un dominio del piano (x, y) e T l'insieme di punti costituito da tutti i punti dello spazio (x, y, z) aventi per proiezione, sul detto piano, punti di D. Sia $f(x, y, z)$ una funzione delle tre variabili x, y, z, definita in T, ivi continua con tutte le sue derivate parziali dei primi tre ordini.

Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti interni di D e $y = y_0(x)$ una curva estremale per l'integrale

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

la quale passi per i punti P_1 e P_2 e stia completamente nell'interno di D. Si ponga

$$f_{yy}[x, y_0(x), y_0'(x)] = P(x), \quad f_{yy'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = Q(x), \quad \frac{dQ}{dx} - P = A(x),$$
$$f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = R(x),$$

e facciamo l'ipotesi che, in tutto l'intervallo (x_1, x_2), riesca $R(x) \neq 0$.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

Indichiamo con Γ l'insieme [a cui appartiene l'estremale $y = y_0(x)$] delle curve $y = y(x)$, contenute in D, per le quali le funzioni $y(x)$ sono finite e continue con le loro derivate prime nell'intervallo (x_1, x_2) e verificano le condizioni

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2 . \tag{1}$$

Per il più semplice problema del calcolo delle variazioni si ha allora la seguente condizione di Jacobi:

Condizione necessaria perchè l'estremale $y = y_0(x)$ fornisca, nel campo Γ, un estremo per l'integrale $J(y)$ *è che una soluzione, nulla in x_1, dell'equazione differenziale del second'ordine nella u:*

$$\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) + Au = 0 , \tag{2}$$

si mantenga sempre diversa da zero nell'interno di (x_1, x_2).

La necessità di tale condizione viene dimostrata facendo vedere che, ove essa non si verifichi, è possibile, in un intorno comunque piccolo dell'estremale $y = y_0(x)$, costruire curve $y = y(x)$ dell'insieme Γ per le quali è $J(y) > J(y_0)$ e curve per le quali è $J(y) < J(y_0)$. Nelle costruzioni date finora, almeno per quanto io so, si son sempre dapprima ottenute curve $y = y(x)$, per le quali la funzione $y(x)$ è continua e verifica le (1), ma ha però una derivata discontinua in uno o due punti di (x_1, x_2).

Parmi che abbia interesse il notare, come appunto mi permetto di fare con la Nota presente, una costruzione delle curve $y = y(x)$, ora indicate, con la quale si ottengono assai semplicemente e direttamente curve di Γ, anzi *parecchie famiglie di curve di Γ per le quali le funzioni $y(x)$ sono in (x_1, x_2) finite e continue con le loro derivate dei primi* DUE *ordini*. La costruzione è contenuta, si può dire, in un teorema della mia Tesi d'abilitazione: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* [1].

Di ben maggiore interesse è poi il fatto che, considerando le cose dal punto di vista della Nota presente, si arriva, come farò vedere in una Nota futura, ad un'elegante nuova condizione necessaria per un estremo dell'integrale doppio

$$\iint f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy .$$

1. Per fissare le idee riterremo che, *in* (x_1, x_2), *sia sempre* $R(x) > 0$. Supponiamo che non sia verificata la condizione di Jacobi, supponiamo cioè che esista un integrale u della (2) nullo in x_1 e, ulteriormente, in un punto x_1' interno all'intervallo (x_1, x_2). Non potrà allora, com'è ben noto,

[1] Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XI.

essere sempre, in (x_1, x_2), $A(x) \leq 0$, dovrà cioè $A(x)$ prendere in (x_1, x_2) anche valori positivi [1].

Ciò posto, consideriamo l'equazione differenziale del second'ordine

$$\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) + \lambda A u = 0, \tag{3}$$

contenente il parametro λ. Indichiamo con $u(x_1, \lambda)$ quell'integrale di quest'equazione verificante le condizioni iniziali $u(x_1, \lambda) = 0$, $u'(x_1, \lambda) = 1$. In virtù dei risultati ottenuti alle pagine 31 e 32 della citata mia tesi d'abilitazione, poichè la funzione $A(x)$ prende in (x_1, x_2) anche valori positivi, possiamo affermare che:

Esiste una successione, sempre crescente e crescente all'infinito, di valori positivi $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$ *per ciascuno dei quali si ha* $u(x_2, \lambda_n) = 0$. *Posto* $u(x, \lambda_n) = u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *questa funzione* $u_n(x)$, *che è, per* $\lambda = \lambda_n$, *la soluzione della* (3) *verificante le condizioni iniziali* $u_n(x_1) = 0$, $u_n'(x_1) = 1$, *si annulla in* x_1 *e in* x_2 *e, ulteriormente, in* **n** *punti distinti nell'interno dell'intervallo* (x_1, x_2). *Infine, la* $u(x, \lambda)$, *per i valori di* λ *verificanti la limitazione* $0 \leq \lambda < \lambda_0$, *non ha, oltre lo zero* x_1, *alcun altro punto di zero in* (x_1, x_2), *per i valori di* λ *verificanti la limitazione* $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$, *ha, oltre lo zero* x_1, $n+1$ *zeri distinti nell'interno di* (x_1, x_2), *ed è diversa da zero in* x_2.

Pertanto, se, viceversa, per un valore speciale positivo $\bar{\lambda}$ del parametro λ, la soluzione $u(x, \bar{\lambda})$ ha, oltre lo zero x_1, $n+1$ zeri distinti $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, nell'interno di (x_1, x_2), dovrà risultare $\bar{\lambda} > \lambda_n$.

Notiamo altresì che dall'identità

$$u_n \frac{d}{dx}\left(R\frac{du_n}{dx}\right) + \lambda_n A u_n^2 = 0,$$

integrando sull'intervallo (x_1, x_2), si ottiene

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

e quindi, poichè $\lambda_n > 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 \, dx > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

[1] Ed infatti la funzione $v = Ru\frac{du}{dx}$ è nulla in x_1 e in x'_1, mentre se fosse sempre $A(x) \leq 0$ in (x_1, x_2), la v sarebbe non decrescente in (x_1, x_2), poichè

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(Ru\frac{du}{dx}\right) = R\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) = R\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - Au^2 \geq 0.$$

2. Dal teorema ora enunciato andiamo *immediatamente* a dedurre la necessità della condizione di Jacobi. Sia $\eta(x)$ una qualunque funzione finita e continua, in (x_1, x_2), con la sua derivata prima, e sia $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, si può sempre determinare un numero positivo ϱ_η tale che, per $|\varepsilon| < \varrho_\eta$, la curva $y = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$ appartenga all'insieme Γ e di più la differenza $J(y_0 + \varepsilon\eta) - Jy_0)$ abbia il segno di

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \left[P\eta^2 + 2Q\eta \frac{d\eta}{dx} + R\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right] dx =$$

$$= \varepsilon^2 \left[\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A\eta^2 dx \right].$$

Indichiamo con ϱ_n ciò che diviene il numero ϱ_η quando si faccia $\eta = u_n(x)$. Per $|\varepsilon| < \varrho_n$, la curva $y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x)$ appartiene all'insieme Γ e la differenza $J(y_0 + \varepsilon u_n) - J(y_0)$ ha il segno di

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left[\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 dx \right].$$

Supposta non soddisfatta la condizione di Jacobi, poichè allora esiste un integrale della (2) nullo in x_1 e, ulteriormente, in un punto x_1' interno all'intervallo (x_1, x_2), riuscirà $u(x_1, 1) = u(x_1', 1) = 0$ e dovrà perciò essere, in virtù del teorema enunciato al n. precedente, $1 > \lambda_0$. Sia, per fissare le idee, $\lambda_{\nu-1} < 1 \leq \lambda_\nu$; si avrà allora, in forza delle (4) e (5),

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} A u_n^2 dx \begin{cases} < 0, & \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1, \\ > 0, & \text{per } n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, \end{cases}$$

e quindi

$$J(y_0 + \varepsilon u_n) - J(y_0), \text{ per } |\varepsilon| < \varrho_n, \begin{cases} < 0, & \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1, \\ > 0, & \text{per } n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, \end{cases}$$

la curva $y = y_0(x)$ non potrà dunque fornire un estremo per l'integrale $J(y)$.

Troviamo le ν famiglie di curve di Γ:

$$y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x), \quad |\varepsilon| < \varrho_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \nu - 1,$$

continue, dotate in ogni punto di tangente e di curvatura determinate, variabili con continuità, per le quali curve la variazione dell'integrale $J(y)$, relativa al passaggio dalla curva estremale $y = y_0(x)$ ad una qualsiasi di esse, ha sempre segno contrario a quello di $R(x)$ in (x_1, x_2). La curva $y = y_0(x) + \varepsilon u_n(x)$ attraversa l'estremale $y = y_0(x)$ in n punti distinti interni all'arco (P_1, P_2) dell'estremale.

Meccanica. — *Sul calcolo dell'energia del vento.* Nota II preliminare del dott. Mario Tenani, presentata dal Corrisp. G. Arturo Crocco (1).

1. I luoghi da me scelti per una prima applicazione dei metodi di studio precedentemente indicati, sono quelli in cui le registrazioni anemometriche hanno rilevato una maggiore frequenza di venti forti: l'Isola di Maddalena e quella di S. Antioco ambedue sulle coste della Sardegna; per confronto feci poi il calcolo per una stazione bene esposta come Livorno. I dati da me adoperati si riferiscono al 1917 e sono qui citati come esempio dei risultati cui può condurre questo studio: ho considerato come utilizzabili i valori della velocità del vento superiori a 5 metri per secondo; ed ho considerato limitata l'utilizzazione alle velocità inferiori a 15 m/sec. Per giornate di utilizzazione del motore a vento intendo l'insieme di 24 ore con velocità superiore ai 5 m/sec. Ed ecco i risultati:

Località	Giorni di utilizzazione	Media efficace dei giorni d'utilizzazione m/sec.	Media efficace annua m/sec.	R
S. Antioco	253	12.31	10.86	1
Maddalena	205	11.30	9.32	0.63
Livorno	86	9.93	6.13	0.18

Nell'ultima colonna ho calcolato il rapporto R tra le potenze medie che svilupperebbe lo stesso motore a vento, con eguale rendimento medio dell'elica, nelle tre località. Con un rendimento costantemente uguale a 0.85 si avrebbe, per mq. di superficie interessata, una potenza media di cavalli vapore 0,59; 0,37; 0,106, rispettivamente nelle tre località nell'ordine considerato. Ammettendo un rendimento medio ϱ_m diverso, non ci sarà che da moltiplicare i numeri ottenuti per $\varrho_m/0{,}85$.

Poichè le condizioni meteoriche delle due isole sono presso a poco uguali, data la loro non grande distanza, la differenza fra esse può rappresentarci l'effetto delle condizioni orografiche più favorevoli per S. Antioco e meno per la Maddalena.

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

2. Per la stazione di Maddalena ho ottenuto i seguenti risultati mensili:

MESE	Giorni di utilizzazione	Veff. nei giorni di utilizzazione m/sec.	Veff. mensile m/sec.	R	HP/mq.
Gennaio	22	10.33	9.2	0 50	0.36
Febbraio	15	8.88	7.2	0.24	0.17
Marzo	20	10.59	9.1	0.48	0 35
Aprile	19	9.39	8.1	0 34	0.25
Maggio	16	0.06	6.5	0.17	0.12
Giugno	12	8.00	5.8	0 12	0.86
Luglio	16	9.12	7.3	0.25	0.18
Agosto	21	9 83	8.6	0.41	0.30
Settembre	15	8.86	7.1	0 23	0.16
Ottobre	23	11.68	10.6	0.77	0.55
Novembre	21	11.18	9.9	0.61	0.44
Dicembre	18	14.00	11.6	1.00	0 72

Nella tabella ho calcolato, nella penultima colonna, il rapporto R tra la potenza media sviluppata dal motore a vento nei vari mesi e la potenza del mese di dicembre, nell'ipotesi di un rendimento medio costante; nell'ultima colonna, la potenza media mensile del motore per metro quadrato nei vari mesi dell'anno, nell'ipotesi di un rendimento ϱ_m costante eguale a 0.85; al solito, ammettendo un rendimento medio ϱ diverso, basterà moltiplicare i numeri per $\varrho/0{,}85$.

Tale confronto mi sembra di grande importanza nelle applicazioni poichè ci dà l'idea del modo secondo il quale, nella località esaminata, varia la potenza durante l'anno e può quindi condurre direttamente alla definizione degli scopi da assegnare ad un impianto di motori a vento. Un simile esame ripetuto per altre regioni, ad esempio le Puglie, potrebbe dimostrarci un andamento molto diverso; sarebbe pertanto necessario estendere questi studi e sopratutto esaminare i risultati di un considerevole numero di anni.

3. Sarebbe poi di grandissima importanza, seguendo le considerazioni del Crocco [1], ripetere l'esame per diverse altezze sul suolo: in Italia non si posseggono però registrazioni anemometriche opportune nel medesimo luogo; i casi esaminati in Germania dal Peppler lo avrebbero condotto a ritenere (sulle sole medie aritmetiche, però) che non vi è convenienza di elevare i motori a vento a più di 16 metri dal suolo. Sarebbe certamente interessante vedere se tali conclusioni possano ritenersi giuste ove si facesse

[1] Crocco, *Sull'energia disponibile dal vento.* Questi Rendiconti, fasc. 5°, 1° sem. 1921.

l'esame coi metodi qui proposti: ma ciò non ci è possibile poichè non possediamo di quei luoghi che le medie aritmetiche.

Un calcolo da me fatto confrontando le potenze medie annue relative alla stessa ora del giorno per Trapani, località in cui le osservazioni aerologiche hanno dimostrato un rapidissimo aumento della velocità con l'altezza, mi hanno condotto ad osservare che la potenza media annua a 200 metri dal suolo è circa 14 volte maggiore di quella ottenibile all'altezza dell'anemometro. Lo studio di stazioni più opportunamente disposte potrebbe condurci però a risultati assai interessanti e che riguardassero altezze assai minori e praticamente raggiungibili.

Fisica. — *Il « cinematografo parlante » di Emilio Zeppieri.* Nota dell'ing. Enrico Viola, presentata dal Socio C. Viola [1].

Le svariate rappresentazioni visive e uditive, mediante gli incessanti perfezionamenti introdotti nelle macchine cinematografiche e nei fonografi, hanno sempre allettato il pubblico, ma non gli hanno procurato finora il godimento maggiore, di vedere finalmente attuata la combinazione sincrona delle due riproduzioni, visiva e uditiva; i tentativi fatti in questo campo, sopratutto per opera di Edison e di Gaumont, non riuscirono a risolvere in modo soddisfacente il problema.

La sua soluzione geniale è stata riservata ad Emilio Zeppieri, che ottenne il funzionamento sincrono e continuo dei due apparecchi; l'illusione di vedere e sentire i protagonisti nella loro naturale attitudine, nell'atto stesso onde sono animati, è veramente perfetta.

Il collegamento del cinematografo col fonografo richiede il trasporto sincronico del moto dall'apparecchio projettante all'apparecchio parlante, trasporto a distanza tentato dai varii autori, gli uni per via elettrica, gli altri per via meccanica.

Abbandonato il sistema elettrico di trasmissione, come non rispondente all'intento, Emilio Zeppieri ha risolto il sincronismo perfetto collegando il projettore cinematografico col fonografo mediante un sistema meccanico, dove lo stesso motore imprime il moto contemporaneamente ai due apparecchi senza scosse nè perdite.

L'apparecchio Zeppieri consiste delle seguenti parti:

a) un motore elettrico,

b) un projettore cinematografico ordinario,

c) un fonografo ad azione continuata,

d) una trasmissione meccanica.

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1921.

Lo Zeppieri si serve, nel suo apparecchio, di pellicole cinematografiche e di dischi fonografici aventi le dimensioni usuali adottate in commercio; in vista di ciò egli ha dovuto adattarvisi e mantenere nei due apparecchi le velocità di rotazione, che si usano nei projettori e nei fonografi comuni, ossia rispettivamente di 120 e 80 giri al minuto primo.

Il motore prende d'ordinario l'energia dalla corrente industriale ed a questa si uniforma. La velocità all'albero motore varia a seconda della corrente impiegata, la quale d'ordinario è alternata trifasica a 42 o 50 periodi con voltaggio limitato. In ogni caso la velocità sull'albero motore è molto superiore a quella del projettore e del fonografo. Il sistema di trasmissione che varia a seconda delle distanze, provvede al collegamento delle tre macchine (motore, projettore e fonografo); per semplicità delle cose la velocità di rotazione dei mezzi di trasmissione è quella stessa, che riceve una delle tre macchine collegate, p. es. di 120 giri, velocità nel projettore, mentre essa si riduce a $^2/_3$ nell'accoppiamento al fonografo.

Per quanto riguarda la posizione che deve assumere il motore sull'albero di trasmissione, una breve considerazione elimina ogni dubbio. Infatti, se l'albero di trasmissione ha una lunghezza considerevole, non conviene applicare il motore ad una estremità dell'albero, poichè la torsione porterebbe una differenza di fase tra projettore e fonografo: in tal caso il motore ha il suo vero collocamento in un punto intermedio; ma poichè le distanze sono di solito relativamente piccole, non superiori a 30–35 metri, e le resistenze passive quasi eliminate, lo Zeppieri colloca il motore ad una estremità, di preferenza vicino al projettore, ove l'operatore cinematografico può facilmente sorvegliarne il funzionamento.

Il collegamento sincronico del projettore col fonografo non era il solo problema che l'inventore doveva affrontare. Infatti l'apparecchio Zeppieri sarebbe rimasto manchevole senza il funzionamento continuativo del fonografo e senza il controllo del sincronismo.

La continuità dell'azione nel cinematografo è raggiunta da sè con la notevole lunghezza delle *films* usuali, ma, per ciò che riguarda il grammofono, l'azione sua è limitata dalle solite dimensioni dei dischi; vi si richiedeva perciò un meccanismo che permettesse l'intercalazione di più dischi successivi fonografici senza interruzione. Un apparecchio studiato a tal uopo, aggiunto al sincronismo, prende il nome di « odègrafo ».

Esso consta di due piatti orizzontali girevoli, posti l'uno accanto all'altro, che assumono un moto alternato, e sui quali sono applicati i dischi fonografici. Esaurita l'azione di un disco, il piatto portante si arresta ed entra in moto l'altro piatto e con esso il disco relativo; a questo segue nuovamente il primo, poi il secondo e così di seguito fino a che la successione dei varî dischi compie l'azione determinata dai *films* cinematografici. Si noti che fra l'azione di un disco e quella dell'altro corre un tempo di 4 minuti

primi, tale da bastare all'operaio per levare il disco dal piatto portante e sostituirvi il successivo.

Per mantenere una tonalità perfetta nella riproduzione del suono, fu necessario regolare il moto di rotazione dei piatti in modo da avere non solo una velocità costante, ma altresì l'arresto immediato di un piatto e l'avviamento istantaneo dell'altro. Un volano ed un regolatore a molla mantengono il moto uniforme, mentre un ingegnoso sistema di leve a scatto fa sì che al momento opportuno un piatto si fermi bruscamente, e l'altro si metta subito in moto colla velocità conveniente.

Dell'odègrafo lo Zeppieri costruì un primo tipo ove, essendo la forza motrice applicata ai perni verticali dei piatti girevoli, le forze d'inerzia sono vinte da opportune molle regolabili. Un secondo tipo, fatto dopo lunghi studi, è basato su un principio leggermente diverso, essendo la forza motrice applicata alla periferia dei piatti mediante una funicella metallica, la cui elasticità assorbe gli urti provenienti dalle forze d'inerzia. L'applicazione di questa funicella metallica richiese una modificazione nelle ordinarie corde d'acciaio, poichè era indispensabile evitare i lievissimi scorrimenti che questa poteva subire lungo la periferia dei piatti, e ciò per non perdere il sincronismo. La funicella metallica porta quindi una serie di sferette d'acciaio fissate ad essa a distanze uguali. In corrispondenza di queste sferette vi sono, nella periferia dei piatti, degli alloggiamenti, in modo che nel moto di rotazione ogni scorrimento della funicella metallica è evitato.

Questo cordino metallico pallinato è stato dallo Zeppieri anche applicato con successo alla trasmissione meccanica da una puleggia all'altra per evitare gli ingranaggi e diminuirne gli attriti.

Il controllo del sincronismo si ottiene mediante due quadranti nell'odègrafo e nel proiettore.

Il quadrante nell'odègrafo porta due indici con due numerazioni distinte. La durata di un disco è di 4', nei quali esso compie 320 giri: la prima numerazione inscritta in un cerchio porta 80 divisioni, e l'indice compie, nei 4', quattro giri; in corrispondenza di ogni giro l'altro indice compie una divisione della seconda numerazione inscritta in un secondo cerchio di 8 divisioni, pari a 8 minuti. Per tal modo l'operatore che sorveglia l'odègrafo può in ogni istante sapere esattamente quanti giri ha compiuto il disco che ruota.

Il quadrante del projettore è analogo al precedente, ma porta, oltre alle due numerazioni suddette, una terza numerazione inscritta in un cerchio di 12 divisioni, corrispondenti a 12 fotogrammi della *film*, che passano davanti all'obbiettivo nel tempo in cui un disco compie un giro, cioè in $^1/_{80}$ di minuto primo. In corrispondenza di questo quadrante la *film* porta una numerazione progressiva per la successione dei fotogrammi, cosicchè riesce agevole rimettere la pellicola cinematografica in sincronismo coi dischi, quando accadesse che tale sincronismo fosse perduto.

Nel caso di rottura della *film* l'operatore cinematografico ferma il motore elettrico, indi accomoda col solito sistema la pellicola, sostituendo, ove fosse necessario, un breve tratto in bianco al posto di quei fotogrammi che si fossero eventualmente tolti.

L'invenzione di Emilio Zeppieri completa e perfeziona il successo della cinematografia ordinaria, che è industria prevalentemente italiana, e tenderà ad accostarsi all'arte lirica, che in Italia ha la sua culla gloriosa, per imitarne i motivi.

Chimica. — *I punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni.* Nota di Ugo Pratolongo [1], presentata dal Socio Angelo Menozzi [2].

Allo scopo di risolvere alcuni problemi inerenti alla determinazione ebulliometrica dell'alcool nei vini, alla costruzione e all'impiego degli apparecchi relativi [3], ho fatto oggetto d'indagine l'influenza che sul punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche spiegano le variazioni di pressione.

Dei risultati conseguiti dò conto nella presente Nota, richiamandomi al lavoro testè citato per le conseguenze di carattere applicativo che ne derivano.

La tensione del vapor acqueo a diverse temperature fu già oggetto di classiche ricerche da parte di Regnault. Le tensioni di vapore dell'alcool etilico furono ripetutamente oggetto d'indagine, con risultati in sufficiente accordo, se non del tutto coincidenti. Le determinazioni di Regnault [4], assegnano al punto di ebullizione dell'alcool una variazione di gradi 0 0339 per la variazione di pressione di un millimetro di mercurio, in prossimità della pressione normale; le determinazioni di Schmidt [5] e di Noyes e Warfel [6] assegnano alla stessa variazione il valore 0,0333; le determinazioni di Kahlbaum e v. Wirkner [7] attribuiscono alla stessa variazione il valore 0,0317.

L'influenza della pressione sul punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche non è stata sinora, per quanto è a me noto, oggetto di indagine.

Le determinazioni vennero compiute in un apparecchio ebullioscopico Beckmann della foggia consueta, a triplice tubulatura.

Nella tubulatura mediana, più capace, era sospeso, a tenuta d'aria, un refrigerante a ricadere. Lungo questa tubulatura, al disopra del refrigerante,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria della R. Scuola Superiore d'Agricoltura di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 5 giugno 1921.

(3) Cfr. Giornale di Chimica Industriale ed Applicata, vol. III, nn. 4, 6 e 7 (1921).

(4) *Mêmoires de l'Acad. des Sciences.* Paris vol. 26, pag. 350, 1862; v. anche Ramsay e Young, Journal Chem. Soc., vol. 47, pag. 640, 1885 e Phylos., Trans. vol. 177, pag. 127, 1886.

(5) Zeitschr. Phys. Ch., vol. 8, pag. 633, 1891.

(6) Journal of the Americ. Chem. Soc., vol. 23, pag. 464, 1901.

(7) Zeitschr, Phys, Ch., vol. 26, pag. 603, 1898.

si apriva una tubulatura secondaria per la quale l'ebullioscopio era collegato con l'apparecchio a vuoto.

Nelle due tubulature laterali erano innestati, sempre a tenuta d'aria, due termometri: un termometro Beckmann diviso in centesimi di grado e un termometro comune graduato a decimi di grado, sul quale peraltro, con l'aiuto di una lente, era agevole leggere anche i ventesimi di grado.

L'apparecchio a vuoto era costituito da un comune aspiratore a caduta d'acqua comunicante con una bottiglia tubulata, sufficientemente grande da compensare le oscillazioni di pressione dipendenti dall'incostante regime dell'aspiratore. Sulla bottiglia era inserito il manometro a mercurio.

L'esperienza ha dimostrato che è pressochè impossibile, nelle condizioni sperimentali adottate, ridurre gli errori inevitabili di osservazione al disotto di un ventesimo di grado, mediamente; sì che riesce pressochè indifferente eseguire le determinazioni sul termometro Beckmann a centesimi o sul termometro comune a ventesimi di grado; l'impiego di quest'ultimo, data la piccola capacità termica del bulbo e la rapidità con cui assume la temperatura del liquido bollente, presenta anche qualche vantaggio sull'impiego del termometro Beckmann.

Tale difficoltà dipende evidentemente dalla difficoltà di mantenere costante il regime di ebullizione e quindi di evitare le leggere variazioni di tenore della soluzione idroalcoolica bollente in dipendenza dell'ineguale concentrazione del liquido bollente e del distillato; le piccole irregolari variazioni di tenore che ne derivano dànno luogo a sensibili variazioni momentanee del punto di ebullizione, che oscilla perciò irregolarmente nei limiti or ora enunciati.

Credo anche opportuno ricordare, sebbene si tratti di fenomeno normale, che la natura del mezzo usato per evitare il soprariscaldamento delle miscele in esame — perline di vetro, pezzetti di pomice, pezzetti di platino, aria gorgogliante da un sottile capillare — non è senza influenza sui risultati conseguiti, tanto da rendere inconfrontabili serie di dati ottenuti con mezzi diversi.

I dati ebullioscopici conseguiti con l'impiego dell'apparecchio Beckmann vennero controllati per gruppi con un apparecchio ebulliometrico metallico a riscaldamento elettrico, quali si usano nella determinazione ebulliometrica dell'alcool nel vino.

L'impiego di tale apparecchio consente di ridurre sensibilmente l'errore medio di osservazione; i dati forniti da tale apparecchio s'accordano, nei limiti degli errori d'osservazione, con quelli forniti dall' apparecchio Beckmann.

Considerato lo scopo della ricerca e le speciali difficoltà ad essa inerenti, ho determinato, anzi che i punti di ebullizione delle diverse miscele a diverse pressioni, le variazioni del punto di ebullizione delle singole miscele conseguenti ad una determinata variazione di pressione.

Allo scopo di conferire ai risultati sperimentali il più stretto valore comparativo, ogni serie di determinazioni veniva compiuta su una stessa miscela, mantenuta in condizioni identiche, salvo la pressione, alternando irregolarmente le pressioni e ripetendo le determinazioni ad una stessa pressione, sì da evitare o correggere gli errori dipendenti da modificazioni sistematiche nelle condizioni del sistema.

Le miscele idroalcooliche esaminate vennero costituite mescolando acqua ed alcool puro — a 99,2 % — nelle proporzioni volute.

Il tenore della soluzione in esame veniva determinato densimetricamente prima e dopo ogni serie di determinazioni.

Ogni determinazione venne eseguita per lo meno in triplo, sì da avere la misura degli errori sperimentali.

I risultati conseguiti sono raccolti nella tabella seguente:

Variazione del punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni.

Numero d'ord.	Tenore alcoolico della miscela		Pressione	Variazione del punto di ebullizione
	% in peso	% in volume	mm. di mercurio	
1	8.22	10.20	760	—
			700	2.23 ± 0.05
			640	4.63 ± 0.05
2	16.82	20.6	760	—
			700	2.18 ± 0.04
			640	4.54 ± 0.06
3	26.41	32.—	760	—
			700	2.14 ± 0.06
			640	4.46 ± 0.05
4	37.45	44.5	760	—
			700	2.10 ± 0.03
			640	4.38 ± 0.06
5	47.50	55.2	760	—
			700	2.06 ± 0.05
			640	4.30 ± 0.06
6	58.27	66.—	760	—
			700	2.03 ± 0.06
			640	4.24 ± 0.05
7	68.49	75.5	760	—
			700	2.— ± 0.04
			640	4.18 ± 0.06
8	80.—	85.4	760	
			700	1.97 ± 0.06
			640	4.12 ± 0.06
9	92.46	95.—	760	—
			700	1.95 ± 0.05
			640	4.10 ± 0.04

I risultati sperimentali raccolti nelle pagine precedenti e i dati già noti sul punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche a pressione normale, consentono di compilare la tabella dei punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni.

Mi sono valso a tale scopo, per gli alti titoli alcoolici dal 92 al 100 % di alcool dei dati conseguiti, nelle loro accurate determinazioni, da Noyes e Warfel (l. c.). Nel campo dei medi e dei bassi titoli alcoolici mi sono attenuto invece ai meno recenti dati di Gröning; i dati di Noyes e Warfel presentano in questo campo sensibili discontinuità, dipendenti probabilmente dall'impiego di diversi metodi di determinazione.

Nella tabella che segue, i dati riferentisi alla pressione normale sono dal 2 al 13 tratti dalle tabelle del Gröning; i dati n. 14 e 15 sono tratti dalla tabella di Noyes e Warfel.

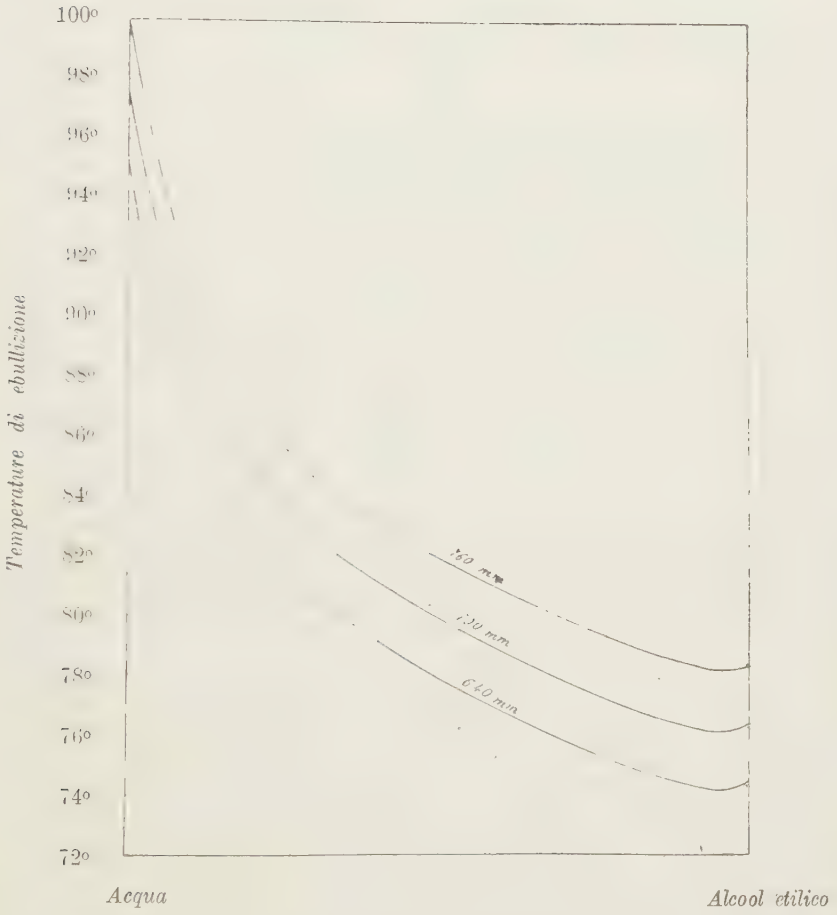
I punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni.

Numero d'ordine	Tenore delle soluzioni idroalcooliche — Alcool		Punto di ebullizione		
	% in volume	% in peso	760 mm. di merc.	700 mm. di merc.	640 mm. di merc.
1	—	—	100.—	97.71	95.26
2	5. —	4.—	95.9	93.64	91.22
3	10. —	8.04	92.6	90.37	87.97
4	15. —	12.15	90.2	88.00	85.62
5	20. —	16.28	88.3	86.12	83.76
6	25. —	20.41	86.9	84.74	82.40
7	30 —	24.69	85.7	83.56	81.24
8	40. —	33.39	84.1	81.99	79.70
9	50. —	42.52	82.8	80.73	78.48
10	60. —	52.20	81.7	79.67	77.46
11	70. —	62.50	80.8	78.80	76.62
12	80. —	73.59	79.9	77.92	75.76
13	90. —	85.75	79.1	77.14	74.99
14	95. —	92.46	78.24	76.29	74.14
15	100. —	100.—	78.30	76.40	74.30

I dati riferentisi all'acqua — n. 1. — sono desunti dalla determinazione di *Regnault*. I dati riferentisi all'alcool etilico — n. 15 — sono ottenuti sottraendo dal punto di ebullizione dell'alcool — 78,3 — (Noyes e Warfel) le differenze che risultano dalle determinazioni a diverse pressioni di Kahlbaum e v. Wirkner (l. c.)

È appena necessario rilevare che i dati originali raccolti nella tabella che precede riflettono necessariamente gli errori onde sono affette le determinazioni dei punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a pressione normale (Gröning, Noyes e Warfel) da cui sono derivati.

Il diagramma che segue espone graficamente i risultati stessi.



I punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni.

Poteva presentare qualche interesse, sopratutto dal punto di vista teorico, la determinazione sperimentale delle concentrazioni idroalcooliche per le quali è minimo il punto di ebullizione alle diverse pressioni.

Le curve di punti di ebullizione a diverse pressioni presentano peraltro — come è agevole rilevare nel diagramma che illustra il presente lavoro — nella regione del minimo così lieve curvatura, che la ricerca riesce assai delicata ed esige l'impiego di mezzi di misura di grande acutezza.

Chimica. — *Sulla costituzione dei dipeptidi dell'acido aspartico* (1). Nota di C. Ravenna, presentata dal Socio G. Ciamician (2).

La teoria fa prevedere due dipeptidi dell'acido aspartico isomeri chimici a seconda che nella condensazione una delle molecole di acido aspartico sia impegnata per il carbossile che si trova in posizione α rispetto al gruppo $-CH_2NH_2$ o per quello in posizione β:

$COOH . CH_2 . CH(COOH) . NH . CO . CH(NH_2) . CH_2 . COOH$ forma α

$COOH . CH_2 . CH(COOH) . NH . CO . CH_2 . CH(NH_2) . COOH$ forma β

Il composto α è stato ottenuto da Fischer e Koenigs (3) e la costituzione è dedotta dal suo modo di formazione dall'acido dichetopiperazindiacetico.

Gli studî precedenti miei con G. Bosinelli (4) avevano dimostrato che per ebollizione della soluzione di asparagina ordinaria si origina una sostanza di composizione e caratteri identici a quelli descritti da Fischer e Koenigs per il loro dipeptide. Ma poichè in uno studio successivo (5) abbiamo stabilito che tale sostanza, pure producendosi in larga misura dall'asparagina, non si forma nè dalle soluzioni di acido aspartico nè da quelle di aspartato ammonico, deducemmo che la condensazione iminica doveva avvenire non per mezzo del carbossile libero di una delle molecole di asparagina, ma per mezzo di quello che si trova allo stato di amide e che essendo esso in posizione β rispetto al gruppo $-CH_2NH_2$, al dipeptide da noi ottenuto si dovesse assegnare la struttura β e che fosse perciò da considerarsi non identico, ma l'isomero chimico di quello di Fischer e Koenigs.

Per avere la prova sperimentale di tale deduzione teoretica ho preparato il dipeptide di Fischer e Koenigs nella presunzione che da un confronto

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di agricoltura a Portici.

(2) Presentata nella seduta del 6 novembre 1921.

(3) Berichte, XL, 2, 2048 (1907).

(4) Questi Rendiconti, XXVIII, 2, 113 e 137 (1919); Gazzetta chimica italiana, XLIX, 2, 303 (1919).

(5) Questi Rendiconti, XXIX, 1, 1 (1920); Gazzetta chimica italiana, L, 1, 281 (1920).

più approfondito di esso col nostro, potesse emergere qualche proprietà atta a differenziare i due isomeri. Per la preparazione, seguendo le indicazioni degli autori, l'asparagina venne trasformata nell'etere dimetilico dell'acido aspartico; questo fu condensato ad etere dimetilico dell'acido dichetopiperazindiacetico che saponificato diede l'acido corrispondente. Per trattamento dell'acido con barite si ottiene il dipeptide.

Esso si presenta come una polvere bianca, soffice, amorfa, di sapore acido. È solubilissimo nell'acqua; la soluzione concentrata è sciropposa e, dallo sciroppo, rimescolato con alcool, si separa in breve il dipeptide polverulento. A 120° si decompone rigonfiandosi senza fondere. Queste proprietà sono quelle già descritte da Fischer e Koenigs, da me ora riconfermate, ma peraltro identiche a quelle del nostro presunto β-dipeptide.

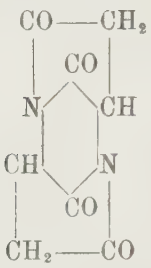
Ho cercato perciò di mettere in evidenza qualche altro carattere dell'acido asparagil-aspartico di Fischer e Koenigs. Se lo si riscalda per 5-6 ore in tubo da saggio aperto, alla temperatura di 210°, esso si trasforma in una sostanza che per tutte le sue proprietà è stata riconosciuta identica al corpo della composizione $C_8H_6N_2O_4$ (l'antica imide fumarica) al quale già assegnammo la costituzione di un'anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico (vedasi oltre) e che avevamo ottenuto, a suo tempo, anche dal nostro dipeptide. Neppure nel contegno col riscaldamento potei quindi osservare alcuna differenza fra i due dipeptidi.

Caratteri differenziali evidenti li ebbi invece confrontando il contegno dei due dipeptidi da un lato coll'acetato di piombo neutro e dall'altro col solfato di rame e potassa caustica. Coll'acetato di piombo il nostro dipeptide produce un precipitato voluminoso solubile, ma difficilmente, in eccesso di reattivo: quello di Fischer e Koenigs precipita del pari abbondantemente coll'acetato di piombo, ma il precipitato è assai facilmente solubile nell'eccesso. Col solfato di rame e potassa caustica il nostro dipeptide dà, come è noto, nel modo più caratteristico la reazione del biureto; quello di Fischer e Koenigs produce invece soltanto una colorazione nettamente azzurra.

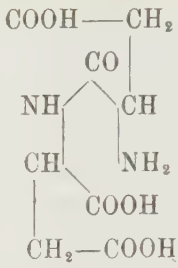
Dopo avere in tal modo stabilito che il dipeptide di Ravenna e Bosinelli non è identico, ma è l'isomero chimico di quello di Fischer e Koenigs, per esaurire il programma che mi ero proposto rimaneva da accertare quali dei due dipeptidi prenda origine dall'anidride dall'acido dichetopiperazindiacetico.

È stato detto a suo tempo che una tale anidride si forma per riscaldamento sia del malato acido di ammonio che del β-dipeptide dell'acido aspartico ed anche, come si è visto più sopra, dall'α-dipeptide di Fischer e Koenigs. Ad essa fu assegnata la costituzione sottoindicata da Ravenna e Bosinelli i quali dimostrarono inoltre che per trattamento a freddo con acqua di barite questo corpo si trasforma nell'acido asparagil-aspartico. Poichè, confrontando le relative formule di struttura si osserva che a seconda del

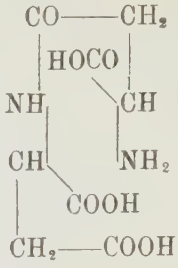
modo di apertura degli anelli può formarsi tanto l'uno quanto l'altro dipeptide.



Anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico



α-dipeptide dell'acido aspartico



β-dipeptide dell'acido aspartico

e non essendovi d'altra parte ragioni per affermare *a priori* quale dei due possa prendere origine, ho preparato nuovamente, per risolvere la questione, la detta anidride partendo sia dal malato acido di ammonio sia dai due dipeptidi isomeri e sempre seguendo i procedimenti indicati nelle precedenti Note, dalle anidridi delle tre provenienze ho preparato, per trattamento colla barite, i rispettivi dipeptidi.

Per riconoscerne la costituzione, le soluzioni di essi furono trattate da un lato coll'acetato di piombo neutro e dall'altro con solfato di rame e potassa caustica In tutti e tre i casi si ottenne coll'acetato di piombo un precipitato difficilmente solubile in eccesso di reattivo ed il solfato di rame colla soluzione alcalina manifestò positiva la reazione del biureto. Ciò sta ad indicare che il dipeptide che si origina dall'anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico è l'isomero β e conferma inoltre che l'anidride è sempre la stessa sia che provenga dal malato ammonico, sia dall'uno o dall'altro dei dipeptidi.

Poichè si poteva peraltro pensare che dall'anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico si fosse formato, col β dipeptide, anche l'isomero α in modo da aversi un equilibrio delle due forme, ho ricercato se l'α-dipeptide fosse stato presente. A tal fine, una parte del dipeptide ottenuto dall'anidride venne trattata con acetato neutro di piombo in piccolo eccesso; dal liquido filtrato che avrebbe dovuto contenere l'α-dipeptide, venne eliminato il piombo con idrogeno solforato ed il nuovo filtrato fu evaporato nel vuoto. Rimase un piccolo residuo sciropposo sul quale si eseguì la reazione del biureto. Essa risultò positiva. Sembra perciò che dalla detta anidride si origini esclusivamente il β-dipeptide.

Le esperienze descritte in questa Nota, hanno dunque dimostrato, in armonia colla supposizione esposta nella Nota precedente, che il dipeptide dell'acido aspartico da noi ottenuto per ebollizione delle soluzioni acquose dell'asparagina ordinaria (β-asparagina), non è identico, ma è l'isomero chi-

mico del dipeptide di Fischer e Koenigs, ed inoltre che anche al dipeptide da noi ottenuto per via indiretta dall'anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico è da assegnarsi la struttura del β-dipeptide. L'α-dipeptide con ogni probabilità potrà peraltro ottenersi anch'esso per sintesi diretta dall'α-asparagina per ebollizione della sua soluzione acquosa. La questione potrà quindi formare oggetto di ulteriori studî. Mi riservo inoltre di continuare le ricerche sulla sintesi dei polipeptidi per mezzo delle amidi degli aminoacidi; argomento che interessa il problema della funzione di questi corpi nei vegetali.

Ringrazio infine il dott. Ulderico Azzurrini per l'efficace aiuto che mi prestò nell'esecuzione di queste esperienze.

Geomorfologia. — *Lo svolgimento della morfologia costiera.* Nota di Gaetano Rovereto, presentata dal Socio Arturo Issel [1].

A un risultato non meno imperfetto si giunge quando col concetto di un'azione ciclica si vogliono spiegare le forme delle coste [2].

Raoul Blanchard, ad esempio, studiando le coste della Provenza [3], chiama *senili* quelle della Camarga, *mature* le proprie alla penisoletta dei Martigues, *tendenti alla maturità* le altre da Tolone alle Hyères, *giovani* le distese da Marseilleveyre a Cassis. Eppure son tutti tratti di costa battuti dalla stessa onda e da egual tempo; onde è certo, che con simili distinzioni si prescinde talmente dal modo di svolgimento fisico e geologico del fenomeno, che il sistema sorpassa il fatto, ed è erroneo.

A parte la questione, che abolita la *nozione tempo* nella esplicazione del fenomeno, si distinguono i diversi stadî su prevenzioni affatto convenzionali, bisogna anche dire, come con tal metodo venga abolita ogni esamina di quanto influiscano sulla forma della costa tutti i diversi e numerosi fattori concomitanti e isolati, preparatori e determinatori della linea costiera, in comparazione dei quali l'azione dell'onda, da cui deriverebbero le condizioni caratterizzanti i varî stadî come forme, e non come svolgimenti, è di una importanza molto secondaria.

Così, il Davis, con quei suoi suggestivi diagrammi in cui una costa gradualmente si modifica per la continuata azione dell'onda [4], non considera che le forme derivanti da questo solo agente, non sono precisabili con sicurezza, poichè la composizione litologica, l'assetto stratigrafico, la posizione geografica, lo stato morfologico, hanno su quel tratto di costa influenze più chiare e meglio determinanti, o molto più attive, di quelle delle onde.

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1921.

[2] Rend. Accad. Lincei, vol. XXIX, fasc. 3°-4°, 1920.

[3] Blanchard R., *Les côtes de Provence.* La Géogr., vol. XXIV, 1911.

[4] Davis W. M., *Practical exercises in physical geography.* Boston, 1908.

Le alte falesie che troncano lunghi tratti della Riviera di Levante, non sono solo dovute all'arretramento della costa sotto l'azione del mare: azioni anteriori hanno preparato una costa ripida, sopra e sotto il livello del mare, contro la quale l'ondazione ha prodotto quell'intaglio conferente a tale costa l'aspetto che i geografi chiamerebbero *giovane*; e difatti, la sparizione dei terrazzi marini quaternarî, la troncatura dei terrazzi fluviali dello stesso periodo, le vallette longitudinali in posizione costiera, i mancati arretramenti dove esistevano rocce più resistenti, tutto indica che le forme di tale costiera sono recenti Ma l'insieme è antico: la riva di costa del quaternario è per lunghi tratti sovrapposta a quella del pliocene.

Ma lungo la costa della Toscana esistono per notevoli distese forme affatto differenti: abbiamo un retroterra, sorto dal mare pliocenico, a forme ampie e dolci, quindi a false forme mature, e con una riva deposita, unita e ragguagliata, che i geografi chiamerebbero *senile*. Eppure la costa della Toscana è più giovane di quella della Liguria, la sua linea di costa pliocenica bisogna cercarla molto lungi entro terra, e le differenze fra loro non sono dovute a diversità nelle azioni del mare, ma a quelle endogene di sollevamento.

Quindi, con i dettami della geografia si può solo definire la condizione morfologica, parlare di costa unita, ragguagliata, intaccata, frastagliata e simili; con quelli della geologia stabilire i fenomeni endogeni che hanno prodotto tanto l'emersione e il limite del continente, quanto la morfologia sottomarina; con quelli della geomorfologia è possibile coordinare le osservazioni fatte negli altri due campi, e riconoscere il modo di svolgimento delle varie forme: svolgimento la cui continuazione, come si è visto dai confronti ora fatti, non porta a determinate forme collegate a determinati stadî.

Lo studio delle coste presenta questa grande facilitazione, che la rappresentazione in piano delle stesse è senz'altro gran parte della descrizione morfologica. Basta poca cognizione geologica per passare a comprendere le condizioni strutturali e la storia genetica.

Per farsi un concetto più definito di questi accomunamenti si consideri, ad esempio, che una costa ben vallonata, sommergendosi — condizione geografica e fatto geologico — dà luogo a forti rientranze che risalgono secondo i fondi delle valli: le parti fra queste sporgenti, sotto forma di capi e simili, si conservano se costituite da roccia ben salda — condizione litologica — come nel caso delle *rias* che sono in granito; per di più, con la stessa roccia si ha una condizione particolare, quando sia intervenuta l'azione dei ghiacciai — condizione fisica e agente geologico — che è quella dei *fiordi*. Hanno ancora foggie differenti le insenature dipendenti da rocce stratificate, e dallo stato di divisione e di pendenza di queste: le più singolari sono quelle associate a strati orizzontali, cui d'ordinario si dà il nome di *cale*, che io ho sostituito, per precisar meglio, con quello di *marse* [1]: ne sono

[1] Rovereto G., *Studî di geomorfologia*, pag. 50, 1908..

esempio le marse di Bonifacio [1], di Siracusa, di Malta, di Tobruk, ecc.; non è quindi esatto, come fa il geografo Brunhes [2], di riunire le cale alle rias.

Una variazione delle rias sono invece le *calanche* della Provenza, dal primo loro descrittore, il geologo Fournier [3], attribuite ad una fratturazione costiera, ma conseguenti invece da una sommersione più ridotta, di una costa poco sollevata, in roccia porfiritica, resistente come la granitica; la loro differenziazione dalla rias consiste solo nel minore e più ristretto addentramento, dovuto alla minore entità dell'incisione continentale e della sommersione.

Con le rias sono state accomunate anche le *vallone* della Dalmazia; però è meglio continuare a tenerle distinte; perchè si tratta di rientranze, che hanno, è vero, un'origine eguale a quella delle rias, ma presentano condizioni differenti: sono addentrate in modo straordinario in una regione che, per essere carsica, ha impedito alle correnti terrestri di colmarle con materiali di trasporto.

Morfologia. — *Intorno alla morfologia del cervello di Proteus anguineus e sull'esistenza del suo nervo ottico (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi)* [4]. Nota del dott. Edoardo Benedetti, presentata dal Corrispondente E. Giacomini [5].

Ho da qualche tempo intrapreso, quale contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi e particolarmente degli Urodeli, una serie di ricerche intorno al cervello di *Proteus anguineus*, soprattutto riguardo all'esistenza del suo nervo ottico e del cervelletto, che venne negata dall'Edinger e dal Hirsch-Tabor.

In attesa che il lavoro, già condotto a buon punto, venga completato e pubblicato per esteso, stimo frattanto opportuno di rendere noti i risultati principali che ho potuto ricavare dalle indagini e dalle osservazioni da me finora eseguite.

La struttura delle singole parti componenti il cervello di Proteo è estremamente semplice. Vi ha una sostanza grigia centrale formata da elementi

(1) Il Giustiniani, geografo genovese della fine del secolo XV, così ricorda: « Bonifacio..... ha un porto, ossia un canale, ovvero una cala ». Mss. in Biblioteca Berio.

(2) Brunhes J., *Les calas des Baléares*. La Géographie, vol. XXV, 1912.

(3) Fournier E., *Études stratigr. sur les calanques du littoral des Bouches du Rhône*. Feuill. d. Jeun. Natur., jull., 1894.

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia comparata dell'Università di Bologna.

(5) Presentata nella seduta del 6 novembre 1921.

cellulari insolitamente grandi, e perciò più scarsi che non in altri Anfibi, disposti senza ordine apprezzabile immediatamente sopra l'ependima. Salvo rare eccezioni, non si nota la formazione di distinti nuclei nervosi.

I ventricoli cerebrali e le comunicazioni tra questi (acquedotto del Silvio, forami di Monro) sono senza confronto più ampii che non negli altri Anfibi urodeli ed anuri, ove soltanto allo stadio larvale troviamo disposizioni lontanamente simili a quelle del Proteo.

Se noi con Johnston, Kappers, Studnicka ed altri, consideriamo il telencefalo dei Pesci come evertito, e quello degli Anfibi anuri come invertito, allora troviamo nel Proteo uno stato intermedio rispetto a questa rotazione degli emisferi: perciò le singole regioni, funzionalmente identiche a quelle di altri Anfibi superiori al Proteo, vengono in quest'ultimo animale a trovarsi in una posizione diversa rispetto alle medesime dei menzionati Anfibi.

La regione del *septum* negli emisferi del Proteo sporge in modo molto pronunciato nell'interno di ciascun ventricolo. Per questo motivo e anche in causa della maggiore eversione rispetto agli emisferi di altri Anfibi urodeli e anuri, il contorno della sezione trasversale della cavità degli emisferi non si presenta ellittico, come in questi, ma spiccatamente triangolare.

Sempre in causa della maggiore eversione degli emisferi, la scissura interemisferica è qui estremamente superficiale e scompare quasi nella porzione caudale degli emisferi. Negli altri Anfibi essa si mantiene per tutta la lunghezza degli emisferi stretta e profonda.

L'apparecchio olfattorio è sviluppatissimo e assume negli emisferi una estensione molto maggiore che non negli altri Anfibi.

Il nervo olfattorio di ciascun lato si distribuisce, appena entrato nel bulbo olfattorio, a due zone di glomeruli ben distinte e di grandezza pressochè eguale; non presenta perciò la disposizione solita, conosciuta in altri Anfibi, di una radice principale e una secondaria, essendo nel Proteo ambedue le radici di eguale potenza.

Le fibre nervose che formano il fascicolo prosencefalico mediale incrociano nella lamina commessurale dorsalmente a quelle del fascicolo prosencefalico laterale, immediatamente sotto alla « commissura pallii anterior ». Questo comportamento, diverso da quanto finora fu descritto per gli Anfibi, è dovuto: *a*) alla grande estensione dell'area olfattoria; *b*) all'ampiezza dei forami interventricolari; *c*) all'eversione degli emisferi.

Tutta la porzione diencefalica è relativamente più estesa che non in altri Anfibi, specialmente rispetto all'asse longitudinale.

La lamina infraneuroporica del pavimento diencefalico è straordinariamente sviluppata in altezza, arrivando con la sua porzione dorsale in tutta prossimità della parete dorsale diencefalica. Il recesso superiore o ventricolo comune è molto ampio, ha una forma del tutto diversa da quella che presenta negli altri urodeli e comunica col III° ventricolo mediante uno stret-

tissimo canale, in seguito al comportamento della lamina infraneuroporica dianzi descritto

I gangli abenulari e la parafisi quali formazioni del tetto encefalico sono molto più sviluppati che non in altri Anfibi. Al contrario, il sacco dorsale (parte prossimale dell'organo pineale) è allo stato rudimentale.

I nuclei laterali ipotalamici, posti ai lati della porzione rostrale del recesso infundibolare, sono senza confronto più sviluppati nel Proteo che non in altri Anfibi (Salamandra, Triton, Bufo, Rana) presi in esame.

Anche i corpi mammillari, situati nella regione ipotalamica, sono molto più manifesti che non negli ora menzionati Anfibi.

È accertata nel Proteo la continuità del nervo ottico tra l'occhio e il pavimento del diencefalo, e ciò contrariamente alle asserzioni di Edinger e Hirsch-Tabor.

Durante il suo percorso extracraniale, l'esile nervo ottico del Proteo penetra e corre per un breve tratto nell'interno del ramo oftalmico del trigemino. Ciò vale a spiegarci la concezione che su tale nervo ebbe il Delle Chiaie, ritenendolo un ramo della branca oftalmica del trigemino.

Alla base del cervello le fibre ottiche formano un tenue chiasma intracerebrale.

Il mesencefalo è relativamente poco sviluppato, e la sostanza grigia del tetto ottico mostra soltanto accenni a quella stratificazione che è propria del tetto ottico degli altri Anfibi.

In causa del mancato sviluppo del tetto ottico, la parte dorsale del mesencefalo, contrariamente a quanto si riscontra negli altri Anfibi epigei, è più stretta che non la ventrale

Il nucleo magnocellulare del tetto è straordinariamente sviluppato e visibile anche all'esterno nel cervello isolato e fissato in liquido di Müller e formalina, sotto l'aspetto di due striscie biancastre, che, partendo subito dietro la commessura posteriore, decorrono ai lati della linea mediana dorsale e si riflettono poi lateralmente, seguendo il margine caudale del mesencefalo.

Contrariamente alle asserzioni di Edinger, esiste un cervelletto, rudimentale nella sua porzione dorsale, bene sviluppato, e forse più che in altri Urodeli, nelle porzioni laterali e ventrali. Queste parti sono addossate al margine caudale laterale del mesencefalo e contengono numerose cellule che si mettono in relazione, mediante le loro fibre, tanto col midollo allungato, quanto con porzioni più rostrali del cervello.

Le fibre delle cellule ora menzionate, che si dirigono dorsalmente, si accompagnano a delle altre che vengono dal midollo allungato, e insieme con queste vanno a formare la commessura cerebellare (intertrigemina di Edinger).

La porzione dorsale libera del cervelletto di Proteo rassomiglia in tutto alla formazione omologa in larva di Salamandra; la porzione laterale e

basale rassomiglia straordinariamente all'abbozzo di cervelletto in embrioni di Teleosteo.

I nervi cranici V, VII e X sono tutti oltremodo sviluppati. Nella regione del vago le pareti del midollo allungato mostrano un ispessimento ancora più manifesto che non nelle altre regioni. Viene così a formarsi un piccolo « lobo del vago ». I gangli del V e VII sono separati.

Le radici più caudali del complesso del vago si riuniscono in un tronco con decorso ascendente, che, a differenza di quanto si verifica in altri Anfibi, non si unisce al tronco principale del vago, ma rimane autonomo; ricorda esso con questo suo comportamento l'accessorio spinale degli Amnioti.

La vascolarizzazione dell'encefalo in generale è abbondantissima. I capillari sono molto grossi, ciò che non deve però meravigliarci, sapendo che gli eritrociti del Proteo sono tra i più grandi di tutti i vertebrati.

Biologia. — *Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi* [1]. Nota II del dott. Umberto D'Ancona, presentata dal Socio B. Grassi.

Nella Nota precedente [2] ho descritto gli strati limitanti esternamente lo ialoscheletro dei Murenoidi.

Tutti questi strati si seguono, nel modo già visto, tra la muscolatura e lo ialoscheletro; ventralmente e dorsalmente invece, dove nelle forme giovani lo ialoscheletro non è ricoperto da muscolatura, si continuano soltanto i due endotelii. Nelle forme più progredite, in cui la muscolatura circonda tutto il corpo, dorsalmente e ventralmente i tubuli seguono la muscolatura, gli endotelii lo ialoscheletro che così è tutto circondato dagli stessi. Lo strato gelatinoso si continua nel connettivo cutaneo.

Le formazioni descritte si osservano tanto nelle larve quanto nelle semilarve. Già in prelarve appena sgusciate si rileva sicuramente la presenza almeno dello strato dei tubuli e degli endotelii.

Nelle semilarve, man mano che si ha l'accorciamento del corpo e la sua riduzione in senso dorso ventrale [3], si notano delle modificazioni negli strati. I tubuli si assottigliano [4], e, naturalmente unitamente ai miomeri,

(1) Dall'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Rendiconti R. Accad. Lincei, ser. 5ª, vol. XXX, 2° sem., pag. 385 (1921).

(3) Vedi Grassi, *Metamorfosi dei Murenoidi*. R. Comitato talassogr. ital, 1913.

(4) Per es. in una *prima semilarva* (nomenclatura secondo Grassi) di *C mystax*, lunga 130 mm., ho trovato un diametro medio dei tubuli di 9.9 μ; in una *seconda semilarva* di 117 mm. un diametro di 7,7 μ; in una *terza semilarva* di 100 mm. un diametro di 5,2 μ; in una *quarta semilarva* di 95 mm. un diametro di 3,4 μ.

si accorciano; gli strati di fibre e l'endotelio allungato diventano più fitti. Nella *C. mystax* tutte queste modificazioni sono meglio evidenti nelle *quarte semilarve*, che sono quelle più ridotte in lunghezza ed altezza.

In stadî più avanzati, contemporaneamente alla riduzione dello ialoscheletro, si ha la scomparsa degli strati limitanti. Forse i tubuli sono i primi a scomparire, mentre gli endotelii permangono fino a quando c'è traccia di ialoscheletro. Nei Murenoidi in abito definitivo non vi è più traccia di tutte queste formazioni, ma tra la muscolatura e lo scheletro assile c'è soltanto un sottile strato connettivale

Passando a considerare il significato funzionale delle formazioni descritte, è evidente che esso deve essere messo in rapporto colla locomozione.

I tubuli, a diretto contatto colle fibre muscolari, devono esercitare durante la contrazione di queste una funzione antagonista tendendo, appena cessata quella, a riportare in estensione il miomero accorciato.

I due strati di fibre connettivali colla disposizione di queste in senso dorso-ventrale tengono unite le fibre muscolari durante la contrazione (1); d'altro canto col loro incrociarsi obliquamente permettono ai singoli miomeri di allungarsi e di accorciarsi; in terzo luogo i due strati offrono una resistenza (2) alla pressione interna che, come osserva il Sella (3), si sviluppa durante il moto.

La funzione della lacuna tra i due strati endoteliali è probabilmente quella di permettere una certa scorrevolezza della muscolatura sullo ialoscheletro, che, secondo il Sella (4), deve essere rigido e poco comprimibile.

Alla fine della metamorfosi invece, per i movimenti più attivi dell'animale, si rende necessaria una muscolatura più energica, che per conseguenza ha bisogno di un appoggio più resistente e questo viene allora fornito dalla colonna vertebrale, su cui i miocommi si inseriscono saldamente. In tali condizioni devono scomparire sia lo ialoscheletro sia gli strati limitanti.

Concludendo si può dire che negli stadî larvali, correlativamente al minor sviluppo della musculatura, ha gran parte nel movimento l'elasticità della corda, dell'ialoscheletro e dello strato tubulare, formazioni che tendono a riportare nell'estensione primitiva le parti contratte. Nelle forme in abito definitivo invece il movimento cessa di essere in gran parte passivo per diventare quasi completamente attivo, in relazione col maggiore sviluppo della muscolatura.

(1) Cfr. Biedermann, *Physiologie der Stütz- und Skelettsubstanzen*, in Handb. d. vergl. Physiologie herausg. v. H. Winterstein, III Bd., I. Hälfte, 1914, pag. 939.

(2) Cfr. Biedermann, loc. cit.

(3) Sella, loc. cit., pag. 73.

(4) Sella, loc. cit.

Biologia. — *Nuove ricerche sperimentali sullo sviluppo e sulla metamorfosi degli Anfibi Anuri. (Sui problemi inerenti agli innesti tra larve a litio e larve normali di Bufo vulgaris).* Nota del dott. Giulio Cotronei (1), presentata dal Socio B. Grassi.

Riassumo un mio lavoro che va in stampa nell'« Archivio Zoologico ».

Le presenti ricerche hanno avuto per scopo essenziale di fare risaltare con nuovi procedimenti di esperienze combinate la natura delle correlazioni nello sviluppo e nella metamorfosi degli Anfibi Anuri.

Trattando le uova in isviluppo di *Bufo vulgaris* con una soluzione di cloruro di litio si osserva un'azione paralizzante: lo sviluppo viene rallentato; alcuni organi risentono maggiormente quest'azione che si può tradurre in malformazioni molto intense nella regione cefalica precordale.

Trattando, poi, le larve a litio che hanno potuto proseguire nel loro sviluppo, ma che non presentano malformazioni tanto intense da impedirne l'azione, con succo tiroideo messo in soluzione nell'acqua ambiente, ho potuto osservare che le larve a litio, cui ora ci riferiamo, vanno in metamorfosi in ritardo rispetto alle larve normali della medesima età e che hanno anche esse subíto l'azione del succo tiroideo.

Ho tratto partito da questi risultati per procedere, mediante esperienze d'innesti, allo studio di alcuni problemi.

Ho pensato di unire ventralmente mediante innesti « alla Born » larve a litio e larve normali di *Bufo vulgaris* (4-5 mm.). Ho unito tra loro anche larve normali.

I problemi che mi sono proposto sulla base concreta dei miei esperimenti si possono riassumere nei seguenti:

Come si comporta lo sviluppo di una larva a litio quando vien messa in unione permanente con una larva normale?

C'è uno scambio di sostanze che mette all'unisono, per dir così, lo sviluppo delle due larve?

Quando s'inizia questo eventuale scambio di sostanze?

Qual'è il comportamento che presentano le due larve nella metamorfosi?

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

La riuscita completa dell'esperienza più difficile da me tentata presupponeva la riuscita successiva e associata di tre differenti esperienze. Gravissime sono state pertanto le difficoltà tecniche incontrate e il lettore non si stupisca nel sapere che soltanto per una coppia litio-normale sono riuscito a raggiungere la fase di metamorfosi, con il trattamento con endotiroidina (dell'Istituto sieroterapico milanese).

La larva a litio appartenente a questa coppia presentava malformazioni nella regione preoculare per la cui descrizione rimando al lavoro in esteso; essa non era però delle più malformate, e in accordo con mie precedenti esperienze ritengo che anche senza essere unita con una larva normale avrebbe raggiunto il medesimo stadio di metamorfosi. Lo studio della coppia suddetta mi è stata più profittevole per i seguenti risultati.

Ho veduto che durante tutto il periodo di sviluppo che è andato dall'operazione d'innesto fino a un periodo che io presumo corrisponda al termine dell'assorbimento vitellino, le due larve si sono sviluppate seguendo ognuna le proprie caratteristiche individuali: la velocità di sviluppo è stata maggiore nella larva normale che nella larva a litio. Al termine di detto periodo si nota che le dimensioni delle due larve sono notevolmente differenti: la larva normale si presenta più grande. Ho iniziato in siffatte condizioni il trattamento con endotiroidina (5 gocce per ogni 100 cc. di acqua ambiente). Da principio all'osservazione macroscopica noto ancora il maggiore sviluppo dell'arto posteriore nella larva normale rispetto alla larva a litio, ma osservo in proposito che questo fatto bisogna considerarlo in riflesso alle differenti condizioni iniziali. In seguito le due larve mostrano *tendenza*, a mettersi all'unisono di sviluppo: questo fatto si rivela nei processi della metamorfosi L'esame istologico eseguito sul materiale fissato alcuni giorni dopo che s'erano iniziati i primi sintomi della metamorfosi mi ha dimostrato che le due larve si presentavano in una medesima fase negli organi che risentono i processi disintegrativi della metamorfosi (tubo intestinale, coda). Anche negli altri organi tranne l'arto posteriore (non si tien conto delle malformazioni) non riesco a notare differenza di condizione nelle due larve.

L'arto posteriore, invece, si presenta nella larva normale più avanti nei processi differenziativi, che nella larva a litio.

L'arto anteriore non si è prestato per far risaltare un differente grado differenziativo Soltanto osservo che la larva a litio presenta l'arto anteriore sinistro fuoruscito, mentre nella larva normale nessuno dei due arti (anteriori) è fuoruscito. Questo fatto è interpretato nel lavoro in esteso e non ha importanza nel caso in esame per significare uno studio più avanzato di metamorfosi.

Osservo inoltre che l'esame istologico mi ha dimostrato che l'unione intima delle due larve era avvenuta con una comunicazione intestinale. (Ansa intestinale comune nella regione di saldatura).

Dalle mie esperienze traggo le seguenti conclusioni:

Da principio, dall'operazione d'innesto fino presumibilmente al termine dell'assorbimento vitellino, non c'è scambio di sostanze tra l'una larva e l'altra che possa influire sul reciproco sviluppo. Ultimatosi il differenziamento istologico e formatesi le vie di comunicazione si stabilisce tra le due larve uno scambio di sostanze sì da culminare nel chimismo della metamorfosi, che si rivela nei processi disintegrativi in una stessa maniera nelle due larve. L'arto posteriore, invece, rivela ancora la differente condizione dello sviluppo embrionale.

Una deduzione delle precedenti conclusioni è che nello sviluppo embrionale fino al differenziamento istologico non esistono correlazioni umorali o nervose che regolano a distanza lo sviluppo. Durante lo sviluppo suddetto non esistono che correlazioni meccaniche (spaziali e di sostegno) e, da precisare, correlazioni chimiche di vicinanza.

Con altre esperienze su parti di *Bufo vulgaris* isolate con tagli trasversali ho veduto l'impossibilità per esse di raggiungere mercè un trattamento tiroideo la fase di metamorfosi. Queste ultime esperienze possono convalidare il concetto che per raggiungere la metamorfosi è necessaria, almeno fino ad un certo punto, l'integrità funzionale dell'organismo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Negri G. *Le colonie vegetali xerotermiche della valle di Susa e l'ipotesi « lacustre » del professore L. Buscalioni.* Pres. dal Socio Mattirolo.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

4 dicembre 1921

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Paleontologia.. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale* [1]. Nota I. del Socio Carlo De Stefani [2].

Conclusioni.

I.

Non mi pare possibile determinare con qualche precisione i raggruppamenti delle singole specie di *Dictyoninae* trovate nelle differenti località.

Via via che ho descritto i residui fossili, ho cercato paragonarli ad altre specie conosciute; ma ciò feci alla ricerca d'un punto di ritrovo, non coll'idea di fare più o meno precise determinazioni.

1°) La specie a larghe maglie, apparentemente senza *Epi* ed *Apo-rhize*, con piccole *ostia* puntiformi, con spicule aculeate del Trias inferiore della cava Negrotto ad Arenzano, distinta da ogni altra, può ritenersi un passaggio fra le *Lyssacinae*, note dai tempi Paleozoici fino ai mari odierni, e le *Dictyoninae* note finora solo dal Trias in poi. Nel 1920 è comparsa una pubblicazione di C. D. Walcott (*Middle Cambrian Spongiae* — Smithsonian miscellaneous collections, vol. 67, n. 6, Washington) che attribuisce alle *Dictyoninae* la nuova famiglia *Vauxininae* con l'unico genere *Vauxia* nel Cambriano medio della Columbia inglese, caratterizzato dalla coalescenza reciproca dei singoli raggi dell'intreccio; ma questi sono tre situati in un

(1) Questi Rendiconti, vol. XXIX, 2° sem., fasc. 1°, an. 1920, pag. 16 e seguenti.
(2) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1921.

piano ed un quarto che vi penetra ad angolo retto, perciò ben differenti dalle *Dictyoninae* più recenti.

2°) L'altra specie della cava Negrotto è una vera *Dictyonina* come tutte le altre degli strati successivi prese in esame. Essendo provvista, forse, di *Lychnische*, rientrerebbe nella Tribù delle *Lychniscosa* che principiando nel Mesozoico, abbondantissime nella Creta, sono quasi scomparse oggi. Come specie a sè è forse distinta perchè sprovvista di Aporhize ed Epirhize. con *ostia* cinte da intreccio circolare e radiale.

3°) Poche tracce ho notato nel Trias medio e superiore e sarebbero tutte della Tribù *Hexasterosa* e forse della Subtribù *Uncinataria* quella della parte superiore del Trias di Spotorno.

La specie del Calcare di Isoverde, forse una *Lychniscosa*, va distinta per la forma delle sue aperture maggiori, siano canali acquiferi ovvero cavità dei Paragaster come nei *Polyblastidium* della Creta.

4°) La specie del calcare e della quarzite di San Martino, attribuita all'Infralias e per lo meno al Mesozoico superiore, ritenni distinta, perchè è una *Lychniscosa* con frequenti espansioni ai punti d'incrocio, a maglie abbastanza regolari, fornite di ottusi aculei, e caratterizzata da Aporhize sporgenti a forma di tubo, a quinconce con le Epirhize.

Le altre specie della zona dei terreni cristallini circostanti e sovrastanti si distinguono, sebbene con varia incertezza, in due gruppi, le *Hexasterosa* (Crocetta, Casa Bisognaschi, bivio sotto Casa Doria, verso il Rio Gea, tutte località prossime alla Crocetta e probabilmente Valle dell'Iso) e *Lychniscosa* quasi sempre con placche a forellini circolari (Crocetta, Palazzo Doria, Campo Ligure, Cairo, Biscazza, Casa Buzzano, Costa di S. Alberto, Caffarella, Stazione di Voltri, Mele). Sarebbe incerto a quale dei due tipi attribuire i resti del Cantarena e del Mulino di San Giovanni.

5°) La presenza di intreccio spirale intorno alle Aporhize delle *Lychniscosa* nello schisto della Biscazza e di Casa Buzzano potrebbe essere un carattere atto a ravvicinare i relativi Spongiari a quello di Mele: l'intreccio loro, abbastanza regolare, è senza aculei: alla Biscazza vi sono placchette forate.

6°) Nella *Lychniscosa* di S. Alberto e del Mulino di San Giovanni, intorno ai canali circolari meglio conservati, probabilmente Aporhize, è un intreccio hexactinico periferico, radiale, con *ostia* puntiformi di minutissimi canali che penetrano nell'interno. Probabilmente ciò dipende solo dal migliore stato di conservazione, e non costituisce una specifica differenza dalle altre *Lychniscosa*.

7°) Mancano criterî assoluti per giudicare la spartizione delle *Lychniscosa* di Campo Ligure, della Caffarella, Palazzo Doria, Crocetta, Stazione di Voltri, Cairo; loro carattere comune è di avere il reticolo allineato regolarmente a ventaglio in tutti i sensi longitudinale radiale, con maglie alquanto

irregolari, spicule, talora con rari e brevi aculei. Aporhize circolari con intreccio radiale, Epirhize puntiformi con intreccio circostante quasi sempre, per effetto di compressioni, conformato a losanga, caratteri comuni, questi ultimi, con le *Hexasterophora*.

8°) Le *Hexasterophora* della zona cristallina hanno comune allineamento radiale regolare e maglie pure abbastanza regolari specialmente intorno ai canali acquiferi, apparentemente senza aculei, ed inoltre, come la massima parte delle *Lychniscosa*, Aporhize circolari, grandi, con intorno intreccio radiale, talora internamente ramificato, ed Epirhize puntiformi o per lo meno assai piccole, con intorno un intreccio di 6 o 7 giri a losanga.

9°) Dalle *Hexasterosa* del bivio sotto Casa Doria, della Crocetta, di Casa Bisognaschi, si staccano forse quelle della Valle dell' Iso e quelle verso il Rio Gea che intorno alle Aporhize circolari mostrano un intreccio radiato a stella con 6 o 7 raggi o più.

Già dissi come sia difficile e talora impossibile verificare l'esistenza di parenchimali, anche per la presenza dei microscopici componenti minerali: nondimeno la esistenza di *Uncini* in certi casi mi parve probabile, ed un poco meno quella di *Clavulae* e di altro. Sarebbero perciò incertamente *Uncinatariae* le *Hexasterophora* di Casa Bisognaschi e quelle di verso Rio Gea, del Bivio sotto Casa Doria, della Crocetta e di Valle dell' Iso; come le *Lychniscosa* di Campo Ligure, della Caffarella, della Costa di S. Alberto e di Palazzo Doria.

Il non aver trovato parenchimali nelle forme degli altri luoghi non vuol dire che non vi esistano.

Debbo soggiungere che parenchimali di *Lychniscosa* fossili finora non si conoscono; che secondo Schrammen, propugnatore della Tribù *Lychn.*, queste ripetono forme rispondenti alle *Hexasterosa* e che alcuni autori anche recentissimi non ammettono la separazione di quella Tribù.

È possibile dunque che fra le *Uncinatariae* si trovino tanto *Hexast.* quanto *Lychn.* Le *Dictyoninae* che non presentano *Uncini* possono appartenere alla Subtribù *Inermia* o rimanere fra i numerosissimi tipi *incertae sedis*.

Fra gli altri Spongiarî diversi, dei quali rimasero scarsi ed eventuali residui, notammo *Hexasterophora Lyssacina* nella zona cristallina della Crocetta ed incertamente di Casa Bisognaschi e nella valle dell' Iso e nel Trias superiore di Voltaggio e di Spotarno; *Monaxonia* nella zona cristallina di Casa Buzzano, del Mulino di San Giovanni, di Palazzo Doria, della Crocetta; *Tetracladinidae* nella zona cristallina della Biscazza, della Crocetta, della Stazione di Voltri, della valle dell'Iso e nel supposto Infralias di S. Martino; *Rhizomorinae* nella zona cristallina della Biscazza, di Campo Ligure, di Palazzo Doria, della Crocetta e di verso il Rio Gea, non che nel Trias inferiore della Cava Negrotto e nella quarzite di S. Martino; *Megarhizidae*

a Palazzo Doria e alla Crocetta; *Megamorinae* nella zona cristallina della valle dell'Iso e nell'Infralias di S. Martino; *Helomorinae* fra S. Martino e la Caffarella.

Non mancano nella compagine Hexactinica organismi calcarei prescindendo dai calcari Triassici; cioè, nella zona cristallina, tracce di *Orbulinae* o *Globigerinae* a Campo Ligure, *Orbulinae* e *Biloculinae* (?) nella valle dell'Iso, Miliolidi (*Quinqueloculinae*) di perfetta conservazione alla Biscazza ed un piccolo frammento di *Nummulites* al Mulino di San Giovanni.

Il partito che si può trarre da tutti questi fossili non è molto grande; ma è sufficiente per dare qualche risultato. Le *Hexasterophora*, *Rhizomorina* e le *Lyssacina* durano dal Paleozoico in poi; ma le *Dictyonina* qui enumerate non si trovarono finora nel Paleozoico; a partire dal Trias, durano fino all'attualità. Perciò le Quarziti, Anageniti ecc., sottostanti ai calcari triassici di Arenzano, e conseguentemente delle altre località, secondo le condizioni odierne non possono appartenere al periodo Carbonifero, cui per varie induzioni le ho talora attribuite, ma debbono conservarsi nel Trias inferiore, seguendo l'opinione dell'Issel e di varî altri. Parimente la zona cristallina fra Genova e Savona, tanto fornita di *Dictyonina*, non può essere attribuita al Paleozoico e specificamente al Permiano, come di recente si era fatto.

Contribuiscono a questa conclusione le *Megarhizidae* del Giura e della Creta non viventi, le *Tetracladinidae* fossili dalla Creta in poi, le *Helomorinae* note per ora solo nella Creta. Non si deve dedurre senz'altro, dalle suddette tribù di Spongiari, che si tratti di terreni Cretacei: è possibile e direi certo che si trovino fra le Spugne ancora assai meno note nel Giura e fra quelle, quasi generalmente ignote, dell'Eocene.

Rovereto e Parona hanno scoperto e descritto nella predetta zona, nella regione di Montenotte superiore, non lungi dalla Crocetta, delle Radiolarie che attribuirono prima al Permiano, poi al Giura, concludendo pur essi con la esclusione del Permiano. Feci conoscere altrove che le Radiolarie dei diaspri giuresi d'Italia non furono ancora convenientemente studiate; che le Radiolarie così dette Titoniche nei diaspri dell'Emilia illustrate da Vinassa e Neviani appartengono invece sicuramente all'Eocene superiore, che non pure dal Rüst, ma dagli stessi italiani non fu sufficientemente tenuto conto del lavoro, fondamentale per le basi che stabilì, del Pantanelli comprendente anche le Radiolarie dei Diaspri dell'Eocene superiore. Queste cose ripeto per mostrare che le conclusioni del Parona e del Rovereto sono suscettibili di revisione.

Gli Schisti argillosi, contenenti già parecchi elementi microcristallini, e le altre rocce che stanno ad Oriente della piega triassica estesa da Voltaggio al Gazo nei bacini della Scrivia e della Polcevera, sono già attribuiti dalla gran maggioranza dei geologi all'Eocene e da me all'Eocene superiore. Nè prima, nè poi ho fatto ricerche di fossili nella parte centrale dei medesimi;

bensì ne feci alla base presso il contatto col Trias ed ho indicato le tracce di Spongiari della Caffarella, della Biscazza, di Casa Buzzano, della valle dell'Iso, del Mulino di S. Giovanni e di altri luoghi sul Cantarena. Quest'ultimo luogo trovasi a Sud della piega calcarea e fa passaggio alla serie cristallina del litorale occidentale. Nella compagine *hexactinica* trovai, come dissi, un piccolo frammento di *Nummulites*. Ora, prescindendo dalle parvenze generali degli Spongiari che sono identiche nella regione orientale poco cristallina ed in quella occidentale che lo è di più, certo è che pure in minute particolarità vi è rispondenza talora perfetta fra i ritrovamenti p. es. del Cantarena e della Costa di S. Alberto, della Caffarella e di Campo Ligure, Palazzo Doria Crocetta, Stazione di Voltri, Cairo, della valle dell'Iso e del Rio Gea ecc. Devesi dunque concludere che i terreni delle due regioni orientale ed occidentale, come sono in continuazione fra loro ed in eguali circostanze stratigrafiche, così trovansi nelle stesse condizioni paleontologiche ed appartengono all'Eocene; anzi all'Eocene superiore.

Il mare nel quale viveano gli Spongiari doveva essere profondissimo fino a varie migliaia di metri; nè ciò contrasta col ritrovamento delle Radiolarie descritte dal Parona. Da molti anni ho sostenuto che l'Eocene superiore dell'Appennino settentrionale si è depositato a grande profondità. Nei Galestri e negli Schisti argillosi della regione ad Est di Genova non risulta siano Spongiari; bensì ne sono nei calcari e nella quarzite o *pietraforte* che li accompagna. Forse la regione Eocenica della Liguria occidentale si formò a profondità maggiore.

Può darsi che la grande profondità, oltre al contatto con le attivissime eruzioni peridotiche e pirosseniche, abbia contribuito al maggiore metamorfismo di quelle rocce rispetto alle altre dell'Appennino. Due fatti meritano di essere almeno incidentalmente notati; cioè: 1°) la frequenza fra le dette rocce metamorfiche di minerali sodiferi come l'Albite ed il Glaucofane, la qual cosa potrebbe mettersi in rapporto con la permeazione delle acque sodifere del profondo Oceano; 2°) la facile trasformazione della Silice colloide d'origine organica in Quarzo.

Non v'è dubbio che nella regione descritta una parte del Quarzo dei Sericitoschisti, e perfino parecchi noduli lentiformi, sono di origine organica.

Fino a 40 anni sono il Diaspro era ritenuto d'origine filoniana prettamente minerale; io ed il Pantanelli nel 1879 e nel 1880 ne constatammo l'origine sedimentare, organica, da Radiolarie, e niuno più la contesta.

Così deve essere di molta parte del Quarzo derivato, come è noto da parecchio tempo, da Silice di Spongiari: nè ciò esclude che Quarzo sia formato per secrezioni magmatiche e filoniane o sia derivato da agglomerazioni sabbiose di origine meccanica. Nelle grandi profondità dei mari quest'ultima origine sarebbe inverosimile. In conclusione ogni giorno più si dimostrano la grande importanza del mondo organico nella formazione delle rocce terrestri.

e la necessità che lo studio litologico, per essere completo e per arrivare a conclusioni generali positive, non sia disgiunto dallo studio micropaleontologico.

Delicatissime *Silico-spongiae* viventi sono raccolte frequentemente, sebbene con difficoltà, nella profondità dei mari. Non vi è quasi saggio di fondo fuori del fango a *Globigerinae* e di qualche altra zona, che non mostri residui di *Hexactinellidae*. Nel caso nostro ed in tanti altri simili si vede a dirittura, per grandi altezze ed estensioni, il fondo degli antichi mari. Io non mi occuperò più altramente di Spongiari, ma sono sicuro che se ne troveranno per entro agli schisti cristallini delle Alpi Marittime e più oltre, e che, studiati da persone più competenti, serviranno a determinare le età geologiche.

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota IV del Corrisp. Quirino Majorana.

Attenuazione delle scosse meccaniche sulla bilancia. — Ricordo che uno degli inconvenienti più gravi della vecchia disposizione, risiedeva nelle perturbazioni esercitate dalle scosse meccaniche (vol. XXIX di questi Rendiconti, p. 26 e 27). Se allora potei eliminare tali inconvenienti, sperimentando di notte o nei giorni di sciopero, in questa seconda serie non sarei probabilmente riuscito a vincere tutte le difficoltà sperimentali di cui sarà detto, se avessi solo fatto altrettanto. Anzitutto, per ragioni di topografia locale, dovetti piazzare la bilancia in una sala del Politecnico di Torino prospiciente in via S. Francesco di Paola, per la quale frequentemente transitano pesanti carri e che è tagliata da linee tramviarie. In conseguenza di ciò, e forse anche per la presenza dell'appendice L (fig. 2, nota III) lunga 4 metri, le scosse meccaniche alla bilancia erano assai più violente che non nella prima serie di esperienze. Montata in principio la bilancia, appoggiandola direttamente sul piano di marmo TT (fig. 3), al passaggio di un carro, l'indice luminoso sulla scala a 20 metri dal giogo, spariva completamente in conseguenza di amplissimi traballamenti. Risolsi allora di attutire tali scosse, mediante la sospensione elastica indicata nella figura. Il piano in legno di base, LL, della bilancia è sostenuto da quattro robuste molle di acciajo temprato (diametro del filo mm. 2,5; della molla cm. 2; numero delle spire 40); di esse, le due anteriori MM si vedono nella figura. Tali molle, sotto il peso della bilancia, si allungano di circa $^1/_6$, e si possono correggere le loro deformazioni progressive, che inevitabilmente si manifestano nei primi giorni della loro messa in opera, mediante le teste a vite VV.

Il beneficio che con tale disposizione si ottiene è enorme. Constatai infatti, con sorpresa, che anche il passaggio dei più pesanti carri non perturbava il libero oscillare della bilancia, restando l'indice luminoso a 20 metri,

sempre nitido e risultando ben concordanti le diverse osservazioni. Non voglio però dire che, in conseguenza di tale constatazione, sarebbe stato completamente inutile sperimentare in periodi di assoluta tranquillità meccanica della vita cittadina; chè anzi, sarebbe stato più vantaggioso sperimentare sempre così. Ma il vantaggio sarebbe dipeso dalla riduzione di altra causa perturbatrice: la irregolare influenza delle scosse meccaniche sull'isteresi elastica dell'edificio; su ciò ritornerò in seguito.

Connessione elastica con la pompa. — L'equipaggio mobile della bilancia, insieme con i suoi accessorii, trovasi in un ambiente privo di aria, per le ragioni già spiegate nelle prime ricerche. È vero che nella nuova disposizione, gli errori relativi derivanti dalle eventuali perturbazioni termometriche sono necessariamente più piccoli; infatti, da un canto essendo la massa schermante superiore, la riduzione di peso da constatare deve essere maggiore; e, dall'altro, i due prismi di piombo non possono subire variazioni termometriche notevoli in conseguenza del loro movimento, a differenza del mercurio che, nelle vecchie esperienze, era costretto a fluire dentro ristretti tubi. Ma, comunque, la soppressione dell'aria intorno al giogo è anche ora cosa utile. Per cui, come si vede nella fig. 3, è stata ancora usata la custodia di ottone, già altra volta descritta; e da essa viene estratta l'aria mediante la pompa Gaede. La connessione con questa è fatta con un tubo di vetro lungo m. 3.50 e di 1 cm. di diametro, piegato a spirale, non segnato in figura. Con ciò, pur essendo la pompa montata su di un tavolo rigido separato, la elasticità dell'attacco della pompa non è compromessa, potendo quella spirale molleggiare liberamente.

Comando del giogo. — Il sollevamento o l'abbassamento del giogo è ottenuto ancora mediante la chiave G; questa è a tenuta d'aria, grazie all'uso di un premistoppa con mercurio, già altra volta descritto.

Contrappeso e tara. — La sfera di piombo (che chiamerò semplicemente *la sfera*) che subisce l'azione schermante dei piombi, indicata in M nella fig. 2, e non segnata nella fig. 3, è equilibrata dal *contrappeso* C (fig. 3), costituito da una seconda sfera esattamente identica, già altra volta adoperata. Ma nell'attuale dispositivo ho introdotto l'uso di una *tara* KK costituita da due prismi di piombo, nel loro complesso pesanti come la sfera od il contrappeso. La tara è rinchiusa in una scatola prismatica di ottone NNN, che fa corpo con la custodia della bilancia, e nella quale si fa naturalmente anche il vuoto. Essa può essere agganciata a volontà al braccio destro del giogo, in sostituzione della sfera; tale scambio è possibile mediante un congegno di agganciamento che si può comprendere esaminando la fig. 3; le due chiavi a tenuta di vuoto (con premistoppa e mercurio), B_1 e B_2, servono a tale scopo. Si vede che, data la posizione indicata nel disegno, apparisce *sganciata* dal giogo la sfera, ed *agganciata* la tara. Ruotando di 90° le due chiavi, si possono scambiare questi due pesi. È inutile dire che tale scambio deve esser fatto a *giogo alzato*.

La ragione dell'uso della tara è intuitiva. Poichè inevitabilmente il moto dei piombi nel sotterraneo occasiona perturbazioni sulla posizione di riposo della bilancia, indipendenti dell'effetto che si studia, è bene fare delle *letture in bianco*, vale a dire quando le due braccia della bilancia sono cariche di masse, i cui pesi non subiscono azione schermante della gravità, o, se mai, la subiscono in egual modo. Questo è precisamente il caso del *contrappeso* e della *tara*.

Equilibratori a sabbia. — Le tre masse (sfera, contrappeso, tara) dovrebbero avere costruttivamente lo stesso valore, a meno di qualche centesimo di milligrammo, se si volesse che, procedendo ad osservazioni con *sfera-contrappeso* oppure con *tara-contrappeso*, l'indice luminoso della bilancia, di cui sarà detto appresso, non si scosti troppo da una certa posizione media di equilibrio. Ma ciò corrisponderebbe ad un caso irrealizzabile in pratica. Effettivamente, anche ammettendo che quella triplice equaglianza fosse verificata, avviene che, oltre a non essere le braccia della bilancia mai esattamente eguali, il rapporto fra queste varia continuamente per le cause più lievi. Basta per ciò, p. es., scaricare e ricaricare il giogo (colla manovra della chiave H); o procedere allo scambio della sfera con la tara (o viceversa); od anche lasciar intervenire lievi ma irregolari variazioni termometriche; o lente progressive e spontanee deformazioni del giogo e dei coltelli. Oltre a ciò, ha notevole influenza sul valore dei carichi effettivi delle due braccia, il grado di rarefazione dell'aria. Infatti, lo stato superficiale del giogo e dei suoi due carichi è variabile con quello, e, non essendo tali carichi geometricamente simmetrici, possono subire variazioni ineguali di peso.

Da tutto ciò deriva che occorre ogni volta, dopo abbassato il giogo, e talvolta ogni 4 o 5 ore, procedere alla esatta livellazione di questo, riconducendo così l'indice luminoso intorno alla detta posizione media. Nelle vecchie esperienze procedevo a ciò senza rialzare il giogo, mediante l'uso del cavalierino C (ved. fig. 4, vol. XXVIII, p. 485, loc. cit.). Ma allora ciò era possibile grazie alla rigidità del sostegno della bilancia, non affidata alle molle come ora si è detto. Nell'attuale dispositivo non si può toccare, sia pure con ogni delicatezza, la custodia molleggiante senza sregolare, o danneggiare nei coltelli, il giogo. Occorreva dunque altro artificio: questo è costituito dagli equilibratori E_1 ed E_2 indicati nella fig. 3. Un recipiente cilindrico di vetro E_1, rastremato in alto, è chiuso in basso da un disco di ottone sostenuto da un tubicino di ottone t di 2 mm. di diametro interno. Questo tubicino è masticiato in una diramazione convenientemente inclinata, partente dalla parte in vetro della custodia del contrappeso; il tubicino di ottone affiora sulla faccia superiore del detto disco, che è cosparsa di sabbia o granuli di marmo. Dalla rastremazione superiore di E_1 pende un filo metallico di circa 0,2 mm. di diametro, che sostiene un cilindretto P_1 di ferro, il quale viene ad ap-

poggiare con la sua punta inferiore sul disco cosparso di sabbia. Si possono ora provocare dei movimenti di P_1 mediante una calamita dall'esterno di E_1, e con ciò far sì che qualche granello venga a cadere dentro il tubicino t, e da questo condotto dentro la tazzetta semisferica F sostenuta dal contrappeso C. Con ciò, a volontà, si può aggiungere a questo qualche centesimo di milligrammo.

A destra, l'equilibratore E_2 costruito in guisa analoga, ha doppia funzione, chè infatti il comando magnetico del relativo cilindretto di ferro P_2 può costringere i granelli di marmo a cadere a volontà in una delle due tazzette portate rispettivamente dalla tara K, o dal filo di sospensione della sfera.

Con questo triplice congegno si può in ogni tempo riequilibrare la bilancia Naturalmente, poco alla volta si finisce per accumulare alquanta sabbia nelle tre tazzette, esaurendosi così la provvista nell'interno dei cilindri E_1 ed E_2; ma ciò non costituisce grave inconveniente, bastando solo ogni 2 o 3 mesi riaprire la bilancia per rimettere la sabbia nelle primitive condizioni.

Cavalierino magnetico. — Dal valore della sensibilità della bilancia (millimetri di deviazione del raggio luminoso per 1 mg. di sovraccarico) dipende la esatta valutazione degli effetti che si osservano. Ora la sensibilità, come ho già detto, non è costante; e ciò in conseguenza di svariate azioni, a cui ho accennato in parte nella nota II. Occorre dunque, nel corso delle misure, determinarne il valore con una certa frequenza (almeno 4 volte al giorno, a giogo permanentemente abbassato). Nelle vecchie esperienze mi servivo, all'uopo, dello stesso cavalierino citato; ma si comprende come neanche ora tale congegno sia utilizzabile; l'ho dunque definitivamente abolito, e sostituito con altro di fattura assai più squisita e delicata. Esso è il *cavalierino magnetico* indicato nella fig. 3, dentro al recipiente in vetro A_1 A_2 A_3. Questo forma corpo, al disopra della scatola N, con la custodia del giogo della bilancia, ed è dunque anch'esso a tenuta d'aria; nel suo tratto cilindrico A_1 si protende assialmente il filo di sospensione connesso col braccio destro della bilancia, e destinato a sostenere a volontà la sfera o la tara. Quel filo porta un gancio al quale si accavalla un piccolissimo cavalierino R di alluminio, rigorosamente tarato, del peso di circa 1 mg. Un cilindretto di ferro P_3, scorrevole dentro il tubo A_3, comanda, come vedesi in figura, un secondo gancio capace di sollevare il cavalierino, quando P_3 è portato verso destra.

Il comando di P_3 è ottenuto magneticamente, mediante una piccola calamita, dallo esterno di A_3. Si può dunque, a volontà, rapidamente e senza scosse, sovraccaricare od alleggerire il braccio destro della bilancia di 1 mg. circa; e l'operazione può, senza pregiudizio per la tranquillità del giogo,

esser ripetuta un numero qualsiasi di volte. Lo spostamento dell'indice luminoso dà ogni volta il valore della cercata sensibilità.

Circa l'uso del cavalierino, occorre fare due avvertenze. La prima si riferisce alla sua taratura, che deve esser fatta accuratamente. Non basta controllare con una bilancia sussidiaria il cavalierino di alluminio con il peso di 1 mg. tolto da una pesiera, per quanto fornita dai migliori costruttori. Infatti di solito, gli ultimi pesetti di questa hanno errore relativo notevole e che può arrivare sino al 5 %. Ho preferito allora servirmi di una microbilancia Nernst, nella guisa seguente: Il carico massimo sopportabile da tale bilancia è di circa 2 mg.; ho costruito perciò cinquecento pesetti (fili di ottone di 2 decimi di $^{m}/_{m}$ di diametro) aventi all'incirca tale valore; ma tali che nel loro insieme pesano con tutta esattezza 1 grammo. Ciò è possibile, servendosi di una bilancia sussidiaria, con approssimazione assai grande. Indi ho notato le deviazioni del giogo della bilancia Nernst per ciascuno dei cinquecento pesetti; esse variano intorno a 20 parti della scala della bilancia stessa (e si apprezza ad occhio il decimo di parte). La somma di tali deviazioni rappresenta la sensibilità della bilancia Nernst per 1 grammo, da cui si ha con tutta esattezza quella per milligrammo. È allora possibile la taratura del cavalierino, con buonissima approssimazione.

La seconda avvertenza si riferisce ad una inevitabile, per quanto piccola, perturbazione magnetica. È ovvio anzitutto che l'adoprare la calamita per muovere il cilindretto P_3 (od anche P_1 e P_2 degli equilibratori) possa provocare spostamenti nella posizione del giogo, in conseguenza della presenza dei coltelli o di altra parte di acciaio. Può anzi avvenire che tali spostamenti siano in parte permanenti, anche dopo avere adoperata la calamita; ciò per il fatto che questa può occasionare variazioni permanenti nel magnetismo proprio di quelle parti, e quindi una diversa azione del campo magnetico terrestre. Oltre a ciò il cilindretto P_3 in ferro può esercitare una qualche azione diretta specialmente sul prossimo coltello di destra; e tale azione sarebbe diversa, a seconda che P_3 sia a destra o a sinistra. Deriverebbe dunque da tutto ciò un'erronea valutazione della sensibilità della bilancia. Ora qui mi limito a dichiarare, per brevità espositiva, che opportuni accertamenti, fatti con artifici che non descrivo, mi hanno convinto della trascurabilità di queste cause di errore. Solo è da tener presente di non servirsi mai di calamite troppo potenti; e sovrattutto di non accostarle mai eccessivamente ai coltelli, dall'esterno della custodia. In caso diverso si possono occasionare spostamenti stabili nella posizione di equilibrio dell'indice luminoso della bilancia, dell'ordine di qualche decimo di mm., tali cioè da indurre in errore notevole nella valutazione del ricercato effetto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota III di D. Montesano, presentata dal Socio R. Marcolongo.

In una corrispondenza birazionale K fra i punti di due spazi S, S', le *linee fondamentali ordinarie* sono le linee basi dei due sistemi omaloidici di superficie Σ, Ξ' collegati alla corrispondenza; i *punti fondamentali ordinari* sono i punti comuni alle curve collegate alla corrispondenza, alle curve cioè basi variabili dei fasci dei sistemi Σ, Ξ' rispettivamente.

Una curva fondamentale è di 1ª o di 2ª *specie* secondochè nello spazio a cui appartiene è o no incontrata fuori del gruppo dei punti fondamentali dalle curve collegate alla corrispondenza.

Ora nella presente Nota io dimostro il teorema che: *In una corrispondenza birazionale* K *fra i punti di due spazi ordinari* S, S', *ad ogni curva fondamentale* o *di 2ª specie dello spasio* S *si associa una curva fondamentale* o' *di 2ª specie dello spazio* S' *in modo che ad ogni linea* r *che si appoggi alla curva* o *in un punto generico* P *corrisponde nella* K *una linea* r' *che si appoggia alla curva* o' *in un punto* P' *omologo del punto* P *nella corrispondenza che la* K *determina fra i punti delle due linee omologhe* r, r'. *Se la curva* o *è di ordine* ν *e la curva* o' *è di ordine* ν', *gli ordini di multiplicità della curva* o *per le superficie del sistema* Σ *e della curva* o' *per le superficie del sistema* Ξ' *si ottengono moltiplicando i numeri* ν', ν *per un medesimo numero intero* k.

Cremona ritenne che il numero k fosse sempre eguale ad 1 (1), mentre tale numero può avere un valore arbitrario (2).

Per dimostrare il teorema enunciato occorrono le seguenti considerazioni:

Le superficie del sistema Σ abbiano in comune una curva o, lungo la quale non si tocchino. Fissati ad arbitrio un punto generico P sulla o ed un piano generico τ nel fascio che ha per asse la tangente t nel punto P alla curva, restano determinati nello spazio S una rete A costituita dalle

(1) Cremona, *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*, nº. 7. *Opere*, tomo 3º, pag. 302.

(2) Cfr. le due prime mie Note *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Rend. di quest'Accademia, vol. XXVII, serie 5ª, 1918) e la Nota: *Principio di estensione nella teoria delle corrispondenze birazionali dello spazio* (Rend. Accademia Scienze Napoli, vol. XXVII, 1921).

superficie del sistema Σ che sono tangenti al piano τ nel punto P, e nello spazio S' un punto L' centro della stella di piani che nella K corrisponde alla rete $\mathcal{A}$.

Col variare del piano τ attorno alla retta t, il punto L' descrive una curva razionale p'. Ora due casi possono darsi:

1° caso. Variando il punto P sulla curva o, la curva p' varia descrivendo una superficie di ordine x'.

In tale caso è agevole riconoscere che ogni curva generica collegata alla corrispondenza nello spazio S si appoggia alla curva o in x' punti non fondamentali e che perciò la o è linea fondamentale di 1ª specie.

2° caso. Variando il punto P sulla curva o, la curva p' coincide in ogni sua posizione con una curva fissa o'.

In tale caso accadrà necessariamente che ad una stella di piani $\mathcal{A}'$ dello spazio S', avente il centro in un punto generico P' della curva o', corrisponderà nel sistema Σ una rete $\mathcal{A}$ formata da superficie che in ogni punto generico P della curva o risulteranno tutte tangenti a k piani $\tau_1, \ldots, \tau_k$ del fascio che ha per asse la tangente t nel punto P alla o; e propriamente accadrà che, tenendo fisso il punto P sulla o e facendo variare il punto P' sulla o', il gruppo di piani $\tau_1, \ldots, \tau_k$ descriverà una involuzione J_P di grado k nel fascio (t), per $k \geq 1$.

Ne segue che un fascio generico Ψ della rete $\mathcal{A}$ differisce da un fascio Φ del sistema Σ, che non presenti alcuna particolarità, soltanto in questo: che, mentre due superficie generiche del fascio Φ non hanno alcun contatto in un punto generico della curva comune o, accade invece per due superficie generiche del fascio Ψ che k falde dell'una superficie toccano rispettivamente k falde dell'altra lungo la o; e però, se la linea base variabile del fascio Φ è di ordine n', la linea base variabile del fascio Ψ risulta di ordine $n' - kv$, se la curva o è di ordine v.

Corrispondentemente, mentre una retta dello spazio S', che non presenti alcuna particolarità, incontra una superficie generica del sistema Ξ' in n' punti, accade invece che nella stella (P'), che ha il centro in un punto generico della curva o', una retta generica incontra l'anzidetta superficie soltanto in $n' - kv$ punti diversi da P'.

Ciò prova che la o' è linea fondamentale della corrispondenza e che l'ordine di multiplicità della curva per le superficie del sistema Ξ' è $\mu' = kv$.

D'altra parte i piani tangenti in un punto generico P della curva o ad una superficie generica del sistema Σ sono tutti e soli i piani dei gruppi della involuzione J_P dovuti alle reti $\mathcal{A}$ del sistema Σ omologhe delle stelle di piani che hanno i centri nei punti di sezione della curva o' col piano omologo di quella superficie; e però il numero di tali piani è kv', se v' è l'ordine della curva o'.

Ciò equivale a dire che l'ordine di multiplicità della curva o per le superficie del sistema Σ è $\mu = kv'$.

Ulteriormente si assuma nello spazio S' una linea r' che si appoggi alla curva o' in un punto generico P' senza presentare alcun'altra particolarità.

Se la linea r' è di ordine x', accadrà che un piano generico dello spazio S' segherà la r' in x' punti, mentre un piano generico della stella (P') la segherà soltanto in $x' - 1$ punti diversi da P'.

Corrispondentemente nello spazio S la linea r omologa della r', mentre sarà segata, fuori del gruppo dei punti e delle linee fondamentali, in x' punti da una superficie generica del sistema Σ, avrà invece in comune, fuori dell'anzidetto gruppo, soltanto $x' - 1$ punti con una superficie generica della rete Δ omologa della stella di piani (P'), e però necessariamente la r si appoggerà alla curva o in un punto P ed in questo punto sarà tangente ad una retta situata in un piano del gruppo $\tau_1, \ldots, \tau_k$ dell'involuzione J_P dovuto alla rete Δ. E il punto P sarà l'omologo del punto P' nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle linee omologhe r, r'.

Inversamente, ad una linea r dello spazio S, la quale si appoggi alla curva o in un punto generico P senza presentare ulteriori particolarità, corrisponde nello spazio S' una linea r' la quale si appoggia alla curva o' nel punto P centro della stella di piani omologa della rete Δ formata dalle superficie del sistema Σ che nel punto P sono tangenti al piano determinato dalle tangenti in tale punto alle curve o, r. E il punto P' sarà l'omologo del punto P nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle linee omologhe r, r'.

Assumendo come linea r' una retta generica dello spazio S' o come linea r una retta generica dello spazio S, si riconosce che ognuna delle curve o, o' non è incontrata fuori del gruppo dei punti fondamentali da una linea generica collegata alla corrispondenza nello spazio a cui la curva appartiene, e che perciò le o, o' sono curve fondamentali di 2^a specie della corrispondenza.

Ne segue che nello spazio S' valgono per la curva o' le proprietà dimostrate per la curva o nello spazio S: vale a dire che ad ogni linea r' dello spazio S', che si appoggi alla o' in un punto generico P', corrisponde nello spazio S una linea r che si appoggia ad una curva fondamentale di 2^a specie o^* in un punto P omologo del punto P' nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle due linee. Ma il punto P, per quanto si è detto, è sulla curva o, onde la o^* coincide con la o, sicchè le relazioni che intercedono fra le due curve sono invertibili: cioè ad ogni stella di piani, che abbia il centro in un punto generico P della o, corrisponde nello spazio S' una rete M' del sistema Ξ' formata da superficie che in ogni punto generico P' della o' risultano tutte tangenti ai piani di

un gruppo di una involuzione $J_{P'}$ che si ha nel fascio che ha per asse la tangente nel punto P' alla o'.

Se questa involuzione è di grado k', sarà $\mu = k'\nu'$, sicchè $k' = k$ e ne segue il teorema.

Ai tipi di corrispondenza già da me determinati, che presentano coppie di linee fondamentali di 2ª specie omologhe, per le quali è $k > 1$, aggiungerò il seguente:

Si supponga di avere due monoidi $\omega, \pi^\star$ degli ordini $n-1$, n che abbiano in comune il vertice O e p rette generiche $r_1, \ldots, r_p$ della stella (O) multiple per entrambi degli ordini $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ rispettivamente, per $\varrho_i \geq 1$.

In tale caso resta determinato nello spazio S un sistema omaloidico Σ costituito da monoidi $\pi_n = O^{n-1} r_1^{\varrho_1} \ldots r_p^{\varrho_p} c$. Esso è quello che comprende il monoide $\pi^\star$ e la rete degenere $\mathcal{A}$ costituita dalle superficie che si spezzano nel monoide ω e nei singoli piani della stella (O), sicchè la linea base semplice c del sistema è la linea comune alle superficie $\omega, \pi^\star$ diversa dalle $r_1, \ldots, r_p$.

Nel sistema, un fascio generico ha per base variabile una curva piana $c_n \equiv O^{n-1} c^{2(n-1)}$ e la Jacobiana è costituita dal monoide dato $\omega_{n-1} \equiv$ $\equiv O^{n-2} r_1^{\varrho_1} \ldots r_p^{\varrho_p} c$, contato due volte, e dal cono $\gamma_{3(n-1)} \equiv O^{3(n-1)} r_1^{2\varrho_1} \ldots r_p^{2\varrho_p} c$, che dal punto O proietta la c.

In una corrispondenza birazionale K fra gli spazi S, S' che tragga origine dal sistema Σ, le rette $r_1, \ldots r_p$ che non sono incontrate fuori del punto fondamentale O dalle curve c_n collegate alla corrispondenza nello spazio S, sono linee fondamentali di 2ª specie in tale spazio.

Per averne le omologhe occorre innanzi tutto considerare la stella di piani (O') dello spazio S' che corrisponde alla rete degenere $\mathcal{A}$. Il punto O', centro di tale stella, corrisponde nella K al monoide fondamentale ω_{n-1}: mentre i piani e i raggi della stella (O') corrispondono nella K ai piani ed ai raggi della stella (O) con una omografia Ω ben determinata.

Una linea generica r dello spazio S e la sua omologa r' nell'altro spazio sono proiettate rispettivamente dai punti O, O' secondo due coni che si corrispondono nella omografia Ω; e propriamente due generatrici omologhe dei due coni proiettano due punti corrispondenti delle due curve.

Perciò, se alle rette $r_1, \ldots, r_p$ della stella (O) corrispondono nella Ω le rette $r'_1, \ldots, r'_p$ della stella (O'), qualora la linea r si appoggi alla retta r_i in un punto P, la linea r' si appoggerà alla retta r'_i in un punto P' che sarà l'omologo del punto P nella corrispondenza che la K determina fra i punti delle due linee r, r'. Ne segue che le linee fondamentali di 2ª specie dello spazio S' che corrispondono alle $r_1, \ldots, r_p$, sono le rette $r'_1, \ldots, r'_p$. Inoltre per le rette r_i, r'_i si ha $\nu = \nu' = 1$, sicchè la r'_i è multipla di ordine $\varrho'_i = \varrho_i$ per le superficie del sistema omaloidico Ξ' collegato alla

corrispondenza nello spazio S'. E se $\varrho_i > 1$, per le linee omologhe r_i, r'_i sarà $k = \varrho_i = \varrho > 1$.

Il sistema Ξ' innanzidetto è costituito da monoidi di ordine n aventi il vertice nel punto O' e comprende una rete degenere, omologa della stella di piani (O), costituita da superficie che si spezzano nei singoli piani della stella (O') ed in un monoide fisso ω' omologo nella K del punto O'. Perciò il monoide ω' è del tipo: $\omega'_{n-1} = O'^{n-2} r_1'^{\varrho_1} \dots r_p'^{\varrho}$ ed il sistema Ξ' è affatto analogo al sistema Σ, risulta cioè costituito da superficie $\chi'_n \equiv O'^{n-1} r_1'^{\varrho_1} \dots r_p'^{\varrho_p}$ che hanno ulteriormente in comune una linea semplice c' del monoide ω'.

Alle linee fondamentali c, c' corrispondono rispettivamente nella K i due coni fondamentali che proiettano le c', c dai punti O', O. Questi coni si corrispondono nella omografia Ω in modo che, di due generatrici corrispondenti, l'una nello spazio S o nello spazio S' corrisponde per intero nella K al punto in cui l'altra si appoggia alla c' o alla c.

Con ciò la corrispondenza K può ritenersi perfettamente nota. Essa comprende come caso particolare quella studiata da De Paolis. (1)

Matematica. — *Sopra alcuni sviluppi in serie.* Nota III di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera (2).

11. Si presenta ora il problema dello sviluppo del prodotto di due funzioni rappresentate entrambe da serie di funzioni $u(x)$.

Occorre per questo lo sviluppo del prodotto $u_n(x) \cdot u_m(x)$. Esso potrebbe ottenersi facendo il prodotto delle due serie di potenze di x che rappresentano $u_n(x)$ ed $u_m(x)$ e sostituendo poi ad ogni potenza di x il suo sviluppo in serie di funzioni u.

Ora esporremo un metodo fondato sopra una formola di ricorrenza, il quale permette di vedere quale è la forma generale dei coefficienti dello sviluppo di $u_n(x) \cdot u_m(x)$.

Tale formola esprime i coefficienti di $u_n^2(x)$ linearmente ed omogeneamente per mezzo dei coefficienti di $u_{n-1}^2(x)$, cosicchè si può dire che i coefficienti di $u_n^2(x)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per mezzo di quelli di $u_0^2(x)$, e lo stesso si può quindi dire dei coefficienti del prodotto $u_n(x) \cdot u_m(x)$, come si intende facilmente quando si pensi alla forma delle derivate dei quadrati delle $u_n(x)$.

La formola che otterremo permette non solo di calcolare i coefficienti dello sviluppo di $u_n^2(x)$ quando si conoscono quelli di $u_{n-1}^2(x)$, ma permette

(1) De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto n-1-plo.* Giornale di Matematiche, vol. XIII.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1921.

di calcolare i coefficienti di una $u_n^2(x)$ qualunque [a cominciare dalla $u_o^2(x)$] per il fatto che il primo coefficiente non nullo in ciascuna delle $u_n^2(x)$ è l'unità.

Per stabilire la formola in discorso, cominceremo con l'osservare che lo sviluppo di $u_n^2(x)$ deve cominciare col termine in $u_{2n}(x)$. Poniamo allora

$$u_n^2(x) = \frac{A_{2n}^{(n)}}{(2n)!}\, u_{2n}(x) + \frac{A_{2n+1}^{(n)}}{(2n+1)!}\, u_{2n+1}(x) + \cdots .$$

È chiaro che $A_{2n}^{(n)} = (2n)!$.

Abbiamo poi

$$\alpha^{n-1}\, u_{n-1}(x) = u_{n-1}(\alpha x) + \frac{1}{n}\, u_n(\alpha x) .$$

Quadrando i due membri ed integrando tra 0 ed x, otteniamo

$$\alpha^{2n-2} \int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds + \frac{2}{n\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}(s)\, u_n(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{n^2\alpha} \int_0^{\alpha x} u_n^2(s)\, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds + \frac{1}{n^2\alpha}\, u_n^2(\alpha x) + \frac{1}{n^2\alpha} \int_0^{\alpha x} u_n^2(s)\, ds$$

che possiamo anche scrivere

$$S[u_n^2(x)] = n^2\, \alpha^{2n-1} \int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds - n^2 \int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds .$$

Nel primo membro il coefficiente di $u_m(x)$ è $A_m^{(n)} \frac{\alpha^m}{m!}$; in $\int_0^x u_{n-1}^2(s)\, ds$ il coefficiente di $u_m(x)$ è $\frac{A_{m-1}^{(n-1)}}{m!}$, e finalmente in $\int_0^{\alpha x} u_{n-1}^2(s)\, ds$ il coefficiente di $u_m(x)$ è

$$\frac{\alpha^m}{m!}\left[A_{m-1}^{(n-1)} - A_{m-2}^{(n-1)} + \cdots + (-1)^{m+1} A_{2n-2}^{(n-1)} \right].$$

Avremo dunque

$$A_m^{(n)} = n^2\, A_{m-1}^{(n-1)} \left(\frac{1}{\alpha^{m-2n+1}} - 1 \right) + n^2 \left(A_{m-2}^{(n-1)} - A_{m-3}^{(n-1)} + \cdots + (-1)^m A_{2n-2}^{(n-1)} \right).$$

Così si vede che le $A^{(n)}$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per mezzo delle $A^{(n-1)}$.

La formola ottenuta può servire al calcolo delle $A^{(n)}$ ed ecco in quale modo.

Cambiamo in essa n in $n+1$ ed m in $m+1$:

$$(13) \qquad A_{m+1}^{(n+1)} = (n+1)^2 A_m^{(n)} \left(\frac{1}{\alpha^{m-2n}} - 1 \right) +$$

$$+ (n+1)^2 \left(A_{m-1}^{(n)} - A_{m-2}^{(n)} + \cdots + (-1)^{m+1} A_{2n}^{(n)} \right).$$

Noi sappiamo che $A_{2n}^{(n)} = (2n)!$. Calcoliamo ora $A_{2n+1}^{(n)}$. Nella (13) facciamo $m = 2n+1$: il primo membro diventa $A_{2n+2}^{(n+1)}$ che è eguale a $(2n+2)!$, al secondo membro tutto è noto fuorchè $A_{2n+1}^{(n)}$. Troviamo così

$$A_{2n+1}^{(n)} = (2n)! \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Se in questa cambiamo n in $n+1$, troviamo $A_{2n+3}^{(n+1)}$, ed allora nella (13) facciamo $m = 2n+2$: tutto sarà noto eccetto $A_{2n+2}^{(n)}$, e troviamo allora

$$A_{2n+2}^{(n)} = (2n)! \left(3 \cdot \frac{3n+2}{n+2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 \right) \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Da questa otteniamo $A_{2n+4}^{(n+1)}$ ed allora la (13), dove si faccia $m = 2n+3$, ci darà

$$A_{2n+3}^{(n)} = (2n)! \left(3 \cdot \frac{9n^3 + 36n^2 + 45n + 14}{(n+1)(n+2)(n+3)} \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{3n+1}{n+1} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} - 1 \right) \frac{\alpha^3}{1-\alpha^3},$$

e così via, si possono ottenere le varie $A^{(n)}$.

Noi non continueremo questa ricerca delle $A^{(n)}$; noteremo solo che $A_{2n+k}^{(n)}$ è il prodotto di $\frac{\alpha^k}{1-\alpha^k}$ per un polinomio in

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha^{k-1}}{1-\alpha^{k-1}}$$

di grado $k-1$ rispetto a tutti gli argomenti e di primo grado rispetto a ciascuno.

Calcolati gli sviluppi delle u_n^2, si possono avere, per mezzo di derivazioni, quelli dei prodotti $u_n \cdot u_m$.

12. Daremo ora lo sviluppo di $u_k(hx)$ con h qualunque.

Si ha

$$u_0(hx) = u_0(h\alpha x) + h \int_\alpha^{\alpha x} u_0(hs)\, ds,$$

cioè

$$(14) \qquad u_0(hx) = \mathrm{S}[u_0(hx)] + (h-1)\int_0^{\alpha x} u_0(hs)\,ds .$$

Ponendo $u_0(hx) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{u_n(x)}{n!}$, abbiamo

$$b_0 = 1 ,$$
$$\mathrm{S}[u_0(hx)] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^n \frac{u_n(x)}{n!} ,$$
$$\int_0^x u_0(hs)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \frac{u_n(x)}{n!} ;$$

e perciò

$$\int_0^{\alpha x} u_0(hs)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{u_n(x)}{n!} .$$

Si dovrà dunque avere, eguagliando i coefficienti della stessa u_n nei due membri della (14),

$$\frac{b_n}{n!} = \frac{b_n \alpha^n}{n!} + (h-1)(b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{\alpha^n}{n!} ;$$

cioè

$$b_n = (h-1)(b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} b_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha^n} .$$

Facilmente si trova

$$b_n = \left[(h-1)\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1\right] \times$$
$$\times \left[(h-1)\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - 1\right] \cdots \left[(h-1)\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha^{n-1}} - 1\right](h-1)\frac{\alpha^n}{1-\alpha^n} ;$$

cioè

$$b_n = (-1)^n \alpha^n \frac{(1-h)(1-h\alpha)\ldots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^n)} .$$

Abbiamo dunque

$$(15) \quad u_0(hx) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \frac{(1-h)(1-h\alpha)\ldots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^n)} \frac{u_n(x)}{n!} .$$

Per $h = \alpha^m$, con m intero e positivo, troviamo

$$u_0(\alpha^m x) = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{m-1})} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times$$
$$\times (1-\alpha^{n+1})(1-\alpha^{n+2})\ldots(1-\alpha^{n+m-1}) \frac{u_n(x)}{n!} .$$

Per $m = 1$ si ritrova lo sviluppo di $u_0(\alpha x)$.

Per $h = \frac{1}{\alpha^m}$ si trova

$$u_0\left(\frac{x}{\alpha^m}\right) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \frac{(1-\alpha^m)(1-\alpha^{m-1})\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(x)}{n!}$$

e da questa, cambiando x in $\alpha^m x$, ricaviamo

$$(16)\quad u_0(x) = u_0(\alpha^m x) + \sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \times$$

$$\times \frac{(1-\alpha^m)(1-\alpha^{m-1})\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_n(\alpha^m x)}{n!}.$$

Per un n fisso, il termine di posto $n+1$ del secondo membro della precedente eguaglianza al tendere di m ad ∞ tende ad $\frac{\alpha^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{x^n}{n!}$, che è il termine di posto $n+1$ nello sviluppo di $u_0(x)$ in serie di potenze di x.

Dalla (15) otteniamo poi in generale lo sviluppo di $u_k(hx)$:

$$(17)\quad u_k(hx) = h^k k! \left[\frac{u_k(x)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times\right.$$

$$\left. \times \frac{(1-h)(1-h\alpha)\dots(1-h\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!}\right],$$

e si possono ripetere relativamente alla $u_k(hx)$ le considerazioni fatte per la $u_0(hx)$.

Si ha, per esempio,

$$(18)\quad u_k(x) = \frac{1}{\alpha^{km}}\left[u_k(\alpha^m x) + \int_0^{\alpha^m x} \left\{\sum_{n=1}^{m} \alpha^{\frac{n(n+1)}{2} - nm} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{(1-\alpha^m)\dots(1-\alpha^{m-n+1})}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{(\alpha^m x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}\right\} u_k(\xi)\, d\xi\right]$$

che è un altro modo di scrivere l'analoga della (16). Per $m = 1$ si ritrova l'equazione funzionale $u_k(x) = \frac{1}{\alpha^k} \mathrm{S}[u_k(x)]$ a cui soddisfa la u_k. Per m qualunque la (18) si può anche scrivere $u_k(x) = \frac{1}{\alpha^{km}} \mathrm{S}^m[u_k(x)]$, dove con S^m denotiamo la potenza m^{ma} dell'operazione S, ossia l'operazione lineare che risulta dall'applicazione successiva della S per m volte.

La (17) ci dà in particolare

$$u_k(-x) = (-1)^k k! \left[\frac{u_k(x)}{k!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1+\alpha)\dots(1+\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!} \right].$$

Dalla (17) poi, facendo $x = 1$ ed $h = x$, ricaviamo il seguente sviluppo per la $u_k(x)$:

$$u_k(x) = k!\, x^k \left[\frac{u_k(1)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{u_{n+k}(1)}{(n+k)!} (1-x)(1-\alpha x)\dots(1-\alpha^{n-1}x) \right].$$

Matematica. — *Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali.* Nota II di Francesco Tricomi, presentata dal Socio V. Volterra [1].

5. Supponiamo per primo che il nucleo $K(\xi, \eta)$ sia simmetrico e tale che il sistema delle sue funzioni parametriche associate $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \dots$ possa rendersi ortogonale e normale, il che d'ora innanzi supporremo sempre sia già stato fatto. Inoltre supponiamo che, se i suoi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ non sono in numero finito, le due serie $\Sigma_h P_h / |\lambda_h|$ e $\Sigma_h P_h^2 / |\lambda_h|$, dove P_h è il massimo di $|\psi_h(\xi)|$, siano entrambe convergenti.

In queste ipotesi, com'è noto, la serie $\Sigma_h \psi_h(\xi)\psi_h(\eta)/\lambda_h$ è uniformemente convergente ed ha per somma $K(\xi, \eta)$; pertanto la (7) potrà scriversi

$$\frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} = \alpha(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)}{\lambda_h} \int_0^1 \psi_h(\xi)\, \Phi(\eta, z)\, d\eta$$

da cui, identificando ψ_h con f e giovandosi delle (8), (10) e (11),

$$\frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} = \alpha(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$\mu_h(z) = c_h e^{z/\lambda_h} + \int_0^1 \psi_h(\xi)\, \gamma_h(\xi, z)\, d\xi \ , \ \gamma_h(\xi, z) = e^{z/\lambda_h} \int_0^z \alpha(\xi, z)\, e^{-z/\lambda_h}\, dz, \tag{13}$$
$$(h = 1, 2, \dots),$$

essendo le c_h delle costanti arbitrarie.

[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

È facile vedere che la serie $\Sigma_h \psi_h(\xi)\,\mu_h(z)/\lambda_h$ è assolutamente ed uniformemente convergente, purchè l'insieme delle costanti arbitrarie c_h sia limitato. Infatti, supposto che $|c_h| < L$, $|\alpha(\xi, z)| < M$, $|K(\xi, \eta)| < N$, $|z| < Z$, tenendo conto che $|\lambda_h|$ ammette come limite inferiore $1/N$, si trova che

$$|\gamma_h(\xi, z)| < MZ\, e^{2NZ},$$

dal che segue

$$\Sigma_h \left| \frac{\psi_h(\xi)\,\mu_h(z)}{\lambda_h} \right| < L e^{NZ} \Sigma_h \frac{P_h}{|\lambda_h|} + MZ\, e^{2NZ} \Sigma_h \frac{P_h^2}{|\lambda_h|},$$

ciò che dimostra l'assunto.

Dalla (12), integrando rispetto a z, potrà pertanto dedursi

$$\Phi(\xi, z) = \omega(\xi) + \beta(\xi, z) + \Sigma_h \psi_h(\xi)\,\nu_h(z), \tag{14}$$

avendo indicato con $\omega(\xi)$ una funzione arbitraria ed avendo posto

$$\beta(\xi, z) = \int_0^z \alpha(\xi, z)\,dz, \quad \nu_h(z) = \frac{1}{\lambda_h} \int_0^z \mu_h(z)\,dz = \mu_h(z) + \int_0^1 \psi_h(\xi)\,\beta(\xi, z)\,d\xi. \tag{15}$$

La (14) risolve l'equazione integro-differenziale (7). La funzione arbitraria che in essa compare come termine addittivo, rappresenta manifestamente il valore iniziale di Φ per $z = 0$. Il fatto che questo valore iniziale compaia così semplicemente nella formula, consente di calcolare la funzione V di Jacobi senz'alcuna difficoltà.

6. Esaminiamo ora il caso che il nucleo K sia asimmetrico, escludendo, pel momento, che esso sia privo di parametri e supponendo che siano sempre verificate le ipotesi fatte in principio del § precedente. Consideriamo il nucleo simmetrico

$$G(\xi, \eta) = \Sigma_h \frac{\psi_h(\xi)\,\psi_h(\eta)}{\lambda_h}, \tag{16}$$

che ha gli stessi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ di K e ammette le $\psi_1, \psi_2, \ldots$ come funzioni parametriche a questi rispettivamente corrispondenti. Inoltre, come si verifica immediatamente, si ha $\overset{\bullet\bullet}{G}\,\overset{\bullet\bullet}{K}(\xi, \eta) = \overset{\bullet\bullet}{G}^2(\xi, \eta)$, ove il doppio asterisco indica l'operazione di composizione di 2ª specie [1].

Ciò premesso, osserviamo che la (7) può anche scriversi

$$\partial\Phi/\partial z = \alpha(\xi, z) + \overset{\bullet\bullet}{K}\,\overset{\bullet\bullet}{\Phi}(\xi, z), \tag{7'}$$

da cui, componendo con G a sinistra e ponendo $\overset{\bullet\bullet}{G}\,\overset{\bullet\bullet}{\Phi}(\xi, z) = \Psi(\xi, z)$, si

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, pag. 179.

ricava subito

$$(17) \qquad \frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} = \ddot{\ddot{G}}\,\ddot{\ddot{\alpha}}(\xi, z) + \int_0^1 G(\xi, \eta)\, \Psi(\eta, z)\, d\eta .$$

L'equazione (17) cui siamo così pervenuti è della stessa forma della (7) ma con nucleo simmetrico; ad essa potrà pertanto applicarsi l'analisi del § precedente traendone

$$(18) \qquad \frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} = \ddot{\ddot{G}}\,\ddot{\ddot{\alpha}}(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \bar{\mu}(z)}{\lambda_h}$$

dove $\bar{\mu}_h$ denota ciò che diviene la funzione μ_h allorchè al posto di $\alpha(\xi, z)$ si sostituisce $\ddot{\ddot{G}}\,\ddot{\ddot{\alpha}}(\xi, z)$. Nella (18) sostituiamo a Ψ il suo valore e teniamo conto che, com'è facile verificare, $\bar{\mu}(z) = \mu_h(z)/\lambda_h$; avremo così

$$\int_0^1 G(\xi, \eta)\, \overline{\Phi}(\eta, z)\, d\eta = \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h^2} \quad , \quad \overline{\Phi}(\eta, z) = \frac{\partial \Phi(\eta, z)}{\partial z} - \alpha(\eta, z) .$$

È questa un'equazione integrale di Fredholm, 1ª specie in $\overline{\Phi}$, a nucleo simmetrico; però la funzione fuori integrale è data come una combinazione lineare delle funzioni parametriche del nucleo. Essa è perciò facilmente risolubile e precisamente, in virtù di una nota formula, si ha

$$\overline{\Phi}(\xi, z) = \frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} - \alpha(\xi, z) = \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h}$$

da cui, integrando rispetto a z, si deduce

$$\Phi(\xi, z) = \omega(\xi) + \beta(\xi, z) + \Sigma_h\, \psi_h(\xi)\, \nu_h(z) ,$$

che non è altro che la (14): resta pertanto dimostrato che questa formula è valida ancorchè il nucleo non sia simmetrico.

7. Resta finalmente da considerare il caso che il nucleo K sia privo di parametri. Integriamo la (7′) rispetto a z e indichiamo brevemente con Γ l'operazione distributiva definita dall'uguaglianza

$$\Gamma\Phi(\xi, \eta) = \omega(\xi) + \beta(\xi, \eta) + \ddot{\ddot{K}} \left(\int_0^z \ddot{\ddot{\Phi}}(\xi, z)\, dz \right) (\xi, z) ,$$

dove Φ denota una funzione qualsiasi di due variabili; l'equazione che si ottiene potrà allora scriversi simbolicamente $\Phi = \Gamma\Phi$. Ciò mostra, in virtù del

teorema di Schroeder generalizzato (1) applicato all'operazione funzionale Γ, che se, partendo da una certa funzione iniziale qualsiasi Φ_0 si costruisce la successione di iterate

$$\Phi_0\ ,\ \Phi_1 = \Gamma\Phi_0\ ,\ \Phi_2 = \Gamma\Phi_1\ ,\ \Phi_3 = \Gamma\Phi_2\ ,\ \dots\ ,$$

tutte le volte che questa successione è convergente il suo limite è una soluzione della (7').

Assumiamo $\Phi_0 = 0$; allora, com'è facile vedere, si ha

$$\Phi_{n+1} = \omega + \left(z\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}} - \frac{z^2}{2!}\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^2 + \dots + \frac{z^n}{n!}\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n\right)\overset{\bullet\bullet}{\omega} + \beta + \overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}\,\overset{\bullet\bullet}{\beta_1} + \dots + \overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n\,\overset{\bullet\bullet}{\beta_n}\ ,$$
$$(n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)\ ,$$

avendo posto

$$\beta_1(\xi\ ,\ z) = \int_0^z \beta(\xi\ ,\ z)\,dz\ \ ;\ \ \beta_{h+1}(\xi\ ,\ z) = \int_0^z \beta_h(\xi\ ,\ z)\,dz\ ,\quad (h = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots).$$

Ne segue che se le due serie

$$\mathrm{H}_1(\xi\ ,\ \eta\,|\,z) = \sum_1^\infty {}_n\, z^n\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n/n!\quad ,\quad \mathrm{H}_2(\xi\ ,\ z) = \beta + \sum_1^\infty {}_n\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n\,\overset{\bullet\bullet}{\beta_n}$$

sono convergenti, si avrà la soluzione

$$\Phi(\xi\ ,\ z) = \omega(\xi) + \int_0^1 \mathrm{H}_1(\xi\ ,\ \eta\,|\,z)\,\omega(\eta)\,d\eta + \mathrm{H}_2(\xi\ ,\ z) \tag{19}$$

che per $z = 0$ si riduce manifestamente alla funzione arbitraria $\omega(\xi)$.

Ora si verifica subito che

$$|z^n\,\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n| < (\mathrm{ZN})^n\ ,\ |\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n\,\overset{\bullet\bullet}{\beta_n}| < \mathrm{MZ}^{n+1}\,|\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n|\ , \tag{20}$$

dunque la serie H_1 ammette come maggiorante la serie esponenziale $\Sigma_n(\mathrm{ZN})^n/n!$ epperò è sempre assolutamente ed uniformemente convergente. Quanto alla serie H_2 essa, in virtù della 2ª delle (20), ammetterà come maggiorante la serie $\mathrm{MZ}^2\,\Sigma_n\,\mathrm{Z}^{n-1}\,|\overset{\bullet\bullet}{\mathrm{K}}^n|$ e cioè, prescindendo dal fattore MZ^2, la serie dei moduli corrispondente allo sviluppo in serie di Z del nucleo risolvente dell'equazione di Fredholm

$$\varphi(\xi) - \mathrm{Z}\int_0^1 \mathrm{K}(\xi\ ,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi)\ .$$

(1) Cfr. Tricomi, *Sull'iterazione delle funzioni di linee* [Giorn. di Mat. di Battaglini, vol. 55 (1917)].

Ma essendo per ipotesi K un nucleo privo di parametri, il nucleo risolvente di quest'equazione è una funzione olomorfa di Z, dunque l'accennata serie dei moduli sarà convergente, epperò la serie H_2 convergerà assolutamente ed uniformemente e la (19) resta quindi pienamente legittimata.

Se $\alpha(\xi, \eta) = 0$, allora pure $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0$ e la serie H_2 sparisce dalla (19), che perciò in questo caso resta valida incondizionatamente ancorchè K abbia dei parametri. Si ritrova così la formola stabilita dal prof. Volterra [1] in questo caso particolare.

Astronomia. — *Sulla massa e il moto proprio del sistema 40 Eridani.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio A. Di Legge.

Il sistema *40 Eridani* ($\Sigma 518 \equiv \beta GC\ 2109$; $\alpha = 4^h\ 10^m.7'$, $\delta = -7°\ 49'$, Eq. 1900), scoperto da W. Herschel nel 1783, è costituito da tre componenti, di cui la A, di grandezza 4.5, ha uno dei maggiori moti proprî conosciuti, comune anche alle altre componenti B e C di grandezze 9,4 e 10,8. La componente B dista da A, all'epoca presente, 83″ e da C 3″; con questa, B forma un sistema binario con un'orbita del periodo di 180 anni e con una eccentricità che è la più piccola conosciuta per i sistemi binari visuali.

Un'orbita precisa non potrà essere calcolata fino a che non si conosca con più esattezza la forma dell'orbita apparente nel quarto quadrante; tuttavia una buona approssimazione è certo data dai seguenti elementi di Doolittle che soddisfano bene alle osservazioni eseguite dalla scoperta fino a quelle ultime di Aitken [2] del 1912.

40 Eridani — Coppia BC

$$
\begin{aligned}
P &= 180.03^a \\
T &= 1843.18 \\
e &= 0.134 \\
a &= 4.79 \\
\Omega &= 150°.8 \\
i &= 63°.25 \\
\omega &= 319°.55.
\end{aligned}
$$

[1] Nota già cit.: *Sulle equazioni alle derivate funzionali.*

[2] Lick Observatory Publ., vol. XII, pag. 29.

La parallasse di A è stata più volte determinata con metodi trigonometrici e recentemente anche con metodo spettroscopico a Monte Wilson. I valori risultanti dai due metodi sono rispettivamente

$$\pi_{tr} = 0''.196 \quad , \quad \pi_{sp} = 0''.219 ,$$

e, se si adotta il secondo, si ottiene

$$\text{grandezza assoluta di A} = 6.2 .$$

Il suo spettro appartiene alla classe *K*, quindi la componente A è una stella rossa e nana. Poichè il moto proprio di B C è sensibilmente uguale a quello della componente A, si può ammettere che le parallassi di B e C sieno uguali a quella di A, donde si avrà:

$$\text{grandezza assoluta di B} = 11.1$$
$$\text{» » di C} = 12.5 .$$

Le somma delle masse del sistema BC, in unità della massa solare risulta, per la terza legge di Keplero, usando per il periodo e il semiasse maggiore i valori di Doolittle:

$$M + M' = 0.32 \odot .$$

Delle masse dei sistemi visuali binari è questa una delle più piccole finora determinate, e fra queste ricordiamo quella del sistema *Krüger 60* che è 0,42 della massa solare (1). Mentre la grandezza assoluta della componente principale di *Krüger 60* è 10,8, ed il suo spettro appartiene alla classe *Mb*, cioè è una stella rossa e nana, invece nel sistema *40 Eridani* il compagno B appartiene alla classe *A2* (2).

Poichè la maggioranza delle stelle di classe *A* di cui si conosce la luminosità è compresa fra i limiti di grandezza assoluta — 2 e + 4, la componente B di *40 Eridani* è una stella anomala; ed infatti calcolandone la densità, in base all'ipotesi generalmente ammessa della validità della legge di Planck, risulta un valore inammissibile (3).

Anche la densità del sistema *Krüger 60* risulta eccezionalmente grande per ambedue le componenti, nonostante che appartengano alla classe *M*; e quindi si deve concludere che per queste stelle nane la superficie di splendore o il potere radiante sieno molto inferiori a quelli che comporterebbero le loro caratteristiche spettrali.

(1) S. A. Mitchell, *The parallax of Krüger 60.* Astr. Journal, n. 767, pag. 179.

(2) Recentemente è stato fotografato all'osservatorio Lick (Pubbl. Astr. Soc. Pacific. Ottobre 1921, pag. 272) anche lo spettro di C che appartiene alla classe M*d* con la riga H_β luminosa.

(3) E. Bernewitz, *Ueber die Dichten der Doppelsterne.* Astr. Nachr., n. 5089, pag. 7.

I collegamenti micrometrici di B con A, eseguiti fin dall'epoca della scoperta, dànno il modo di calcolare le masse delle due componenti B e C. Con le misure che si trovano raccolte in βGC e in Th. Lewis [1] e con quelle, più recenti, di Aitken [2], ho formato 12 luoghi normali con gli angoli di posizione e le distanze, ridotti i primi all'equinozio 1850.0, ed ho calcolato con gli elementi di Doolittle le coordinate di C rispetto a B per le stesse epoche:

t	Coppia AB, eq. 1850			Coppia BC, eq. 1850	
	p	ϱ	OSSERVATORI	p_c	ϱ_c
1825.05	107°.60	85".32	Σ	234°.5	1".91
1836.04	107.40	83.50	Σ	187.9	2.67
1851.22	106.20	82.24	Σ	159.6	3.99
1855.71	106.15	82.10	$O\Sigma$, Se	154 3	4.18
1864.08	105.58	82.48	En, Δ	144.9	4.26
1878.05	105.46	81.38	$O\Sigma$, β	127.0	3.62
1881.37	105.44	82.55	$O\Sigma$, Hl	121.5	3.38
1887.06	105.16	81.74	Hl, En	109.8	2.95
1888.47	105.40	82.10	Hl, β	106.5	2.85
1899.03	105.00	82.76	Solà, A	72.7	2.32
1904.70	105.03	82.12	β	51.3	2.36
1912.05	104.89	82.62	A	27.6	2.71

Trasformati questi angoli di posizione e distanze in differenze di ascensione retta e declinazione, ho risolto due sistemi di dodici equazioni di condizione ciascuno, uno per le α l'altro per le δ, contenenti come incognite le differenze di ascensione retta e di declinazione per il 1825.0, il moto proprio del centro di gravità del sistema BC rispetto ad A ed il rapporto:

$$k = \frac{m'}{m + m'}$$

della massa della componente C alla massa totale. I risultati sono i seguenti:

$$\Delta\alpha\ 1825.0 = -80''.67 \qquad \Delta\delta\ 1825.0 = +26''.44$$

$$\mu_\alpha = +\ 0''.007 \pm 0''.013 \qquad \mu_\delta = +\ 0''.071 \pm 0''.003$$

$$k = +\ 0\ .48 \pm 0\ .23 \qquad k = +\ 0\ .39 \pm 0\ .04.$$

[1] Memoirs of the Royal Astr. Soc., vol. LVI.
[2] Lick Observatory Publ., vol. XII.

Il moto in δ della coppia BC si presenta più favorevole del moto in α nell' intervallo di tempo considerato per la determinazione di k; ed infatti dalle equazioni in δ si ha il risultato più attendibile.

La componente A è stata anche più volte collegata con stelle deboli, designate in βGC con a di 11^m e con b di $11^m.8$, da cui si deducono indiretti collegamenti con B, i quali possono essere usati per ottenere altri valori di k. Ho tentato il calcolo con queste stelle; ma, sia per la scarsa precisione dei collegamenti indiretti, sia perchè le osservazioni sono ancora poco numerose, i valori di k non risultano sufficientemente esatti. Facendo il medio pesato dei due k sopra trovati, si ottiene

$$\frac{m'}{m} = 0.64\,;$$

questo valore, con l'altro sopra trovato per la somma delle masse, dà

$$M = 0.20\,\odot$$
$$M' = 0.12\,\odot\,.$$

Per il sistema *Krüger 60*, con il rapporto delle masse dato da Bernewitz [1], e la massa totale sopra riferita, si ottiene, per la componente A, $M = 0.23\,\odot$; per la B, $M' = 0.19\,\odot$.

I collegamenti di A con a e b si prestano bene per calcolare il moto proprio di A. Dalle osservazioni esistenti in Th. Lewis (loc. cit.) e βGC [2] si ottiene il seguente moto proprio ridotto al 1900:

compon. A $\quad \mu_\alpha = -2''.247 \pm 0''.002 \quad , \quad \mu_\delta = -3''.427 \pm 0''.006$

e sull'arco di cerchio massimo: $\mu = 4''.087$ in $213°.0$,
in buon accordo con quello che si trova nel Catalogo generale di Boss dedotto dalle osservazioni meridiane e ridotto alla stessa epoca:

$$\mu_\alpha = -2''.226 \pm 0''.002 \quad , \quad \mu_\delta = -3''.435 \pm 0''.002$$
$$\mu = 4''.082 \text{ in } 212°.7.$$

Il periodo di tempo trascorso dalle prime osservazioni di *40 Eridani* è ancora troppo breve per poter decidere se il moto proprio del centro di gravità del sistema BC rispetto ad A sia un moto orbitale di lunghissimo periodo [3] o se si tratti di moto proprio comune nella stessa direzione.

[1] Loc. cit., pag. 8.

[2] Cfr. anche: Burnham, *Measures of proper motions stars*, Washington, 1913, pag. 122.

[3] Th. Lewis, loc. cit., pag. 114; Aitken, *The binary stars*, New York, 1918, pag. 236.

Una differenza nel moto in δ sembra posta fuori di dubbio da questi calcoli, dai quali si conclude il seguente moto proprio del centro di gravità del sistema BC per il 1900:

c.g. BC $\quad \mu_\alpha = -2''.240 \pm 0''.013 \quad , \quad \mu_\delta = -3''.356 \pm 0''.007$

e sull'arco di cerchio massimo: $\mu = 4''.024$ in $213°.5$.

Dal moto proprio e dalla parallasse di *40 Eridani* risulta la notevole velocità di 88 chilometri per secondo nel piano normale alla visuale.

La velocità lungo la visuale, per quanto è a mia conoscenza, non è stata ancora determinata.

Fisica. — *L'effetto Hall nel Bismuto solidificato nel campo magnetico.* Nota di Tieri L. e Persico E. [1] presentata dal Socio Corbino [2].

Il fenomeno di Hall è stato ampiamente studiato sia nel Bi cristallino, sia in quello isotropo. Ora se si tiene presente che in quest'ultimo l'isotropia non si riferisce ai piú piccoli elementi di volume, ma ha carattere statistico, inquantochè risulta dalla uniforme distribuzione in tutte le direzioni, degli assi dei singoli cristalli costituenti la massa metallica, si avrà del Bi di proprietà intermedie fra i due, se si riuscirà a provocare in un modo qualunque, al momento della solidificazione, una tendenza all'orientamento degli assi dei cristalli in una direzione determinata. Poichè un cristallo di Bi in un campo magnetico uniforme, tende a orientarsi col suo asse principale parallelo al campo, si pensò che il campo magnetico dovesse avere azione sull'orientamento dei cristalli durante la solidificazione. Se ciò avviene le proprietà del Bi, ottenuto in queste condizioni, dovranno assomigliare a quelle del Bi cristallino, con l'asse nella direzione in cui era il campo orientatore, e con una anisotropia presumibilmente minore; tutte le direzioni normali a questa saranno evidentemente equivalenti fra loro.

Per verificare ciò, principalmente rispetto all'effetto Hall, abbiamo dapprima colato due cilindri eguali di Bi, facendo solidificare l'uno in un campo magnetico di 7550 Gauss normale al suo asse e l'altro fuori del campo. Da questi cilindri vennero tagliati due dischi del diametro di cm. 2, e dello spessore di circa cm. 0,1, l'uno normale all'asse del cilindro (che durante la solidificazione era verticale) e l'altro parallelo a questo: essi

(1) A Tieri è dovuta l'idea della ricerca; ad entrambi la parte sperimentale.

(2) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1921.

saranno nel seguito contrassegnati con una lettera, e cioè:

solidificazione fuori del campo { o (orizz.) ; v (verticale) } ; solidif. nel campo { p (paral. al campo orient.) ; n (norm. al campo orient.) }

Dal cilindro solidificato nel campo furono poi ricavate altre due coppie di dischi, dello stesso diametro dei precedenti, e dello spessore di cm. 0,05 (p' e n') e 0,15 (p'' e n'') nelle stesse orientazioni, rispettivamente, di p ed n. I dischi di ciascuna coppia (o e v; p ed n; p' ed n'; p'' ed n'') furono torniti insieme, per averli dello stesso spessore. Sul contorno di ognuno di questi dischi, agli estremi di due diametri ortogonali, furono saldati quattro elettrodi puntiformi (nei dischi p, p', p'' una delle coppie di elettrodi è nella direzione in cui agì il campo durante la solidificazione).

Alle misure dell'effetto Hall servì un galvanometro Siemens di 25 Ohms di resistenza interna, cui ne furono aggiunti altri 100 nel circuito; in queste condizioni il galvanometro era aperiodico ed abbastanza pronto per fare le letture senza notevoli errori di origine termica. La corrente primaria che percorreva il disco era di 0,1 ampere, e si chiudeva solo per il tempo necessario alla lettura: il campo di circa 11000 gauss.

Come misura dell'effetto Hall si è presa la media di quattro letture, fatte invertendo in tutti i modi possibili il campo e la corrente. Ecco i risultati ottenuti per le varie coppie di dischi, prendendo la media di parecchie misure:

o)	4,65	p)	5,78	p')	13,2	p'')	4,45
v)	4,91	n)	4,47	n')	9,9	n'')	1,22
diff. %	—5,5		25,5		28,6		57

Come si vede la differenza per i due dischi (o e v) solidificati fuori del campo non è zero come sarebbe da aspettarsi: però è notevolmente minore che per le altre coppie. Essa può essere attribuita alle diverse condizioni di raffreddamento dei due dischi, essendo l'uno (v) tagliato parallelamente all'asse del cilindro nella parte più interna di questo, e l'altro (o) normalmente all'asse stesso: una analoga perturbazione avrà presumibilmente alterato i risultati delle due coppie seguenti, *diminuendo* come si vede dal segno, l'effetto del campo: quanto alla coppia p'', n'', per essa le condizioni di raffreddamento erano notevolmente diverse che per le precedenti, essendo tagliato il disco n'' in prossimità della superficie del cilindro.

Si osservi incidentalmente che per ciascun disco furono fatte le osservazioni impiegando alternativamente l'una e l'altra coppia di elettrodi opposti come elettrodi primari, e entro i limiti degli errori sperimentali si trovò valido

il principio di reciprocità (1) anche nei dischi tagliati paralleli al campo; inoltre ai discbi p' e n' furono saldati altri quattro elettrodi a 45° dai precedenti, ottenendo sensibilmente gli stessi risultati, come pure si ottenne lo stesso risultato dal disco n' con elettrodi distribuiti irregolarmente sul contorno.

Da queste prime esperienze si poteva dunque concludere che per una lamina tagliata parallelamente alla direzione del campo, l'effetto Hall è notevolmente maggiore che per una lamina normale a questa. Per confermare tale risultato, e per comparare le lamine solidificate nel campo con quelle solidificate fuori, abbiamo ripetuto l'esperienza con Bi di diversa provenienza, modificandola come segue:

Per eliminare, per quanto possibile, l'influenza delle condizioni di raffreddamento, abbiamo colato quattro cilindri (diam. 2,5 cm.) facendoli solidificare tutti fra le espansioni polari del magnete; ma per due di essi (n. 2 e 4) questo era eccitato, ed aveva un'intensità di 8250 gauss e per gli altri due (n. 1 e 3) no. Dalla parte più interna di ciascun cilindro fu ricavata una lamina parallela all'asse (quindi verticale): le lamine 1 e 2 sono parallele alla superficie delle espansioni polari, le lamine 3 e 4 sono normali a queste, cosicchè le lamine sono:

N. 1 solidif. senza campo e paral. alla sup. delle espans. polari.
N. 2 » col campo e normale al campo orientatore.
N. 3 » senza campo e normale alla sup. delle espans, polari.
N. 4 » col campo e parallela al campo orientatore.

Per le lamine 1 e 2 le condizioni di raffreddamento sono le stesse, e così per la coppia 3 e 4: per le due coppie esse devono differire poco, essendo determinata la differenza unicamente dalla orientazione delle lamine rispetto alle espansioni polari, le quali erano separate dal Bi mediante uno

(1) V. Volterra, Nuovo Cimento, 9, 1915, pag. 23, Lownds, Drude Ann., 9 (1902), pag. 677.

strato di amianto e uno di vetro e quindi non dovevano agire termicamente in modo notevole: tuttavia una piccola differenza c'è, come si vedrà dal confronto delle lamine 1 e 3. Si prese anche un'altra precauzione per evitare, al momento della colata, un troppo rapido raffreddamento superficiale, e cioè si riscaldarono a circa 250° i tubi di vetro fasciati di amianto nei quali si colava il metallo, mediante una corrente elettrica che si interrompeva appena riempiti i tubi. Per assicurarsi che le quattro lamine avessero lo stesso spessore, esse furono tornite insieme: si diede loro la forma quadrata, di cm. 2,2 di lato e cm. 0,1 circa di spessore e nel punto medio di ciascun lato fu saldato un elettrodo puntiforme.

L'effetto Hall, misurato nelle stesse condizioni delle esperienze precedenti, è dato dalla seguente tabella (deviazioni in cm.)

Campi in Gauss	N. 1	N. 2	N. 3	N. 4	Media		Differenza %	
					N. 1 e 3	N. 2 e 4	N. 1 e 3	N. 2 e 4
4325	3,6	3,45	3,70	3,90	3,65	3,67	2,7	12
8625	5,75	5,05	5,63	6,30	5,69	5,67	— 2,1	22
10975	6,45	5,55	6,3	7,1	6,37	6,32	— 2,35	25

Si ricava da questa tabella, o dal diagramma che la riassume:

1° che fra i due dischi solidificati nel campo esiste una differenza nell'effetto Hall assai maggiore di quella che può essere determinata dalle condizioni di raffreddamento, o da inomogeneità casuali, quale quella esistente nell'altra coppia: inoltre nella prima coppia la differenza cresce col crescere del campo mentre nella seconda le due curve s'intersecano; ciò che fa ritenere che le piccole differenze sull'effetto Hall siano dovute ad errori di osservazioni.

2° che per ciascun valore del campo, la media delle deviazioni relative ai due dischi solidificati nel campo è eguale alla media delle deviazioni relative agli altri due.

Dunque, nella lamina parallela al campo orientatore l'effetto Hall è notevolmente più intenso che nel Bi ordinario, di altrettanto è inferiore all'ordinario l'effetto Hall nella lamina normale al campo orientatore.

Dalle esperienze di Van Everdingen [1] risulta che questo comportamento è analogo a quello del Bi cristallino, quando si faccia corrispondere l'asse principale alla direzione del campo orientatore; però, come è naturale nel Bi cristallino, l'anisotropia è maggiore e cioè non già del 25 % circa, ma 230 % (per H = 4600) e 198 % per H = 2600.

Anche per queste lamine si osservò la validità del teorema di reciprocità.

[1] Arc. de Sc. Phys. et Nat. (4) 11 1901, p. 433.

Chimica. — *Sulla scomposizione dello iodolo* (1). Nota di R. Ciusa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Secondo alcune considerazioni del prof. G. Ciamician e mie è possibile l'esistenza dei complessi saturi

$$C_6\,;\quad C_4NH\,;\quad C_4S\,(^2).$$

Tali complessi debbono essere, come molecole semplici, indubbiamente assai instabili, nel senso che debbono possedere una grande tendenza a polimerizzarsi ed a dare origine alla grafite di benzolo ed ai composti $(C_4NH)_n$; $(C_4S)_n$ che potrebbero chiamarsi rispettivamente *grafite di pirrolo* e *di tiofene*. La presenza dell'azoto e dello zolfo nei carboni naturali ed artificiali potrebbe essere una prova dell'esistenza di tali grafiti.

Per la preparazione del complesso C_4NH, un metodo che *a priori* prometteva di dare buoni risultati, era quello di partire dai composti poliioduratì. È noto infatti che l'iodolo elimina facilmente iodio per riscaldamento: nelle stesse condizioni d'esperienza l'iodoformio fornisce acetilene. Non era perciò inverosimile che lo iodolo eliminando iodio desse origine al complesso saturo C_4NH.

Sulla eliminazione dello iodio dallo iodolo non furono fatte finora ricerche nè qualitative, nè quantitative: il risultato delle ricerche da me intraprese a questo scopo si può riassumere brevemente come segue.

Lo iodolo a pressione ordinaria e ridotta si scompone quasi improvvisamente a 150°, eliminando tre atomi di iodio, e lasciando un residuo insolubile negli alcali, negli acidi e nei solventi ordinarî, amorfo, contenente ancora iodio, che all'analisi dà numeri corrispondenti a quelli richiesti da un composto della formula $(C_4NHI)_{2n}$

$(C_4NHI)_{2n}$	Calcolato	N: 7,63 ;	I: 66,84
	Trovato I		» 67,24
	» II	» 7,22	» 66,76
	» III	» 7,65	

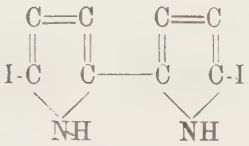
La I analisi si riferisce al residuo del riscaldamento nel vuoto dello iodolo a 150° per tre ore (iodio eliminato 50,67 %, ossia 2,28 atomi).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Universttà di Bologna.
(2) Questi Rendiconti, XXX, 1ª, 72.

La II si riferisce al residuo del riscaldamento nel vuoto a 150° per sei ore (iodio eliminato 68,02 %, ossia 3,06 atomi).

La III si riferisce al residuo del riscaldamento nel vuoto a 200° per tre ore (iodio eliminato 64,12 %, ossia 2,88 atomi).

Il composto $(C_4NHI)_{2n}$ al quale si potrebbe asseguare la formula più semplice



può essere considerato come un composto intermedio nella formazione della grafite di pirrolo: a temperatura elevata elimina ancora iodio. Mi propongo in questo anno accademico di continuare questo studio, come pure di studiare sotto lo stesso punto di vista la scomposizione del tetraiodotiofene.

Durante queste ricerche ho avuto occasione di dover purificare un vecchio campione di iodolo che si trovava nella collezione di questo laboratorio da molti anni. Sciolto in etere od in benzolo rimase indietro una polvere nera, amorfa, insolubile in tutti i solventi e contenente iodio ed ossigeno. La sostanza estratta con etere, fino a che questo passava incoloro, e sottoposta all'analisi diede numeri che corrispondono ad un composto nel quale il rapporto atomico è

$$C:(H+I):N:O=5,2:4,8:1,2:1.$$

Questo rapporto non si allontana molto da quello trovato dal prof. Angelo Angeli nelle sue magnifiche ricerche sui neri di pirrolo. Trattasi certamente di una melanina o di un miscuglio di melanine iodurate.

Chimica generale. — *Sopra l'azione dei gas finamente divisi.* Nota di Arrigo Mazzucchelli e Bianca Papocchia, presentata dal Socio E. Paternò.

Or non è molto sono comparse nei Comptes Rendus (1) due Note di C. Zenghelis su l'azione dei gas finamente divisi quali si avrebbero quando un gas, contenuto nell'interno di un tubo poroso immerso in un liquido, agisce su di esso attraverso i pori del tubo. Egli ha fatto agire a questo modo varî gas, riducenti e ossidanti, su varî liquidi e soluzioni, ottenendone effetti chimici che ritiene maggiori del consueto. Di questi alcuni erano già qualitativamente noti, come l'ossidazione così facile dell'ioduro di potassio in so-

(1) Compt. Rend., 170, (883); 171, (167).

luzione solforica diluita per opera dell'ossigeno, la riduzione dei nitrati alcalini a nitriti (già osservata da Schönbein [1]), la riduzione dell'acido iodico con ossido di carbonio. Altri invece, come la riduzione del clorato di potassio e del cloruro mercurico per opera dell'idrogeno, non erano ancora noti, mentre in una terza categoria rientrano le esperienze in cui col dispositivo dello Zenghelis la reazione prende un andamento diverso da quello già noto: e questa sarebbe l'azione dell'idrogeno sulla soluzione di anidride carbonica di cui tratteremo estesamente più oltre.

Data l'importanza dell'argomento ci è parso conveniente di sottoporre a un esame critico i principî generali e i risultati sperimentali esposti in queste Note.

Riservandoci di discutere ulteriormente il concetto teorico di gas finemente suddiviso, dal punto di vista sperimentale si può far notare che in reazioni, come le presenti, fra sostanze in diverso stato di aggregazione la grandezza dell'effetto chimico osservabile dentro un dato tempo dipende molto dal dispositivo sperimentale, in quanto ogni aumento di superficie di contatto fra le due fasi deve aumentare l'entità della reazione, e, in particolare, un tubo poroso immerso in un liquido e ripieno internamente di gas accresce certamente tale superficie per ragioni puramente geometriche e indipendentemente da qualsiasi influenza della suddivisione. Senza contare che con un simile dispositivo dove è eliminato ogni disperdimento non necessario di gas (come accade invece quando questo si fa gorgogliare in corrente continua attraverso un liquido) riesce facile prolungare per ore e giorni filati quell'azione che altrimenti è limitata in pratica dall'esaurimento dell'apparecchio generatore. E l'importanza grande di questo ultimo fattore risulta dalla stessa seconda Nota dello Zenghelis, dove egli ottiene i suoi effetti anche senza intervento di tubi porosi, ma semplicemente operando in bevute chiuse da tappi ad un solo foro per il tubo adduttore. Tutte queste considerazioni sembrano sufficienti a spiegare in termini generali il maggiore effetto chimico riscontrato dallo Zenghelis. E aggiungiamo che nel caso delle due riduzioni finora non note del clorato potassico e del cloruro mercurico abbiamo verificato la giustezza qualitativa dei risultati dello Zenghelis. Dal punto di vista quantitativo veramente la proporzione di cloruro potassico e rispettivamente di cloruro mercuroso riscontrata era inferiore a quella che lo Zenghelis indica, ma per le considerazioni sopra esposte non crediamo di dare molto peso a simili divergenze.

Maggiore importanza abbiamo data alla verifica della reazione fra idrogeno e anidride carbonica con cui, secondo lo Zenghelis, si ottiene aldeide formica e magari per polimerizzazione successiva un esoso. Ciò abbiamo fatto in vista del nesso che potrebbe stabilirsi fra queste reazioni e l'assimilazione clorofilliana.

[1] I. prakt. ch., 84, 1861, (207).

Nei nostri saggi si sono seguite le prescrizioni dello Zenghelis mantenendo in alcuni casi l'H nell'interno di un tubetto per diffusione in carta da filtro, ovvero di un cilindro di pergamena vegetale; e, in altri, facendo arrivare anidride carbonica (dal marmo) e idrogeno (dallo zinco) ambedue depurati, nell'acqua distillata contenuta in una bevuta tappata a tenuta d'aria in maniera che i due gas vi si accumulassero e potessero arrivare dai generatori a misura che venivano consumati. Da queste nostre esperienze è risultata soltanto una riduzione della CO_2 ad *acido formico*. Infatti l'aldeide formica è stata ricercata sia nel liquido sottoposto alla riduzione, sia nelle prime frazioni ottenute dalla sua distillazione: I° con la reazione di Rimini (aggiungendo alla soluzione cloridrato di fenilidrazina, nitroprussiato sodico e soda caustica): II° stratificando la soluzione alla quale si aggiunse acido gallico o resorcina sopra acido solforico puro concentrato; III° riscaldando all'ebollizione il liquido con potassa caustica e resorcina; IV° con il reattivo di Schiff (fucsina decolorata con SO_2); V° con il reattivo di Tollens (nitrato di argento ammoniacale) a *freddo;* VI° con le seguenti due reazioni microchimiche: evaporando la soluzione con ammoniaca ed aggiungendo al residuo bianco tenuissimo sciolto in una o due gocce d'acqua: *a)* una goccia di soluzione satura a freddo di cloruro mercurico (reazione di Romijn); *b)* una goccia di iodomercurato potassico e poco acido cloridrico. Tutte queste reazioni della formaldeide risultarono nettamente negative e neppure si è potuto, tirando a secco su b. m. la soluzione di CO_2 stata sottoposta all'azione dell'idrogeno, osservare la formazione di un qualsiasi residuo; mentre lo Zenghelis arguiva la formazione di un esoso dal restare un residuo sciropposo di sapore dolciastro, che scaldato a fiamma diretta imbruniva spandendo odore di caramello e che dava un precipitato colla fenilidrazina. La presenza di acido formico invece si potè constatare non solo perchè la soluzione che non riduce a freddo il reattivo di Tollens lo riduce a caldo, ma anche mediante la reazione microchimica di Haushofer: con nitrato di cerio formazione di un precipitato minutissimo del tutto simile a quello ottenuto nello stesso modo con pochi cristallini di formiato di calcio.

Non sappiamo spiegarci le ragioni per cui operando in condizioni possibilmente simili abbiamo ottenuti risultati così diversi; ma non vogliamo tralasciare di far notare che, secondo quanto si trova nella letteratura chimica, il prodotto usuale della riduzione della CO_2 con l'H è generalmente l'acido formico e solo in condizioni eccezionali la formaldeide. Così ciò fu osservato da Maly [1] facendo agire amalgama di sodio su soluzione concentrata di carbonato d'ammonio; da Lieben [2] in una serie di lavori fa-

[1] Annaleu, 135, (119).
[2] Monatsh, 16, 1895, (211).

cendo agire amalgama di sodio, potassio, bario alluminio sulle soluzioni di carbonati e di CO_2; da Ballo [1] riducendo carbonati con sodio e potassio.

Anche per riduzione elettrolitica di CO_2 in soluzione acquosa, Royer [2] ottenne soltanto acido formico, risultato che fu confermato dai lavori di Coehn e Jahn [3], di Ehrenfeld [4] e di F. Fischer e Prziza [5], i quali ultimi operavano sotto pressione in una bombola chiusa. La riduzione ulteriore dell'acido ad aldeide è invece assai più rara, essendo solo stata osservata da Fenton [6] per azione del magnesio metallico sulla sua soluzione acquosa. Questo stesso riducente può anche operare la trasformazione diretta della anidride carbonica acquosa in formaldeide.

Riduzione diretta della CO_2 ad aldeide formica per opera dell'H elementare è stata bensì operata da Berthelot [7] e poi da Löb [8], ma in circostanze affatto eccezionali e cioè per mezzo della scarica oscura con cui, come è noto, si realizzano spesso effetti chimici non ottenibili altrimenti, come è esempio classico la preparazione dell'ozono.

Mineralogia. — *Indici di rifrazione della cancrinite, della zuñyite e della orangite.* Nota della dott.ssa Matilde Albis [9], presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

È noto come la conoscenza esatta degli indici di rifrazione abbia una grande importanza pratica, potendo essere utilizzata con grande vantaggio nella determinazione dei minerali, anche quando questi si presentano in individui microscopici. Nè minore è l'interesse teorico, perchè uno studio sistematico del potere rifrangente dei minerali riuscirebbe certamente assai importante. Ancora oggi, però, per molti minerali le proprietà ottiche ed in particolare l'indice o gli indici principali di rifrazione (a seconda che si tratti di sostanze mono- o birifrangenti) non sono conosciute col grado di esattezza necessario, e, non di rado, anzi, gli indici di rifrazione non sono stati affatto determinati. Quasi sempre manchevole, poi, è la conoscenza della

(1) Ber. 1884-17-6.
(2) Compt. Rend. 70-731.
(3) Ber. 37-2836.
(4) Ber. 38-4138.
(5) Ber. 47-256 (1914).
(6) Chem. Soc. 91-1-687.
(7) Compt. Rend. 126-609.
(8) Zeitsch. Elektrochem. 11-745; 12-282.
(9) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. F. Zambonini.

dispersione: il che è tanto più da deplorarsi, se si tiene presente che gli studi sul potere rifrangente delle sostanze organiche hanno mostrato quale importanza abbia la determinazione quantitativa della dispersione dell'indice di rifrazione.

Per colmare in piccolissima parte le lacune esistenti intorno al potere rifrangente dei minerali, io ho intrapreso una serie di misure su minerali per i quali o non esistevano affatto misure, ovvero per quelle esistenti appariva desiderabile o una conferma o un completamento. Riferirò, nella presente Nota, brevemente sui risultati ottenuti per la cancrinite, la zuñyite e l'orangite.

Cancrinite. La formula bruta di questo minerale si può scrivere, prescindendo da ogni ipotesi, $R''Al_2Si_2O_8 \cdot n(RCO_3, RCl_2, RSO_4) \cdot mH_2O$ nella quale $R = Na_2 . Ca$: il potassio è sempre del tutto subordinato. Le quantità rispettive di Na_2 e di Ca variano molto: nelle cancriniti tipiche, i cloruri ed i solfati sono o completamente assenti, o presenti soltanto in traccie, mentre i primi non sono più trascurabili nella cancrinite del Monte Somma, studiata dal prof. Zambonini (1), ed i solfati, poi, diventano un costituente essenziale nella solfato-cancrinite del Colorado, descritta da Larsen e Steiger (2), la quale contiene 4,65 % di SO_3. Anche la quantità di acqua è abbastanza variabile, e si comprende, perciò, come debbano aversi oscillazioni nei valori degli indici di rifrazione.

Le determinazioni finora note sono le seguenti:

Località:	Mias	Lichtfield	Monte Somma	Beaver Creck (solfato-cancrinite)
Autore:	Osann (3)	Michel Lévy e Lacroix (4)	Zambonini	Larsen
ω	1,5244 (rosso)	1,522	1,5156 ($\lambda = 570$)	1,509
ε	1,4955 »	1,499	1,4911 »	1,500
ω-ε	0,0289	0,028 (mis. diretta)	0,0245	0,009

Come si vede, le due cancriniti tipiche di Mias e Lichtfield dànno, per la birifrangenza, sensibilmente lo stesso valore. Cesàro (5), però, crede che quelle determinazioni siano inesatte, perchè egli, in due lamine di Mias, ottenne per misura diretta 0,0222; 0,0227; 0,023. Poichè il valore di Michel-Lévy e Lacroix rappresenta pure una misura diretta, era opportuno risolvere il contrasto mediante nuove misure.

(1) *Appendice alla Mineralogia Vesuviana.* Atti della R. Accad. Scienze di Napoli 1912, XV (2ª), n. 12, pag. 31.

(2) *Sulphatic Cancrinite from Colorado.* Amer. Journ. Sc. 1916, XLII, 332.

(3) in H. Rosenbusch: *mikroskopiche Physiographie der Mineralien* 1905, pag. 114.

(4) *Les minéraux des roches*, 1888, pag. 164.

(5) Rivista di mineralogia e cristallografia italiana edita da R. Panebianco, 1917, XLVIII,, fasc. V e VI.

Io ho potuto disporre di due prismi tagliati in un unico campione di cancrinite di Mias, con lo spigolo rifrangente parallelo all'asse ottico. Per il primo, assai perfetto, ho determinato gli indici di rifrazione per varie lunghezze d'onda, corrispondenti alle linee di Fraunhofer A–F; ho impiegato, per ottenere la luce monocromatica, un monocromatore di Voigt. Per il secondo prisma mi sono limitata ai valori per la luce del sodio.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

I Prisma

Linee di Fraunhofer	Lunghezze d'onda	ω	ε	ω-ε
A	760 $\mu\mu$	1.5196	1.4975	0.0221
B	687 »	1.5205	1.4979	0.0226
C	656 »	1.5218	1.4995	0.0223
D	589 »	1.5246	1.5023	0.0223
E	527 »	1.5276	1.5056	0.0230
F	486 »	1.5309	1.5073	0.0236

II Prisma

ω	ε	ω-ε
1.5228	1.5000	0.0228

Come si vede, la birifrangenza da me trovata conferma i valori di Cesàro, e dimostra che la birifrangenza massima finora osservata nella cancrinite tipica è sensibilmente più bassa di quanto si credeva.

La dispersione è sensibilmente la stessa, sia per $\omega(\omega_F - \omega_A = 0{,}0113)$ sia per $\varepsilon(\varepsilon_F - \varepsilon_A = 0{,}0108)$. Poichè la quarta decimale non è sicura, non si può dare gran peso alle variazioni della birifrangenza che avvengono in quella decimale. Poichè, però, $(\omega - \varepsilon)_A = 0{,}022$ e $(\omega - \varepsilon)_F = 0{,}0236$, non è dubbio che la birifrangenza per la parte verde e violetta dello spettro è maggiore che non per i raggi rossi, come si verifica del resto nella maggior parte dei casi.

Costruendo, con i risultati ottenuti, le curve della dispersione per ω e ε non si nota alcuna anomalia.

Nel secondo prisma i valori di ω e di ε sono inferiori di circa due unità della terza decimale a quelli osservati nel primo, il che dimostra come possano aversi sensibili variazioni nelle proprietà ottiche anche nei cristalli non solo di uno stesso giacimento, ma di un medesimo campione.

Zuñyite. Questo interessantissimo minerale è stato scoperto da W. F. Hillebrand [1], e possiede una composizione chimica assai singolare, che Groth e Brögger hanno cercato di rendere analoga a quella dei granati,

[1] *On Zuñyite and Guitermanite, two new Minerals from Colorado.* Proc. Colorado Scient. Soc. 1884, I, 124.

scrivendola così: $[Al(OH, F, Cl)_2]_6 \cdot Al_2(SiO_4)_3$. La zuñyite è anche notevole come rappresentante in natura della classe esacistetraedrica.

Io ho determinato l'indice di rifrazione per varie luci, servendomi di un prismetto tagliato in un piccolo tetraedo, proveniente dalla località originaria, la miniera Zuñy, presso Silverton, nel Colorado. Ho ottenuto i risultati seguenti:

Linee di Fraunhofer	Lunghezze d'onda	Indice di rifrazione
B	687 μμ	1.5975
C	656 »	1.5991
D	589 »	1.6022
E	527 »	1.6048
F	486 »	1.6085
G	431 »	1.6124

Anche nella zuñyite la dispersione è regolarissima: $n_G - n_B = 0{,}0149$.

Orangite. Questa interessante varietà di torite è ben distinta dalla specie tipica per il suo colore, la sua maggior trasparenza, e, sopratutto, per il peso specifico molto più elevato (5, 2 - 5, 4, mentre nella torite non è che di 4. 4 - 4, 8). Si tratta, ad ogni modo, di un minerale che ha subìto una completa trasformazione metamittica, tanto che appare completamente amorfo, monorifrangente. Come è noto, la torite attuale e la orangite sono il prodotto di trasformazione di un minerale originario, anidro, $Th SiO_4$, isomorfo con lo zircone: l'orangite si è generalmente formata prima della torite, come risulta anche dalla sua idratazione meno progredita (1).

Le mie determinazioni sono state eseguite in un prismetto tagliato da una masserella proveniente dai giacimenti classici del Langesundfjord. Ho ottenuto i risultati seguenti:

(1) Cfr. W. C. Brögger: *die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der südnorwegischen Augit- und Nephelinsyenite.* Zeitschr für Kryst. 1890,XVI, 116.

Linee di Fraunhofer	Lunghezze d'onda	Indice di rifrazione
B	687 $\mu\mu$	1.6732
C	656 »	1.6755
$C_{50}D$	623 »	1.6789
D	589 »	1.6818
E	527 »	1.6882
F	486 »	1.6951

Anche nella orangite la dispersione è normale: $n_F - n_B = 0{,}0219$, quindi più forte che non negli altri minerali studiati.

L'indice di rifrazione dell'orangite è molto più basso di quello dello zircone, sia normale, sia a peso specifico di circa 4 [1]. Poichè zircone ed orangite formano spesso associazioni regolari, la molto diversa rifrangenza permette subito di distinguere i due minerali.

Mi permetto ora, chiudendo questa breve nota, di porgere i miei più vivi ringraziamenti al chiar.^{mo} prof. Zambonini, per l'interessamento preso durante questo mio studio e per i preziosi insegnamenti e consigli di cui mi fu prodigo.

[1] Vedasi il lavoro di S. Stevanovic: *ueber einige Kupfererze und Beiträge zur Kenntniss der Zirkongruppe.* Zeitschr. für Kryst. 1903, XXXVII, 247.

G. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 dicembre 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

Aperta la seduta coll'approvazione del verbale della seduta precedente, il Presidente VOLTERRA con commosse parole dà la triste notizia della morte del prof. ANTONIO RÒITI e comunica una lettera del figlio dell'estinto, il colonnello LUCIANO RÒITI, nella quale sono contenute le estreme volontà del defunto accademico, che vietano in modo assoluto qualunque onoranza o commemorazione. Per ottemperare a tale divieto, e tuttavia per esprimere in qualche modo il profondo cordoglio della Classe per la scomparsa del suo Socio e già Vicepresidente, il sen. VOLTERRA toglie la seduta in segno di lutto.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Memorie di cui pervennero le relazioni che ne approvano la pubblicazione negli Atti accademici:

1. BOMPIANI. « Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici » (CASTELNUOVO rel. e LEVI-CIVITA).

2. PONTREMOLI. « La doppia rifrazione accidentale meccanica nei liquidi » (LEVI-CIVITA rel. e CORBINO).

3. NEGRI. « Le colonie vegetali xerotermiche della Val di Susa e l'ipotesi lacustre, del prof. L. Buscaglioni » (MATTIROLO rel. e PIROTTA).

4. JUCCI. « Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi: i Neotenici » (SILVESTRI rel. e GRASSI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Botanica. — *Contributo alla Micologia Ipogea della Venezia Subalpina. — Osservazioni sopra due Ipogei della Cirenaica e considerazioni intorno ai generi Tirmania e Perferia.* Memorie del Socio O. MATTIROLO.

I due lavori precedenti saranno pubblicati nei volumi delle *Memorie*.

Fisica. — *Disposizione sperimentale per amplificare l'effetto foto-elettrico Hallwacs-Righi* (1). Nota del Corrisp. P. CARDANI.

Poco dopo la scoperta dell'effetto Hallwacs, il Righi trovò che una lastra metallica, e in particolar modo una lastra di zinco, investita dalle radiazioni ultra-violette, si carica positivamente e assume un potenziale di circa 2 volta, dopo di che il fenomeno si arresta (effetto Righi).

La teoria elettronica spiega in modo molto semplice questi risultati sperimentali. Sotto l'azione dei raggi ultra-violetti, le lastre metalliche emettono degli elettroni, che divengono tosto, in presenza dell'aria, ioni negativi: queste lastre dunque perdono elettricità negativa e devono per ciò manifestare una carica positiva: ma questa carica positiva, a sua volta, tende a richiamare verso il metallo i ioni negativi prodottisi: quando il numero degli elettroni emessi per l'azione dei raggi ultra-violetti diventa eguale al numero dei ioni negativi, che per l'azione della carica positiva ritornano sul metallo, si stabilisce uno stato di equilibrio e il potenziale rimane costante.

Ciò posto, il potenziale della lastra metallica avrebbe dovuto aumentare ove si fosse potuto consentire ai ioni negativi di abbandonare rapidamente le vicinanze della lastra appena formatisi: Richat e Blondlot conseguirono infatti questo risultato mandando contro la lastra una intensa corrente d'aria (1888), e l'esperienza venne confermata dal Rutherford.

Ma è chiaro che ancor meglio avrebbe dovuto conseguirsi lo scopo, stabilendo un opportuno campo elettrostatico: così, infatti, si spiegano i risultati ottenuti da M.me Baudeuf, che aveva potuto ottenere sulla lastra esposta alle radiazioni ultra-violette potenziali positivi più o meno elevati, collocando un conduttore metallico, unito col polo positivo di una pila di un sufficiente numero di elementi, in presenza della lastra illuminata mentre il polo negativo della pila era in comunicazione col suolo. Il potenziale po-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Parma.

sitivo, che assumeva la lastra illuminata, dipendeva dal numero degli elementi della pila e dalla distanza del conduttore dalla lastra. Del resto tutte le varie manifestazioni delle correnti foto-elettriche si riducono, in ultima analisi, al medesimo principio.

Ora M.me Baudeuf trovò che la lastra illuminata poteva caricarsi ad un potenziale anche superiore ai 1000 volta, creando un campo assai intenso, ed accenna ad una esperienza fatta collocando in presenza della lastra illuminata e a 5 o 4 metri di distanza un'altra lastra metallica isolata e comunicante con il polo positivo di una piccola macchina elettrostatica: ma non dà in proposito alcun dettaglio.

Non mi consta che questo metodo sia stato in seguito usato negli studî ulteriori fatti sul fenomeno Hallwacs-Righi, non ostante gli indiscutibili vantaggi che avrebbe dovuto presentare, potendosi notevolmente amplificare l'effetto medesimo.

In recenti esperienze, che sono in corso di pubblicazione nel *Nuovo Cimento*, ho avuto occasione di adoperare una disposizione che mi ha dato ottimi risultati per lo studio in genere di tutti quei fenomeni dove vi sia ionizzazione e in particolar modo nella ionizzazione prodotta dalle comuni sostanze radioattive: ho pensato quindi di applicarla a questo caso degli effetti foto-elettrici prodotti dalle radiazioni ultra-violette.

La disposizione sperimentale, molto semplice, è la seguente:

Una lastra circolare di zinco, disposta verticalmente, di 20 cm. di diametro, accuratamente isolata, è posta in comunicazione con l'ago di un elettrometro a quadranti: il sistema, così formato, può con uno dei soliti interruttori mettersi in comunicazioue col suolo.

Più in basso e davanti alla lastra di zinco, ho collocato orizzontalmente una lastra di ebanite posta sopra un disco metallico comunicante col suolo: la lastra di ebanite e l'armatura metallica sottostante costituivano così una specie di elettroforo.

Strofinata la faccia superiore dell'ebanite con lana, in modo da avere una intensa elettrizzazione, è chiaro che sul sistema, lastra di zinco-ago dell'elettrometro, dovevano manifestarsi gli ordinarî fenomeni di influenza: e poichè il sistema era comunicante col suolo, rimaneva la sola carica di nome contrario sulla lastra di zinco: nel caso presente, essendo l'ebanite carica negativamente, sulla lastra di zinco nella parte prospiciente l'ebanite si doveva avere carica positiva. Dopo pochi minuti, appena, cioè, finito il processo di penetrazione delle cariche nell'ebanite e raggiunto lo stato di equilibrio, isolando il sistema lastra di zinco-elettrometro, l'ago dell'elettrometro restava rigorosamente immobile.

Le deviazioni dell'ago erano osservate dallo spostamento di una immagine luminosa sopra una scala a 6 m. di distanza, che aveva le divisioni di 10 cm., e larga 6 m.: lo zero si trovava nel mezzo.

Facendo investire la sola lastra di zinco dalle radiazioni emesse da un arco voltaico di una lampada Zeiss, posto a circa 3 m. di distanza ed alimentato da soli 5 ampères, l'ago dell'elettrometro rimaneva ancora immobile: la qual cosa era del tutto prevedibile, in quanto la lastra di zinco, elettrizzata positivamente, doveva, con maggior ragione di quanto sopra si disse, impedire l'esodo dei ioni negativi formatisi per l'azione dei raggi ultra-violetti. Le linee di forza del campo andavano, infatti, in questo caso, dalla lastra di zinco all'ebanite; e i ioni negativi, dovendo muoversi in direzione contraria al campo, venivano a riportarsi sulla lastra di zinco.

Il contrario avrebbe invece dovuto ottenersi invertendo il campo, e, per ottenere questa inversione, bastava capovolgere la lastra di ebanite: infatti, come è noto, la faccia dell'ebanite aderente all'armatura si carica positivamente. Capovolta dunque la lastra di ebanite, la lastra di zinco si doveva per influenza caricare negativamente, le linee di forza dovevano per ciò andare dalla lastra di ebanite allo zinco, e i ioni negativi, prodotti dagli elettroni emessi sotto l'azione dei raggi ultra-violetti, avrebbero dovuto precipitarsi verso la lastra d'ebanite, consentendo così che nuovi elettroni potessero venire emessi dalla lastra metallica.

L'esperienza ha confermato le previsioni in modo superiore ad ogni mia aspettativa: appena la lastra di zinco fu investita dalle radiazioni ultraviolette, l'ago dell'elettrometro fu spinto con grande velocità fuori della scala, accusando carica positiva.

Alimentando l'arco con 18 ampères, il fenomeno diventa ancora più vistoso.

Analogo effetto ottenni con un disco di rame: anche col ferro, che si suol mettere tra i metalli debolmente foto-elettrici, in pochi secondi l'ago uscì dalla scala; e così il fenomeno si presenta con notevole sicurezza anche con quei corpi che prima lasciavano incerti sulla loro sensibilità agli effetti foto-elettrici.

La sensibilità dell'elettrometro era di circa 1 volta per ogni divisione.

L'esperienza riesce anche con un ordinario elettroscopio a foglie d'oro o di alluminio: posto esso in comunicazione con la lastra di zinco, le foglie dell'elettroscopio divergono a vista d'occhio, e in pochi secondi acquistano la massima divergenza.

Naturalmente, intercettando le radiazioni, il fenomeno immediatamente si arresta: è inutile dire che avevo preso tutte le precauzioni, affinchè tutto il resto dell'apparecchio, esclusa la faccia anteriore dello zinco, fosse protetto dalle azioni delle radiazioni.

Il modo come il fenomeno si presenta e la semplicità dei mezzi richiesti rendono la disposizione molto efficace per dimostrazioni didattiche: ma la notevole amplificazione del fenomeno, così ottenuto, mi sembra che possa esser molto vantaggiosamente applicata anche a misure molto delicate; e spero tra breve di pubblicare i risultati di alcune ricerche, delle quali mi sto occupando.

Chimica. — *Influenza di impurezze gassose sulla ricristallizzazione dell'oro e dell'argento* (1). Nota del Corrisp. N. Parravano e di P. Agostini.

Se si sottopone un metallo ad uno sforzo che lo deforma, si producono alterazioni degli edifici cristallini di cui risulta costituito, con formazione di una struttura fluidale risultante di pacchetti di lamelle metalliche spostati nella direzione in cui si effettua la deformazione. Se si opera a caldo, a mano a mano che i pacchetti di lamelle si vanno formando, essi si risaldano e ricostituiscono nuovamente cristalli equiassi per modo che nella struttura del metallo deformato a caldo non si trovano i segni della deformazione subìta.

Se invece la deformazione si compie a una temperatura sufficientemente bassa perchè la velocità di ricristallizzazione delle lamelle non sia più sufficiente ad eliminare gli effetti della deformazione progressiva, si ritrovano allora nel metallo i segni della deformazione e la durezza conseguenti. Nel caso estremo in cui la lavorazione viene effettuata a freddo, la variazione di struttura è profonda e l'aumento di durezza fortissimo; al microscopio si può arrivare a non discernere più una struttura cristallina nella massa. I metalli lavorati a freddo si dice che sono « incruditi ».

Ogni sistema ha tendenza a dissipare l'energia potenziale che può trovarsi a possedere. E i contorni dei cristalli contengono indubbiamente dell'energia accumulata: i seguaci della teoria dello stato amorfo la identificano con il calore di fusione del metallo; quelli che non ammettono l'esistenza di metallo amorfo affermano invece trattarsi di pura e semplice energia superficiale. A temperatura ordinaria, le resistenze interne si oppongono alla dissipazione di energia con formazione di un nuovo assetto cristallino; ma se si eleva la temperatura, le resistenze interne diminuiscono e il metallo tende verso il suo assetto strutturale stabile.

La ricottura perciò provoca la ricristallizzazione delle masse metalliche con conseguente soppressione dei fenomeni di incrudimento prodotti dalla lavorazione a freddo.

La ricristallizzazione dei metalli incruditi è stata oggetto di un gran numero di ricerche; e se molto si conosce sul modo in cui essa si compie, è pur vero che rimangono tuttora numerosi ed interessanti fenomeni da accertare. Fra questi abbiamo rivolto l'attenzione all'influenza che sulla ricristallizzazione possono esercitare piccole quantità di impurezze presenti nei metalli.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

Abbiamo potuto infatti trovare nella letteratura alcune indicazioni in proposito. Johnson [1] ricorda che il rame arsenicale, a differenza di quello elettrolitico, non si addolcisce a 200°, e che il nichel e l'antimonio agiscono anche essi innalzando la temperatura a cui il rame si rincuoce. Hudson [2] ha trovato, e Murray [3] e Smalley [4] hanno confermato, che la presenza dell'arsenico negli ottoni ritarda l'accrescimento dei cristalli; e d'altra parte Mathewson [5] ha stabilito che l'ossigeno ritarda la ricristallizzazione nel rame.

Molto notevole in questo senso è il fatto scoperto da Rose [6], e confermato da Phelps [7], che le piccole quantità di idrogeno che possono essere assorbite dall'oro fuso in un ambiente gassoso che ne contiene, innalzano di circa 150° la temperatura di ricottura di esso (per temperatura di ricottura Rose e Phelps intendono quella a cui il metallo diventa quasi completamente addolcito e ricristallizzato in mezz'ora).

Abbiamo voluto pertanto precisare meglio questo fenomeno ed esaminare l'influenza che sulla temperatura di ricottura dell'oro e dell'argento esercitano impurezze gassose di vario genere.

A questo scopo abbiamo preparato numerosi bottoncini di oro e di argento che abbiamo fusi e lasciati raffreddare:

a) nel vuoto,
b) in ambiente di idrogeno,
c) » » di ossigeno,
d) » » di azoto,
e) » » di anidride carbonica;

e sui campioni ottenuti si è studiato in che modo procede la ricristallizzazione.

I bottoncini di oro furono ottenuti fondendo per due volte successive rispettivamente nel vuoto, nell'idrogeno e nell'ossigeno, del metallo preventivamente fuso all'aria. Il metallo, che era servito per le esperienze nel vuoto, venne quindi impiegato per le prove con azoto fondendolo di nuovo per due volte successive in ambiente di azoto.

Per le esperienze con anidride carbonica si adoperò invece il metallo che era servito prima per le prove in ossigeno, rifondendolo, sempre due volte, in ambiente di anidride carbonica.

(1) Inst. Metals, *8*, 122 (1912).
(2) Inst. Metals, *16*, 18 (1916).
(3) Inst. Metals, *16*, 67 (1916).
(4) I. Soc. Ch. Ind., *36*, 429 (1917).
(5) Int. Zeit. Metall, *9*, 1 (1916).
(6) Inst. Metals, *9* (1912); ibid., *10* (1913).
(7) Inst. Metals, *12*, 125 (1914).

I bottoncini di argento, avendo a disposizione una maggiore quantità di metallo, furono preparati rifondendo nelle diverse condizioni il metallo precedentemente fuso all'aria.

Numerose proprietà variano col grado di incrudimento di un metallo: fra esse si presta ad una misura esatta la durezza. Per stabilire gli effetti della ricottura, ci siamo perciò serviti della durezza misurata a mezzo dello scleroscopio di Shore (1) che permette di lavorare speditamente e con campioni di metallo di spessori molto piccoli (fino a 0,6-0,7 mm.).

Le ricerche si riferiscono a metalli teneri e perciò si è adoperato lo scleroscopio con il maglietto amplificatore. Dai valori così ottenuti si potrebbe passare con una certa approssimazione ai valori di durezza Brinell; ma le relazioni di durezza Shore e durezza Brinell non sono sempre ben nette, e d'altra parte a noi non interessava stabilire valori assoluti di durezza.

I valori di durezza sono ciascuno la media di almeno 10 osservazioni. Lo scarto maggiore tra i valori ottenuti nelle 10 osservazioni non superava mai le 3 unità.

I campioni, preparati fondendo nella maniera detta i due metalli, erano in genere dei blocchetti di 7 mm. di altezza; essi venivano laminati a freddo in modo da diminuirne successivamente l'altezza e ottenere lamine dello spessore di 0,8 mm.

La ricotture vennero fatte: a 100°, 150°, 200°, 250°, 300°, 350°, 400° nel caso dell'oro, e a 100°, 110°, 120°, 130°, 150°, 200°, 300°, 400° nel caso dell'argento, in stufe ad aria riscaldata a gas o elettricamente.

L'oro adoperato nelle esperienze aveva un titolo di 998/1000 e l'argento di 999/1000. Dopo le fusioni il titolo in entrambi i casi era rimasto inalterato.

I risultati delle esperienze sono riassunti nei due diagrammi 1 e 2 dove sono riportati sulla ordinata le durezze Shore e sull'ascissa i tempi di ricottura. È evidente da essi l'azione ritardatrice che sulle velocità di ricristallizzazione dei due metalli esercitano l'idrogeno in maggiore e l'azoto in minore misura.

In entrambi i casi la curva di durezza per il metallo fuso nel vuoto (circa 1 mm. di Hg.) ha una posizione intermedia fra quelle dell'idrogeno e dell'azoto, e quella dell'anidride carbonica e dell'ossigeno. Evidentemente con la depressione usata non si riesce a liberare i due metalli dalle impurezze gassose che contengono dopo la fusione all'aria.

La fusione in atmosfera di ossigeno dà il metallo che ricristallizza a temperatura più bassa. L'ossigeno è perciò un purificatore di questi due metalli; e ciò corrisponde alla pratica, che viene seguìta in molte fonderie di

(1) L'apparecchio ci è stato messo cortesemente a disposizione dall'ing. Pavone della ditta Coe e Clerici di Milano. All'uno e all'altra esprimiamo pubblicamente le nostre più vive grazie.

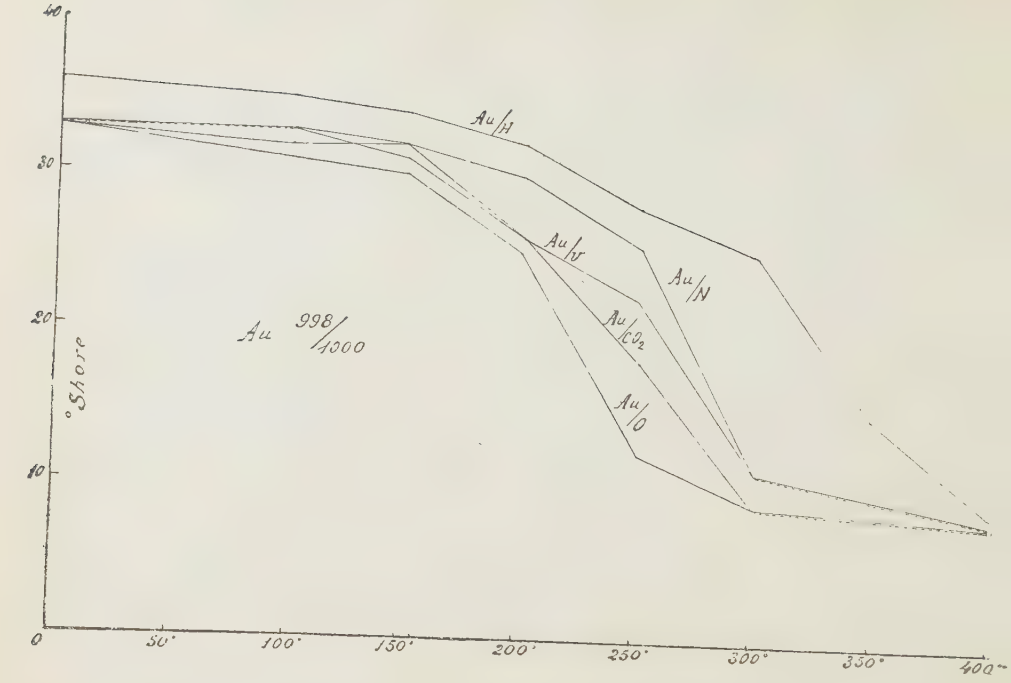

Au/H
Au/V
Au/N
Au/CO2
Au/O
Au 998/1000
° Shore
0
10
20
30
40
50°
100°
150°
200°
250°
300°
350°
400°

Fig. 1.

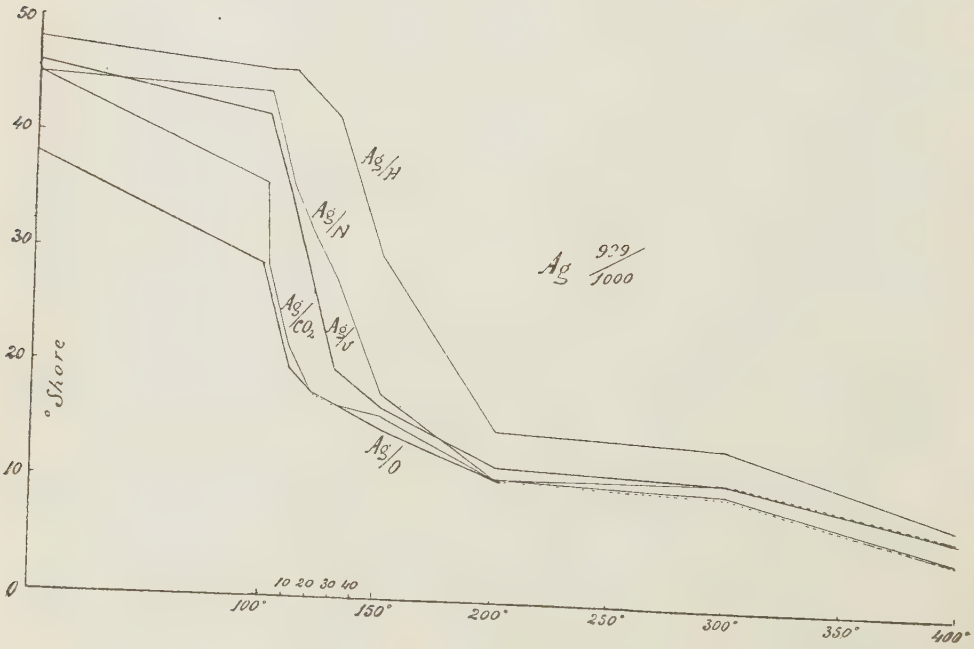

Ag/H
Ag/N
Ag/CO2
Ag/V
Ag/O
Ag 929/1000
° Shore
0
10
20
30
40
50
10 20 30 40
100°
150°
200°
250°
300°
350°
400°

Fig. 2.

argento, di aggiungere al metallo fuso prima della solidificazione un po' di salnitro.

Se la ricristallizzazione è prodotta, come molti ritengono, dalla tensione superficiale, questa notevole influenza che impurezze gassose esercitano sulla ricristallizzazione non può meravigliare, poichè, alla stessa maniera che per i liquidi, è presumibile che le impurezze producano l'abbassamento della tensione superficiale anche nei solidi.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale.* Nota I del dottor Alberto Mario Bedarida, presentata dal Corrisp. Guido Fubini.

1. — Sia D un numero intero razionale e consideriamo le forme aritmetiche, binarie, quadratiche di Dirichlet:

$$(1) \qquad f \equiv (a, b, c) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

appartenenti al corpo $K(\sqrt{-1})$, o campo di Gauss, a determinante $b^2 - ac = D$.

Indichiamo con $p_1, p_2, \ldots, p_r$ i fattori razionali, primi, dispari, diversi di D, per i quali sia $p_i \equiv 3 \pmod 4$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, quindi primi anche nel corpo $K(\sqrt{-1})$ ed invece con $q_1, q_2, \ldots q_s$ i suoi fattori razionali, primi, dispari, diversi, per i quali sia $q_j \equiv 1 \pmod 4$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$, quindi scindibili, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, in due fattori primi coniugati $q_j = \pi_j \pi_{j_0}$; e poniamo $\pi_j = \pi'_j + i\pi''_j$ ed inoltre $r + s = n$.

Osserviamo che, nel seguito, le forme che considereremo saranno sempre del tipo delle (1) ed inoltre, primitive di prima specie, cioè a, b, c ed a, $2b$, c, saranno due terne di numeri primi tra di loro, nel corpo $K(\sqrt{-1})$; e ciò sarà inteso tacitamente.

Consideriamo ora i generi definiti dalle seguenti relazioni [1].

$$(2) \qquad \left[\frac{f}{p_1}\right] = +1, \left[\frac{f}{p_2}\right] = +1, \ldots, \left[\frac{f}{p_r}\right] = +1,$$

$$\left[\frac{f}{\pi_1}\right]\left[\frac{f}{\pi_{1_0}}\right] = +1, \left[\frac{f}{\pi_2}\right]\left[\frac{f}{\pi_{2_0}}\right] = +1, \ldots, \left[\frac{f}{\pi_s}\right]\left[\frac{f}{\pi_{s_0}}\right] = +1,$$

$$\alpha = (-1)^{1/4(f_1^2 + f_2^2 - 1)} = +1, \quad \beta = (-1)^{1/8[(f_1 + f_2)^2 - 1]} = +1,$$

$$\gamma = (-1)^{f_2} = +1;$$

[1] Per la teoria dei generi delle forme di Dirichlet, cfr. la mia Nota: *Il genere nelle forme aritmetiche di Dirichlet, secondo un teorema di Eisenstein.* Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. LIV, fasc. VI-X (1921).

ove con f_1 ed f_2 indichiamo rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario della forma f. Notiamo esplicitamente che i caratteri α, β e γ potranno anche non comparire tutti e tre, ma almeno uno, e ciò può venire precisato facilmente ricorrendo alla tabella inserita a pagina 212 della mia Nota ora citata, e tenendo presente che il determinante è razionale.

I generi definiti dalle (2) si diranno, con Hilbert, *generi della specie principale*. Il loro numero è, manifestamente, 2^s.

Scopo del presente lavoro è di determinare, basandoci *unicamente* sopra la teoria delle forme aritmetiche, le diverse categorie di classi di forme [1] aritmetiche di Dirichlet, determinanti D, appartenenti ai generi della specie principale [2].

2. — Introduciamo le seguenti definizioni: diremo *classe razionale*, una classe di forme aritmetiche di Dirichlet, a determinante D, quando contiene una, e quindi infinite forme a coefficienti interi, razionali; *classe complessa*, nel caso opposto.

La classe principale, contenendo la forma $(1, 0, -D)$, è razionale. Manifestamente le classi razionali costituiscono un sotto-gruppo del gruppo di composizione [3] delle classi di forme di Dirichlet considerate. Segue: *il numero delle classi razionali è sempre un divisore del numero totale delle classi.*

Consideriamo una classe razionale e sia m un intero razionale, rappresentato (propriamente o no) dalle sue forme e primo con $2D$. Per note relazioni tra il simbolo di Dirichlet e quello di Legendre [4], nel corpo $K(\sqrt{-1})$, abbiamo:

$$\left[\frac{m}{p_i}\right] = \left(\frac{m^2}{p_i}\right) = +1 \ (i = 1, 2, \ldots, r); \left[\frac{m}{\pi_j}\right] = \left(\frac{m\,\pi'_j}{q_j}\right), \left[\frac{m}{\pi_{j_0}}\right] = \left(\frac{m\,\pi'_j}{q_j}\right)$$

quindi

$$\left[\frac{m}{\pi_j}\right]\left[\frac{m}{\pi_{j_0}}\right] = -1 \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

[1] L'equivalenza da noi considerata è l'equivalenza propria, quella cioè rispetto al gruppo delle sostituzioni aritmetiche $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ove $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

[2] Hilbert, nella sua Memoria: *Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper*. Math. Ann. 45 Bd., ha notato (§ 9 seg.) degli speciali corpi di Dirichlet, in cui certe classi di ideali appartengono a determinati generi, che chiamò appunto generi della specie principale. Agli ideali di questi corpi speciali di Dirichlet corrispondono le forme di Dirichlet, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante intero razionale che noi consideriamo in questo lavoro.

[3] Sulla composizione delle forme di Dirichlet, cfr. Bianchi: *Sulle forme a coefficienti ed indeterminate complesse*. Atti Acc. Lincei, serie 4ª, vol. V, fasc. 8, pag. 589.

[4] Cfr. Dirichlet: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*. Crelle's Journal, 24 Bd.

ed inoltre è, manifestamente: $\alpha = +1$, $\beta = +1$, $\gamma = +1$ ben inteso, tenendo presente quanto si è detto intorno a questi ultimi tre caratteri. Si ha dunque: *le classi razionali appartengono ai generi della specie principale.* Con questo, abbiamo una prima categoria di classe di forme di Dirichlet, appartenenti ai detti generi.

Segue da quanto ora si è detto: *una classe di forme aritmetiche, a determinante* D , *per la quale, tra i caratteri* $\left[\frac{f}{p_i}\right]$, *ove* p_i *è un fattore primo, dispari, razionale e* $\equiv 3$ *(mod. 4) di* D , *e di caratteri* α , β e γ *(od alcuni di essi), almeno uno sia* -1 , *è una classe complessa.*

Da quest'ultima considerazione risulta l'esistenza, in generale, delle classi complesse e così pure l'esistenza di generi contenenti esclusivamente classi complesse.

È facile vedere che: *il numero delle classi razionali è sempre un divisore del numero delle classi complesse.*

Consideriamo le classi di forme aritmetiche di Dirichlet a determinante D (primitive di prima specie) che contengono una, e quindi infinite, forme del tipo (a , ib , c) ove a , b , c sono interi razionali, tali che $-b^2 - ac = D$.

Tali classi saranno denominate: *classi del tipo* P . Esistono classi del tipo P , razionali . (Ad esempio quelle contenenti forme del tipo (a , o , c), ove a e c sono interi razionali tali che $-ac = D$) . Inoltre, notiamo che *esistono classi del tipo* P , *complesse.* Infatti, considerata una forma (a , b , c) a coefficienti interi, razionali, a determinante $-D$, primitiva di prima specie, appartenente ad una classe non ancipite [1], la forma $(a , ib , -c)$ apparterrà ad una classe P_1 di forme del tipo P , a determinante D , non ancipite, manifestamente, e quindi complessa, perchè se fosse razionale la classe P_1 coinciderebbe con la classe coniugata [2] $P_{1_0} = P_1^{-1}$, cioè P sarebbe ancipite, il che non può essere.

Si ha ora: *le classi complesse del tipo* P , *appartengono ai generi della specie principale.* Invero ciò è evidente quando si pensi che le forme di tali classi rappresentano dei numeri interi, razionali e primi con 2D .

Abbiamo quindi una seconda categoria di classi di forme aritmetiche di Dirichlet, appartenenti ai generi suddetti.

Notiamo che la totalità delle classi del tipo P , a determinante D , costituiscono, come le classi razionali, un sotto gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, considerate e quindi: *il numero delle classi del tipo* P , *è sempre un divisore del numero totale delle classi.*

(1) Una classe di forme (primitive di prima specie) si dice ancipite od ambigua, quando composta con sè stessa offre la classe principale.

(2) Cfr. N° seguente.

Componiamo ora una classe razionale, non del tipo P, con una classe complessa del tipo P, si ottiene una classe che, per quanto si è esposto, non è razionale e non è del tipo P. *Le classi così ottenute appartengono ai generi della specie principale*, poichè appartengono al genere composto di due generi dalle specie principale, che è ancora un tale genere.

Si ha quindi, in queste classi, una terza categoria di classi appartenenti ai generi in considerazione.

Noi ci proponiamo ora di dimostrare che non esistono altre categorie di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi della specie principale. Per questo è necessario premettere due lemma, che esamineremo nel numero seguente.

Matematica. — *Sul teorema di reciprocità delle funzioni di Green.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In uno dei miei primi lavori (1) dimostrai, per le varie funzioni di Green d'ordine m, un teorema di reciprocità, analogo a quello ben noto sulla ordinaria funzione di Green, e poco dopo trovai l'interpretazione fisica (2) del teorema di reciprocità sulla funzione di Green di ordine 2.

In seguito ritornai sull'argomento (3) per stabilire altre proprietà di tali funzioni.

Tale teorema di reciprocità si rivelò assai utile nella risoluzione del problema delle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate (4).

In questo breve scritto espongo una nuova dimostrazione, semplicissima, del citato teorema di reciprocità, valendomi di considerazioni analoghe a quelle che ho fatto in altra occasione (5), per stabilire la trasformazione delle funzioni poliarmoniche, mediante un'inversione per raggi vettori reciproci.

1. Sia τ lo spazio limitato da una superficie chiusa σ, e consideriamo

(1) T. Boggio: *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque* (Atti R. Accademia Scienze di Torino; vol. XXXV, a. 1900). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_1.

(2) T. Boggio: *Sull'equilibrio delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti, serie 5ª, vol. X, 1° semestre 1901).

(3) T. Boggio: *Sulle funzioni di Green d'ordine m* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XX, a. 1905). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_2.

(4) G. Lauricella: *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti; serie 5ª, vol. XVII, 2° sem. 1908).

(5) T. Boggio: *Sopra una trasformazione delle funzioni poliarmoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; tomo LXVIII, a. 1909).

una funzione U , m-armonica in τ , cioè regolare in τ e che soddisfa ivi all'equazione indefinita

$$\Delta^m U = 0 \ , \ \left(\Delta = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

È facile mostrare che *tale funzione si può esprimere come somma di funzioni potenziali* (d'ordine superiore e poliarmoniche) di strati semplici e doppi, distribuiti, con opportuna densità, sulla superficie σ .

Per semplicità, supporremo m pari.

Per questo, ricordiamo anzitutto la formula (B_1 § 3 , B_2 § 2):

$$(1) \qquad a\,U(P) = \sum_0^{m-1} i \int_\sigma (\Delta^i U \,.\, D\Delta^{m-i-1}\gamma^\nu - \Delta^{m-i-1}\gamma^\nu \,.\, D\Delta^i U)\,d\sigma ,$$

ove, per brevità, si è posto

$$a = 4\pi(2m-2)! \ , \ \nu = 2m-3 ,$$

ed r indica la distanza del punto generico P di τ da un punto variabile, e Df indica la derivata secondo la normale interna della funzione generica f .

Diciamo poi U′ la funzione m-armonica nello spazio indefinito τ' esterno alla superficie σ , che si comporta all'infinito come una funzione potenziale m-armonica, e che su σ soddisfa alle condizioni seguenti, ove $\mu = m/2$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta^i U' = \Delta^i U , \\ D\Delta^i U' = D\Delta^i U , \end{cases} \qquad (i = 0 , 1 , 2 , \dots , \mu - 1);$$

applicando alle funzioni U′ ed r^ν , che sono m-armoniche nello spazio τ' , una nota formula (B_1 § 3 , B_2 § 2), si ottiene

$$0 = \sum_0^{m-1} i \int_\sigma (\Delta^i U' \,.\, D\Delta^{m-i-1}\gamma^\nu - \Delta^{m-i-1}\gamma^\nu \,.\, D\Delta^i U')\,d\sigma ;$$

sottraendo dalla (1) e ricordando le (2), risulta

$$a\,U(P) = \sum_\mu^{m-1} i \int_\sigma [\Delta^i(U - U') \,.\, D\Delta^{m-i-1}\gamma^\nu - \Delta^{m-i-1}\gamma^\nu \,.\, D\Delta^i(U - U')]\,d\sigma ,$$

che può scriversi sotto la forma

$$(3) \qquad a\,U(P) = \sum_0^n i \int_\sigma (h_i\, D\Delta^i\gamma^\nu - \Delta^i\gamma^\nu \,.\, Dh_i)\,d\sigma \ , \ (n = \mu - 1) ,$$

la quale dimostra la proprietà enunciata.

2. Consideriamo ora la funzione Γ , m-armonica in τ , e che nei punti M di σ soddisfa alle condizioni ai limiti:

$$(4) \qquad D^i \Gamma = D^i(MQ)^\nu \ , \ (i = 0 , 1 , 2 , \dots , m - 1) ,$$

MQ essendo la distanza del punto Q (polo), che si riguarda come fisso in τ, dal punto variabile M.

Questa funzione Γ dicesi *funzione preliminare di Green d'ordine m e di 1ª specie*, mentre la funzione $G = (MQ)^\nu - \Gamma$ si dice *funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie*. La funzione Γ dipende dai punti M e Q e perciò possiamo indicare con $\Gamma(M, Q)$ il valore in M della funzione Γ avente per polo Q.

È facile vedere (B_1 § 2, B_2 § 3) che le (4) possono essere sostituite dalle seguenti (supposto m pari, come nel n. 1, ed $n = m/2 - 1$):

$$(4') \qquad \begin{cases} \Delta^i \Gamma(M, Q) = \Delta^i (MQ)^\nu, \\ D\Delta^i \Gamma(M, Q) = D\Delta^i (MQ)^\nu \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2 \dots, n).$$

Ciò premesso, se P è un altro punto qualunque di τ, calcoliamo il valore $\Gamma(P, Q)$ nel punto P, della funzione Γ avente per polo Q; basta applicare la (3), da cui si trae

$$(5) \quad a\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma \{ h_i(Q, M) D_M \Delta^i (MP)^\nu - \Delta^i (MP)^\nu \cdot D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M,$$

ove M è un punto variabile su σ, D_M indica la derivata normale interna a σ in M, e $d\sigma_M$ è l'elemento d'area attiguo ad M.

Applicando le (4'), si può pure scrivere

$$a\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma \{ h_i(Q, M) D_M \Delta^i \Gamma(M, P) - \Delta^i \Gamma(M, P) \cdot D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M;$$

ma, con una formula analoga alla (5), si ha

$$a\Gamma(M, P) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma \{ h_j(P, N) D_N \Delta^j (NM)^\nu - \Delta^j (NM)^\nu \cdot D_N h_j(P, N) \} \, d\sigma_N,$$

perciò, sostituendo,

$$a^2\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_j \int_\sigma \int_\sigma \{ h_i(Q, M) \, h_j(P, N) \, D_M D_N \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu -$$
$$- h_i(Q, M) \, D_M \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu \cdot D_N h_j(P, N) - h_j(P, N) D_N \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu \cdot D_M h_i(Q, M) +$$
$$+ \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu \cdot D_N h_j(P, N) \cdot D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M \, d\sigma_N.$$

Ora è chiaro che il secondo membro non muta scambiando fra loro i punti P, Q; perciò si conclude: $\Gamma(P, Q) = \Gamma(Q, P)$, ciò che dimostra il teorema di reciprocità.

La stessa dimostrazione si applica se m è dispari, ovvero se τ è lo spazio indefinito esterno a σ, come pure se si considerano le funzioni di Green delle varie specie (B_1 § 6, B_2 § 4), anche nel caso di quante si vogliano variabili.

Matematica. — *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI.

Dans une Note récente (1), j'ai démontré l'énoncé suivant: *les plans osculateurs des trois courbes de Segre* (c'est-à-dire des courbes conjuguées aux lignes d'osculation quadrique de Darboux) *qui passent par un point* P *d'une surface quelconque ont une droite commune*, soit τ. Il s'ensuit que les surfaces L ici considérées ont la propriété caractéristiques que *toutes les droites* τ *passent par un point fixe* O. Les surfaces L sont isothermo-asymptotiques (2), de sorte que l'on peut les définir par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial v} + fy = 0 \ , \ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial u} + gy = 0 \ . \tag{1}$$

Ceci étant, les conditions nécessaires et suffisantes pour une surface L sont

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \ , \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \ , \tag{2}$$

$$f = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \ , \ g = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \ . \tag{3}$$

Soient a_0 , a_1 , a_2 , α des constantes telles que

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0 \ , \tag{4}$$

et posons

$$x_0 = u + v + a_0 \ , \ x_1 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v + a_1 \ , \ x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v + a_2 \ , \tag{5}$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \ .$$

La solution *générale* des équations (2) est

$$\varphi = -\frac{1}{3}(\zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2) \ , \tag{L_1}$$

(1) Rozpravy české Akademie, Praga, 30e année, 1921, n. 23.

(2) M. Fubini appelle ainsi les surfaces pour lesquelles les lignes de Darboux sont définies par une équation du type $du^3 + dv^3 = 0$.

les périodes de la fonction elliptique ζ étant quelconques. Toutefois, il y a des solutions qui échappent à la représentation (L_1):

$$(L_2) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3}(\operatorname{cotg}\alpha x_0 + \operatorname{cotg}\alpha x_1 + \operatorname{cotg}\alpha x_2),$$

$$(L_3) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right),$$

$$(L_4) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3}\operatorname{cotg}\alpha x_i \qquad (i = 0\ 1, 2),$$

$$(L_5) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\frac{1}{x_i} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

$$(L_6) \qquad \varphi = \text{costante}.$$

On peut distinguer bien nettement les six possibilités. *Les plans des courbes de Segre enveloppent* toujours *un cône algébrique* Γ *de la* 3^{me} *classe* et, suivant le cas,

(L_1) Γ est de genre *un*,

(L_2) Γ a un plan tangent double,

(L_3) Γ a un plan tangent stationnaire,

(L_4) et (L_5) Γ se décompose en un cône quadrique Γ_1 et en un faisceau dont l'axe, dans le cas (L_5), appartient a Γ_1.

(L_6) Γ se décompose en trois faisceaux.

Ce résultat permet de trouver les équations d'une surface L en termes finis. Pour cela, je renvoie à un mémoire qui paraîtra prochainement dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno.

Matematica. — *Sopra certe equazioni integrali considerate dal prof. Tedone.* Nota del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

1. Il prof. Tedone, dalla formula che si ottiene applicando il metodo di integrazione di Riemann all'equazione di Eulero e di Poisson con invarianti eguali, e particolarizzando opportunamente la forma del contorno e i dati su di esso, ha trovato che l'equazione integrale

$$(1) \qquad \int_1^x f_1(\xi)\, F\left[-\lambda, \lambda+1, 1, -\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right] d\xi = f(x),$$

con $f(1) = 0$, è risoluta dalla formula

$$(2) \quad f_1(x) = f'(x) + \int_1^x f_1(\xi)\, F'\left[-\lambda, \lambda+1, 1, -\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right]\frac{d\xi}{2\xi}. \ (1)$$

(1) Ved. O. Tedone, questi Rendiconti, seduta 2 maggio 1920.

Nella (1) F è il solito simbolo di una funzione ipergeometrica costruita con i parametri $-\lambda, \lambda+1$ ed 1, mentre F', nella (2), è la derivata di questa funzione rispetto al quarto parametro. Posto, per brevità,

$$F_1[\sigma] = F[-\lambda, \lambda+1, 1, \sigma],$$

per la coesistenza delle (1) e (2) è necessario e sufficiente che sia verificata la relazione

$$(3)\quad \int_{\xi}^{\xi_0} F_1\left[-\frac{(t-\xi_0)^2}{4t\,\xi_0}\right] F'_1\left[-\frac{(t-\xi)^2}{4t\,\xi}\right]\frac{dt}{2t} = \xi\,\frac{\partial}{\partial\xi} F_1\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\xi\,\xi_0}\right].$$

In questa Nota ci proponiamo principalmente di dare una dimostrazione diretta della (3).

Anzitutto, posto $x_0 = \frac{\xi_0}{\xi}$, $x = \frac{t}{\xi}$, alla (3) si può dare la forma

$$(4)\quad \int_1^{x_0} F_1\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4x\,x_0}\right] F'_1\left[-\frac{(1-x)^2}{4x}\right]\frac{dx}{2x} = \\ = -\,x_0\,\frac{d}{dx_0} F_1\left[-\frac{(1-x_0)^2}{4\,x_0}\right].$$

Ricordiamo poi che $F_1[\sigma]$ soddisfa all'equazione differenziale

$$(5)\quad \sigma(1-\sigma)F''_1[\sigma] + (1-2\sigma)F'_1[\sigma] + \lambda(\lambda+1)F_1[\sigma] = 0,$$

e che, posto $\sigma = -\frac{(x-x_0)^2}{4x\,x_0}$, abbiamo facilmente

$$(1-2\sigma)F'_1[\sigma] = -2x\,\frac{x^2+x_0^2}{x^2-x_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma],$$

$$\sigma(1-\sigma)F''_1[\sigma] = -x^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1[\sigma] + 2x\,\frac{x_0^2}{x^2-x_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma];$$

per cui la (5) si può scrivere

$$(6)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1[\sigma] + 2\,\frac{x}{x^2-x_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} F_1[\sigma] = 0.$$

Notiamo inoltre, che, facendo $x_0 = 1$, e ponendo $\tau = -\frac{(1-x)^2}{4x}$, si avrà, dalla (6),

$$(7)\quad \frac{d^2}{dx^2} F_1[\tau] + 2\,\frac{x}{x^2-1}\,\frac{d}{dx} F_1[\tau] - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} F_1[\tau] = 0.$$

Dalle (6) e (7) deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-x_0^2)\left\{F_1[\tau]\,\frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] - F_1[\sigma]\,\frac{d}{dx} F_1[\tau]\right\} + \frac{1-x_0^2}{2x} F_1[\sigma] F'_1[\tau] = 0,$$

e di qui, moltiplicando per dx, e integrando, tra i limiti 1 e x_0, risulta

$$\int_1^{x_0} F_1[\sigma] F_1'[\tau] \frac{dx}{2x} = \left\{ F_1[\tau] \frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] - F_1[\sigma] \frac{d}{d\tau} F_1[\tau] \right\}_{x=1}.$$

E poichè, per $x = 1$, poi

$$\frac{d}{dx} F_1[\tau] = 0, \frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] = -x_0 \frac{d}{dx_0} F_1\left[-\frac{(1-x_0)^2}{4x\,x_0} \right],$$

segue, senz'altro, la (4).

2. In modo analogo al precedente si può dimostrare la formula

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_0 - x)\, I_0(x_1 - x)}{x_0 - x}\, dx = I_1(x_1 - x_0), \tag{8}$$

dimostrata anche per altra via dal prof. Tedone, che da essa ha dedotto la soluzione della equazione

$$\int_0^{x_0} I_0(x_0 - x)\, \varphi(x) dx = \Phi(x_0) - \Phi(0), \tag{9}$$

sotto la forma

$$\varphi(x_0) = \Phi'(x_0) - \int_0^{x_0} [\Phi(x) - \Phi(0)] \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x}\, dx, \tag{10}$$

e, quindi, di altre numerose equazioni integrali analoghe [1].

Nelle (8), (9) e (10), è

$$I_0(z) = \sum_0^\infty{}^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

e $I_1(z) = I_0'(z)$.

Posto, nella (8), $x_1 - x_0 = \xi_0$, $x_1 - x = \xi$, risulta

$$\int_0^{\xi_0} I_0(\xi) \frac{I_1(\xi_0 - \xi)}{\xi_0 - \xi}\, d\xi = I_1(\xi_0). \tag{11}$$

Per dimostrare la (11) basta notare che

$$\xi\, I_0''(\xi) + I_0'(\xi) - \xi\, I_0(\xi) = 0, \tag{12}$$

e che, similmente,

$$(\xi_0 - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} I_0(\xi_0 - \xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\xi_0 - \xi) - (\xi_0 - \xi)\, I_0(\xi_0 - \xi) = 0. \tag{13}$$

Dalle (12) e (13) segue

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \left\{ I_0(\xi_0 - \xi)\, I_0'(\xi) - I_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\xi_0 - \xi) \right\} - \xi_0\, I_0(\xi) \frac{I_1(\xi_0 - \xi)}{\xi_0 - \xi} = 0;$$

e quindi, moltiplicando per $d\xi$, e integrando, tra i limiti 0 e ξ_0, otteniamo subito la (11).

[1] Questi Rendiconti, sedute 31 maggio 1913, 5 aprile 1914 e 21 marzo 1915.

Matematica. — *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto.* Nota di Francesco Tricomi, presentata dal Corrisp. Francesco Severi (1).

I tre tipi tradizionali di equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine in due variabili indipendenti: *ellittico, iperbolico* e *parabolico*, sono ben lungi dall'esaurire la classe di siffatte equazioni. Invero la determinazione del tipo dipende dal segno di una certa espressione formata coi coefficienti dell'equazione, espressione che, essendo funzione delle variabili indipendenti, in generale non conserverà lo stesso segno in tutto il piano x, y. Sempre che ciò accada, noi diremo che l'equazione è di *tipo misto*.

Lo studio di queste equazioni di tipo misto, per quanto sia a mia conoscenza, è stato finora completamente trascurato. Io ho voluto occuparmene pervenendo, con l'ausilio di quel possente strumento analitico costituito dalle equazioni integrali, ai risultati che mi accingo ad esporre per sommi capi qui appresso, riservando le dimostrazioni e tutti gli altri sviluppi ad una Memoria che sarà pubblicata appena possibile.

Un primo problema che mi si è presentato è stato quello della riduzione di un'equazione di tipo misto ad una forma da assumersi come canonica. Ho trovato che, con delle sostituzioni di variabili *reali*, è sempre possibile porre l'equazione sotto la forma

$$(1) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)\,z + d(x,y) = 0.$$

Nella (1) la curva che separa le regioni in cui l'equazione è di tipi diversi (curva *parabolica*) è l'asse x, al disopra del quale (semipiano $y > 0$) l'equazione è di tipo ellittico, cioè ha le sue *caratteristiche* immaginarie, mentre al disotto del medesimo (semipiano $y < 0$) è di tipo iperbolico e le sue caratteristiche, reali, son rappresentate dall'equazione

$$(2) \qquad x = C \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (C \text{ costante arbitraria}).$$

Procedendo oltre, ho limitato le mie considerazioni all'equazione

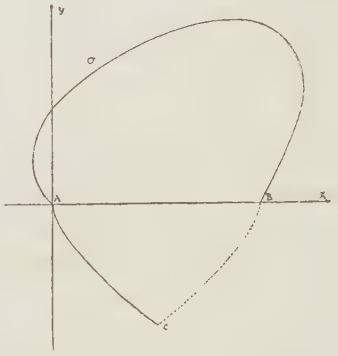
$$(E) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

che si ottiene uguagliando a zero la parte di 2° ordine della (1); così fa-

(1) Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

cendo son venuto ad imitare il processo di sviluppo storico, p. es. della teoria delle equazioni di tipo ellittico, che per un primo e non breve periodo si limitò soltanto alla più semplice di esse: l'equazione di Laplace $\Delta_2 z = 0$. Per l'equazione (E) mi è stato possibile risolvere il problema fondamentale della teoria delle equazioni a derivate parziali considerate dal punto di vista delle funzioni di variabili reali, e cioè quello di trovare le *condizioni al contorno* atte a determinare univocamente una soluzione particolare in un certo campo. Naturalmente si tratterà di un campo attraversato dalla curva parabolica, altrimenti il problema riguarderebbe solo apparentemente le equazioni di tipo misto.

Propriamente, servendomi del fatto che la (E) è una trasformata di una particolare equazione di Eulero-Poisson [1], ho cominciato col cercare di stabilire una relazione che legasse i valori $\tau(x)$ che una qualsiasi soluzione regolare [2] z della (E) riceve sul segmento AB staccato sull'asse x dalle due caratteristiche uscenti da un punto qualunque C del semipiano iperbolico, con quelli, $\varphi(x)$, che la medesima soluzione riceve sul pezzo di caratteristica AC, e coi valori $\nu(x)$ che $\partial z/\partial y$ riceve su AB. Supponendo per semplicità che le ascisse di A e B siano rispettivamente 0 ed 1, ho così trovato l'equazione



$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^\infty (x-y)^{-\frac{1}{3}} \nu(y)\, dy \tag{3}$$

dove $\varphi_1(x)$ è una funzione che si calcola facilmente nota che sia $\varphi(x)$, e γ è un coefficiente numerico.

Stabilita la (3), si perviene agevolmente al seguente TEOREMA DI UNICITÀ:

Non può esistere più di una soluzione regolare della (E) *assumente valori arbitrariamente fissati sul pezzo di caratteristica* AC *e su di una curva qualsiasi* σ *congiungente* A *con* B *senza uscire dal semipiano ellittico.*

Successivamente, nell'intento di giungere all'inversione di questo teorema, cioè a *dimostrare l'esistenza della soluzione di cui esso assicura l'unicità,* ho considerato anzitutto il caso preliminare che i valori di z siano assegnati sul contorno chiuso costituito dalla curva σ e dal segmento AB,

[1] Ved. G. Darboux, *Leçons sur la théorie gén. des surfaces etc.*, 2e éd. (Paris, Gauthier-Villars, 1914-15), t. II, pag. 54 e seg.

[2] Cioè finita e continua assieme alle sue derivate prime.

cominciando col dimostrare il teorema di esistenza nell'ipotesi che la curva σ sia una *curva normale*, cioè sia rappresentabile con una equazione del tipo

$$(4) \qquad (x - C)^2 + \frac{4}{9} y^3 = R^2 \qquad (C, R \text{ costanti}).$$

Indi, con un procedimento *alternato*, ho generalizzato il risultato ottenuto, continuando a supporre soltanto che la curva σ termini verso gli estremi A e B con due archetti, sia pur piccolissimi, della curva normale $\mathbf{c}$ che passa per A e B, e che, per la restante parte, non penetri mai nell'interno di $\mathbf{c}$.

Questi risultati permettono agevolmente di riconoscere che il teorema di esistenza generale potrà considerarsi acquisito, sotto le restrizioni accennate, ove si riesca a dimostrare che è possibile calcolare effettivamente, tenendo conto delle imposte condizioni al contorno, i valori $\tau(x)$ che la soluzione z della (E) di cui occorre provare l'esistenza assume su AB. A questo scopo non può certo bastare la sola (3), figurando in quest'equazione anche la funzione $\nu(x)$ che è incognita al pari di $\tau(x)$. Dovremo dunque cercare di associare alla (3) un'altra equazione fra $\tau(x)$ e $\nu(x)$, da ricavarsi tenendo conto della circostanza che z assume sulla curva σ certi valori dati $f(\sigma)$.

Per ottenere questa seconda equazione, l'idea più naturale sarebbe quella di servirsi del metodo di Green. Però, nel caso in esame, questa via non conduce al risultato desiderato e bisogna invece ricorrere alla formula

$$(5) \qquad \tau(x) - \gamma \int_0^1 W^*(x, y)\, \tau(y)\, dy =$$

$$= f_1(x) - \gamma \int_0^1 \left[|x - y|^{-\frac{1}{3}} - (x + y - 2xy)^{-\frac{1}{3}} \right] \nu(y)\, dy,$$

dove $W^*(x, y)$ è una funzione dipendente solo dalla forma di σ ed $f_1(x)$ una funzione dipendente anche da $f(\sigma)$; formula in certo modo analoga a quella di Green. La (5) sarà valida senza eccezioni per $0 \leq x \leq 1$ e le funzioni W^* ed f_1 si conserveranno sempre regolari nel medesimo intervallo, purchè siano soddisfatte certe condizioni sufficienti, fra cui la prima di quelle incontrate poco innanzi circa la forma di σ.

Noi supporremo senz'altro verificate queste condizioni. Allora la (5), riguardata come una equazione integrale di Fredholm, 2ª specie, in $\tau(x)$, sarà risolubile rispetto a questa funzione, permettendo, così di ricavarne il valore che, sostituito nella (3), dà luogo all'equazione unica in $\nu(x)$

$$(6) \qquad \int_0^x (x - y)^{-\frac{1}{3}} \nu(y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[L(x, y) - |x - y|^{-\frac{1}{3}} + (x + y - 2xy)^{-\frac{1}{3}} \right] \nu(y)\, dy + \psi(x),$$

dove $L(x, y)$ è una funzione dipendente solo dalla forma di σ, mentre $\psi(x)$ non dipende che dalle funzioni $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$. A questo punto tutto è ridotto a far vedere che è possibile risolvere quest'equazione.

La (6) è un'equazione integrale *di tipo misto* e *di prima specie* [1], alla quale però non è applicabile il metodo di riduzione ad equazione di Fredholm, 2ª specie, indicato dall'Andreoli (loc. cit.). Invece si riesce allo scopo servendosi della formula di Abel e giovandosi inoltre del concetto di *valor principale* di un integrale improprio, secondo Cauchy [2]. Precisamente in questo modo, supposte esistenti e finite le derivate della funzione $\varphi(x)$, si riesce a trovare l'espressione esplicita di $v(x)$ per mezzo di un'altra funzione $\chi(x)$, la quale soddisfa ad una certa equazione integrale regolare di Fredholm, 2ª specie, che si vede facilmente esser sempre risolubile.

Trovata così $v(x)$ la (3) fornisce senz'altro $\tau(x)$.

Matematica. — *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali.* Nota di G. Vitali, presentata dal Corrispondente Tedone.

1. È noto che, se

$$\varphi_1(x) \ , \ \varphi_2(x) \ , \ \varphi_3(x) \ , \ \ldots \tag{1}$$

è un sistema di funzioni definite per ogni x per cui $a \leq x \leq b$, sommabili [3] in (a, b) insieme coi loro quadrati, normali ed a due a due ortogonali, cioè tali per cui

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k \end{cases},$$

condizione necessaria e sufficiente perchè le (1) formino un sistema chiuso, cioè tale che non esista alcuna soluzione *effettiva* [4] $\theta(x)$ del sistema di equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

[1] G. Andreoli, *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali* [Rendic. R. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

[2] *Rés. des leçons sur le calcul infin.* (Paris, 1823); [*Ouvrages compl.* d'A. C., serie 2ª, tomo 4° (Paris, Gauthier-Villars, 1899), pag. 140].

[3] Nel senso di Lebesgue, ved. *Leçons sur l'intégration par H Lebesgue*, pag. 98 e seg. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

[4] Cioè tale che il gruppo dei punti in cui $\theta(x) \neq 0$ sia di misura > 0.

è che, per ogni funzione $f(x)$ sommabile in $(a\,,\,b)$ insieme col suo quadrato, sia soddisfatta l'equazione di chiusura

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_i a_i^2 \quad (1)\,, \tag{2}$$

dove

$$a_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \quad (i = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots)\,.$$

Sia c un numero qualunque compreso fra a e b, e indichiamo con $f(x)$ la funzione che è uguale ad 1 in $(a\,,\,c)$ e uguale a *zero* in $(c\,,\,b)$.

Per questo funzione la (2) ci dà

$$c - a = \sum_i \left[\int_a^c \varphi_i(x)\,dx\right]^2.$$

Mutando c in x, possiamo allora concludere che, *se* (1) *è chiuso*, *è*, *per ogni* x *in* $(a\,,\,b)$,

$$x - a = \sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\,dx\right]^2 \tag{3}$$

Questa condizione è anche sufficiente perchè, se (1) non è chiusa, esiste una funzione effettiva $\psi(x)$ sommabile in $(a\,,\,b)$ insieme col suo quadrato normale e ortogonale a tutte le (1), e, per la disuguaglianza di Bessel (2), si ha

$$\sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\,dx\right]^2 + \left[\int_a^x \psi(x)\,dx\right]^2 \leq x - a\,,$$

da cui, per qualche x,

$$\sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\,dx\right]^2 < x - a\,,$$

perchè per qualche x è $\int_a^x \psi(x)\,dx \neq 0$ (3).

2. Consideriamo il sistema di funzioni normali e ortogonali in $(0\,,\,2\pi)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\,,\ \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots) \tag{1'}$$

(1) Ved. ad es.: Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (1913), pp. 177 e seg.

(2) Ved. p. es.: Severini, loc. cit.

(3) Vedi G. Vitali: *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. XX, 1905), pagg. 136-141.

Per dimostrare che è chiuso, basterà provare che

$$\frac{x^2}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_i \left\{ \left(\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right]_0^x \right)^2 + \left(\left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^x \right)^2 \right\} = x ,$$

cioè che

$$\frac{x^2}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum \frac{2 - 2\cos nx}{n^2} = x ,$$

o, poichè

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ (^1) ,$$

che

$$\sum \frac{2\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{2} \tag{4}$$

E poichè il 1° membro di (4) è proprio la serie di Fourier della funzione

$$\frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3}$$

che figura nel 2° membro, *per provare che il sistema* (1′) *è chiuso basta provare che la funzione*

$$\frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3}$$

è la somma della corrispondente serie di Fourier.

Ora la serie che figura nel 1° membro di (4) è uniformemente convergente e quindi convergente verso una funzione continua: e allora, per provare che sussiste la (4), basta provare che non esiste una funzione continua $\theta(x)$ non dappertutto nulla, per cui

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \theta(x)\, dx = 0 . \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \theta(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \theta(x) \cos nx\, dx = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

È noto che questo si prova molto facilmente (²). Per questa via la

(¹) Ved. p. es.: *Analisi algebrica* di E. Cesaro (Fratelli Bocca, Torino), p. 143.

(²) Ved. per es.: Fubini, *Lezioni di analisi matematica*, 4ª ed. STEN, pag. 444 e seg.

dimostrazione della chiusura del sistema (1') resta evidentemente semplificata, poichè in sostanza, invece di dimostrare che il sistema (5) non ha nessuna soluzione $\theta(x)$ sommabile insieme col suo quadrato, ci riduciamo a dover dimostrare che il sistema (5) non ha una soluzione continua non dappertutto nulla.

Tale fatto vale per tutti i sistemi 1) (1), ma qui, per il sistema 1') discende in modo del tutto ovvio.

Antropologia. — *Delle relazioni fra il peso e la statura nell'uomo adulto.* Nota del prof. Fabio Frassetto, presentata dal Socio G. Ciamician.

Fra i tanti rapporti che si sono proposti dai varî autori per stabilire le relazioni fra il peso e la statura, quello che ha avuto il maggior successo è il rapporto $\frac{P}{S^2} = C$, trovato dal Quetelet (2). Esso è stato infatti confermato dal Gould e recentissimamente dal Davenport (3) in un accurato studio critico concernente i varî indici di altezza-peso. Ma dai nostri studî, che qui riassumiamo (4), si deduce che il rapporto $P:S^2$ non offre un valore abbastanza costante da poterlo adottare come indice di normalità del peso rispetto alla statura.

Ci siamo valsi dei dati raccolti nelle tavole XX e XXIV dell'*Antropometria militare* del Livi (5), rappresentandoli graficamente (vedi figura). Come origine delle stature (S) abbiamo scelto la statura di cm. 154, e a partire da questo valore abbiamo contato sull'asse delle ordinate (O S) le successive stature in centimetri, in modo che ad ogni cm. della statura corrispondesse un cm. sullo stesso asse. Come origine dei pesi (P) abbiamo scelto il peso di Kg. 54 (le origini si possono sempre scegliere a piacere e secondo opportunità), e a partire da questo valore abbiamo contato i pesi in chilogrammi, rappresentandoli in centimetri lungo l'asse delle ascisse (O P). I punti d'incontro delle perpendicolari ai due suddetti assi, passanti per le varie stature, ed i relativi pesi, uniti fra loro, determinarono (vedi figura) le due

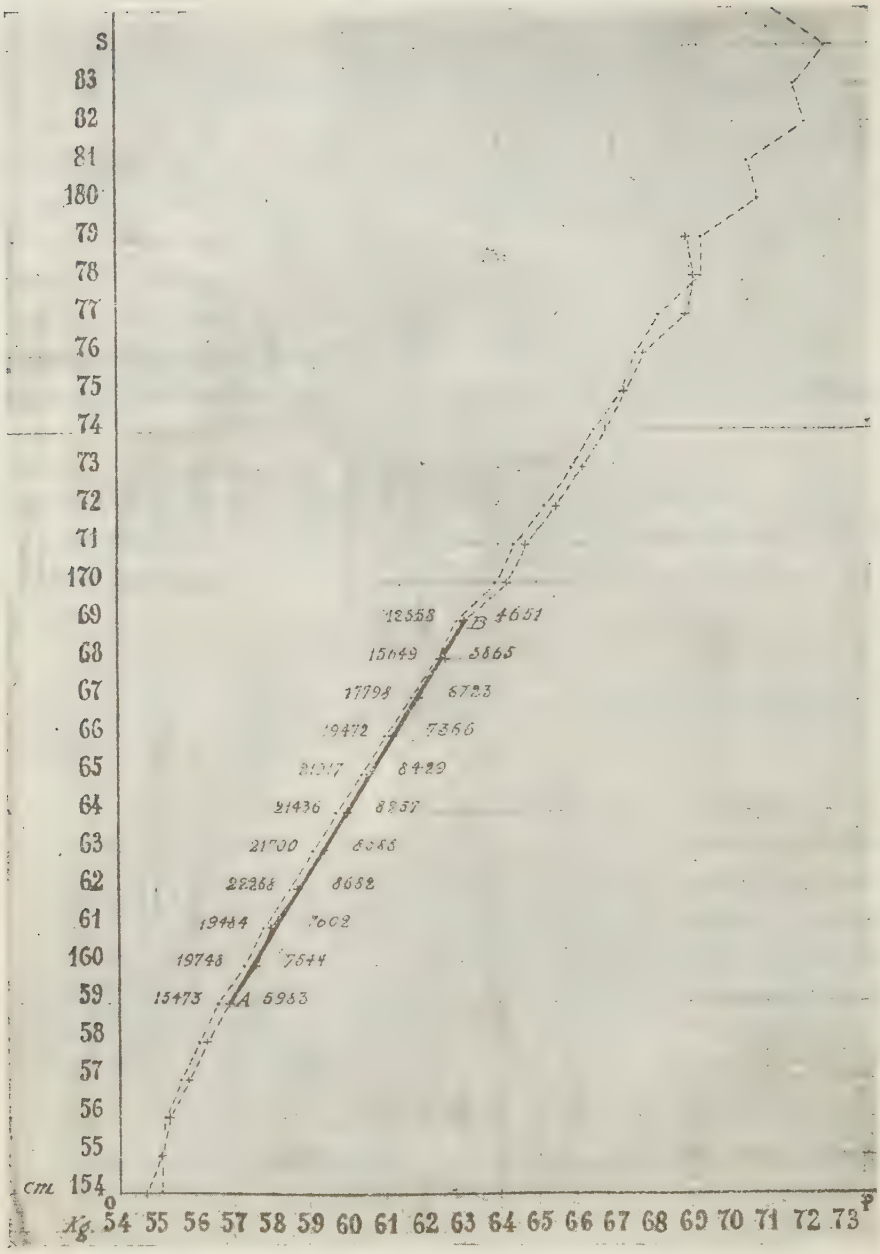
(1) Vedi Severini, l. c.

(2) Quetelet A., *Fisica sociale ossia svolgimento delle facoltà dell'uomo.* Versione in italiano dalla seconda edizione.

(3) Davenport C. B., *Heigth-Weigth Index of Build*; Amer. Journ. Phys. Anthrop., vol. III, n. 4, an. 1920.

(4) Il lavoro per esteso sarà pubblicato in « La Medicina Italiana ». Anno III, n. 1. Milano, 1922.

(5) Livi R., *Antropometria militare.* Parte II, pp. 121 e 132, Roma, 1905.



Spiegazione della figura.

Diagramma della relazione fra il peso e la statura nei coscritti italiani. · — — — · — — — · Curva relativa al peso medio per ogni centimetro di statura nei coscritti italiani fra i 20 e i 23 anni e più. Numero totale dei misurati. 299.355 × — — — × — — — ×. Ibidem nei coscritti italiani di 20 anni, mai ammalati. Numero totale dei misurati. 113.319.

curve ·—·— · ×——×. Se ora consideriamo nella seconda curva la porzione AB, corrispondente al maggior numero delle osservazioni, vediamo che essa è identificabile con una retta passante a due mm. dall'origine sulla parte negativa dell'asse delle ascisse. Considerando questo valore come trascurabile, possiamo ritenere la retta come passante per l'origine e procedere alla rappresentazione algebrica della retta AB, cercandone la sua equazione.

Se nell'equazione generale della retta, che di solito si rappresenta nel piano XY con la formula

$$Y - Y_0 = m(X - X_0),$$

noi facciamo

$Y = S$ = statura misurata in centimetri da zero
$Y_0 = S_0$ = statura iniziale convenzionale (cm. 154)
$X = P$ = peso corrispondente alla statura misurata
$X_0 = P_0$ = peso iniziale convenzionale (Kg. 54),

otteniamo la seguente equazione

$$S - S_0 = m(P - P_0) \qquad (1)$$

il cui valore m (ricavato dalla coppia di valori $S' =$ cm. 160, $P' =$ Kg. 57,60, è 1,60.

Si ha così che l'equazione della retta AB assume la forma semplicissima

$$S - 154 = 1.60(P - 54),$$

dalla quale, per la statura avremo

$$S = 1,60\ P + 67,60 \qquad (2)$$

e per il peso

$$P = \frac{S - 67,60}{1,60} \qquad (3)$$

I risultati da noi ottenuti possono riassumersi e tradursi nella seguente legge: *l'accrescimento della statura, a partire da cm. 154, sta all'accrescimento del peso, a partire da chilogrammi 54, nel rapporto costante espresso dal numero 1,60.* A rigor di termini, questa legge e le enunciate formule sono esatte e trovano la loro conferma sperimentale con grande approssimazione per gli Italiani fra i 19 e i 22 anni, aventi stature comprese fra cm. 159 e 169, o pesi fra i 57 e i 63 chilogrammi; ma non sono ugualmente esatte per i valori al di sopra e al di sotto dei limiti sopra segnati, e specialmente per i valori estremi della serie, rappresentati nel nostro diagramma. Infatti, la curva comprendente questi valori non assume (vedi figura) la forma rettilinea, nè è in continuazione del tratto AB, che

abbiamo assunto come funzione del nostro diagramma. Questo fatto potrebbe spiegarsi dicendo che il numero delle osservazioni corrispondenti è piccolo; e sembra probabile che per un numero maggiore, e sufficientemente grande di osservazioni, si troverebbe, anche per questi punti, un comportamento analogo, o di poco differente da quello dei precedenti.

Arrivati a questo punto, l'importante problema pratico che ora scaturisce è quello di stabilire i limiti entro i quali, per ogni singola statura, oscillano i relativi pesi, che possono considerarsi come fisiologici, e dei quali, per ora, non conosciamo, con precisione, se non il valore medio normale, rappresentato dalla formula (3), la quale si può chiamare, appunto per questo, *formula di normalità*. Inoltre è di grande interesse, specialmente per il clinico, il conoscere quali sono i pesi che, per ogni singola statura, possono considerarsi come patologici, sia in eccesso, sia in difetto, e il determinarne, di conseguenza, i varî gradi di grassezza e di magrezza.

ELEZIONI

Lo spoglio della votazione per la elezione del Segretario aggiunto della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ha dato il risultato seguente: Votanti 41; maggioranza 21. — Millosevich ebbe voti 33; Pirotta 2; Corbino 1; Grassi 1; Levi-Civita 1; schede bianche o nulle 3. Eletto Millosevich.

COMUNICAZIONI VARIE

Relazione *dell'Accademico Amministratore, intorno al Palazzo, alla Pinacoteca e al Gabinetto delle stampe, approvata nella adunanza del 16 dicembre 1921 dal Consiglio di presidenza che ne deliberava la pubblicazione.*

Poichè da parecchio tempo e specialmente in questi ultimi anni sono avvenuti fatti e si sono presentate circostanze che sembra possano condurre a opinioni erronee e produrre effetti dannosi per la nostra Accademia, ho creduto necessario esporre lo stato vero delle cose in base ai documenti posseduti dalla Accademia stessa a riguardo del Palazzo Accademico, della Galleria Corsini e della Collezione delle stampe della Biblioteca Corsiniana.

Roma, 16 dicembre 1921.

L'Accademico Amministratore
Prof. Romualdo Pirotta.

1. — Il Palazzo.

Poichè la legge 14 maggio 1881, n. 209, faceva obbligo allo Stato di costruire il palazzo per l'Accademia delle Scienze (art. 3° della convenzione tra Governo e Comune, annessa alla legge), si acquistava nel 1883, appunto per questo scopo, il palazzo Corsini.

L'art. 4 del contratto di vendita del palazzo Corsini allo Stato (20 maggio 1883, rogito Vincenzo Castrucci) dice infatti:

« I Signori Principi Corsini vendono e il Sig. Duca Leopoldo Torlonia in nome dello Stato compra il palazzo Corsini per uso della Accademia delle Scienze e segnatamente della Reale Accademia dei Lincei e dei Musei »;

« con espressa dichiarazione dei Signori venditori che non avrebbero essi venduto e non lo avrebbero venduto al prezzo per cui lo vendono se non si fosse data tale destinazione e se dal Governo non si assumesse l'obbligo, che da esso si assume, di mantenerlo alla destinazione di Palazzo della Accademia e dei Musei ».

E nel verbale di ricognizione, di consegna e di presa di possesso del palazzo già Corsini alla Lungara e dei mobili in esso esistenti destinati alla Reale Accademia dei Lincei, in data 19 settembre 1883, sta scritto che il palazzo fu venduto per uso esclusivo della Accademia delle Scienze e soprattutto della Reale Accademia dei Lincei e dei Musei.

Di fatti il Presidente della Accademia prendeva possesso a termini del contratto, a nome dello Stato e per uso della Reale Accademia dei Lincei, di tutto il palazzo e dei mobili.

Non corre dunque alcun dubbio che il palazzo Corsini fu acquistato per la Accademia dei Lincei, la quale, in seguito alle modificazioni apportate ai proprî statuti, fu riconosciuta essere l'Accademia delle scienze nominata nella legge 14 maggio 1881 e per la quale Accademia dovevasi costruire il palazzo (decreto reale 26 luglio 1883).

L'Accademia, del resto, ha fatto valere questo suo diritto ogni qualvolta si è tentato di menomarlo. Così ad es. nell'aprile del 1901, a proposito del collocamento del gruppo Ercole e Lica nel porticato al piano terreno dell'Accademia, la Presidenza dichiarava assolutamente transitoria l'ospitalità data al gruppo del Canova che doveva essere collocato nella Galleria (verb. adunanza Consiglio 14 marzo 1901); dichiarazione che veniva confermata nel 1902 allorchè il direttore della Galleria nazionale d'arte antica pretendeva di avere dall'Accademia l'uso di tutto il porticato, sotto il quale era stato messo in deposito il celebre gruppo (verb. suddetto, 16 marzo 1902).

E allorchè nel 1916 si parlava con insistenza del trasporto della Galleria Corsini in altra sede, la Presidenza della Accademia, con lettera del 2 ottobre n. 72,

faceva conoscere al Ministero che le stanze della Galleria stessa erano state dalla Accademia già destinate alla Biblioteca la quale aveva urgente bisogno di locali.

E a queste manifestazioni di possesso, il Ministero, come era naturale, non ha avuto nulla da obbiettare.

2. — La Galleria Corsini.

Con l'art. 12 del contratto di vendita sopra ricordato i principi Corsini FANNO DONAZIONE ALLO STATO DELLA PINACOTECA (condizionatamente alla approvazione della legge 28 marzo 1871 sulla alienazione ad enti morali delle gallerie, biblioteche ecc.).

Rimosso il vincolo di inalienabilità, fu fatto l'atto definitivo di donazione della Pinacoteca Corsini allo Stato con atto del notaio Gaetano Magalli il 17 settembre 1883, coll'intervento del presidente della Accademia.

Per effetto di questo atto « i principi Corsini DÀNNO, CEDONO E TRASMETTONO ALLO STATO la pinacoteca, coll'obbligo di conservarla al PUBBLICO PERPETUO USO »; onde l'effetto sia che una opera così gloriosa sia degnamente conservata secondo gli intendimenti degli antenati principi Corsini fondatori e che attesti e rimanga solenne testimonianza del loro affetto e di quello dei loro pronipoti verso la città di Roma.

E mentre i rappresentanti dello Stato e dell'Accademia dichiararono DI AVER RICEVUTO CONSEGNA DELL'INTERO SUBIETTO DONATO ED ESSERNE IN POSSESSO, viene per essi e in nome degli enti morali che rispettivamente rappresentano e verso la cittadinanza di Roma che godrà l'uso pubblico, FATTA SOLENNE PROMESSA CHE SARÀ ADEMPIUTO ALLE PRESCRIZIONI TUTTE contenute non tanto nel citato contratto di vendita, quanto nel presente contratto di donazione come nella legge dell'8 luglio 1883, n. 1461 (conservazione delle gallerie, ecc.).

Questa pinacoteca, come dall'art. 13 del suddetto contratto di vendita, è costituita dai quadri e dagli oggetti d'arte contenuti e descritti nell'elenco lett. U annesso al contratto, raccolti in NOVE CAMERE E UN GABINETTO (più pochi altri fuori di galleria e cioè nell'appartamento di ricevimento, nella cappella e in un magazzino) (vedi elenco dei quadri ed altri oggetti della Galleria Corsini quale fu riconosciuto nel verbale di consegna 17 settembre 1883).

L'art. 14 del contratto ricordato stabilisce che lo Stato dovrà conservare la Pinacoteca a pubblico uso; dice che esso POTRÀ TRASPORTARLA ALTROVE, purchè sempre in Roma ed ANCHE RIUNIRLA AD ALTRE PINACOTECHE.

Da quanto sopra è stato esposto risulta chiaramente:

1° che la pinacoteca costituiva la galleria Corsini che occupava locali del palazzo in NUMERO BEN DETERMINATO e comprendeva i QUADRI E GLI OGGETTI D'ARTE ELENCATI LOCALE PER LOCALE, nell'allegato al contratto e nel verbale di consegna;

2° che questa pinacoteca è STATA DONATA ALLO STATO coll'obbligo di conservala al pubblico perpetuo uso, colla facoltà di trasportarla altrove in Roma ed anche di RIUNIRLA ad altre pinacoteche, e colla solenne promessa che sarà adempiuto a tutte le prescrizioni del contratto di donazione.

Con lettera del 22 marzo 1895, n. di partenza 1588, il ministro della Pubblica Istruzione (G. Baccelli) informava il presidente della Accademia (F. Brioschi) che aveva divisato di RIUNIRE IN UNO IL MEGLIO DELLA GALLERIA CORSINI, TORLONIA, MONTE DI PIETÀ NEI LOCALI DELLA GALLERIA CORSINI, e diceva che GLI ALTRI DIPINTI, quelli residuali DAL MEGLIO, ADORNASSERO LE SALE DELLA ACCADEMIA, mentre le copie e i quadri di esigua importanza sarebbero collocati in TRE STANZE CHE IL PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA VORRÀ DESTINARE. Chiedeva al presidente di accogliere la proposta e il presidente, avutane autorizzazione dal Consiglio di Amministrazione (verbale adunanza 23 marzo 1895), con lettera del 26 stesso mese accettava. Si trattava dunque soltanto di collocare il MEGLIO delle tre gallerie (gli oggetti VERAMENTE DEGNI, come è scritto in altra lettera dello stesso ministro al presidente stesso data, n. di partenza 1587) NEI LOCALI DELLA GALLERIA CORSINI, cioè in un numero di sale ben determinato e conosciuto. Gli altri quadri delle tre gallerie si dovevano distribuire nelle sale accademiche PER SEMPLICE ORNAMENTO.

Il ministro informava il presidente della Accademia che aveva incaricato il prof. Tadolini di reggere la direzione della GALLERIA CORSINI (così è ancora chiamata), e che a lui avrebbe potuto fare la consegna DEL MATERIALE ARTISTICO E DEL MOBILIO DELLA GALLERIA. Il che fu fatto dal commesso Cecchi per delegazione del presidente.

Furono poi collocati nelle sale accademiche i quadri che dovevano servire, come sopra è detto, per IL LORO ORNAMENTO.

Il Ministero intanto, senza che risulti dagli atti che fosse informata l'Accademia, trasformava la Galleria Corsini in GALLERIA NAZIONALE DI ARTE ANTICA, trasformazione contro la quale moveva reclamo il principe Corsini nel luglio del 1895 al presidente della Accademia, richiamando l'attenzione sulle condizioni del contratto di vendita e dell'atto di donazione.

Da allora l'Accademia non seppe più nulla della pinacoteca Corsini.

Non risulta da documenti in atti che l'Accademia sia mai stata informata di quanto si faceva dal Ministero, dalla Direzione generale delle belle arti e dal direttore della Galleria Nazionale di arte antica; ma è certo che nuovi quadri venivano man mano collocati nelle sale dell'Accademia e che quelli che già vi erano venivano spostati, sostituiti con altri, così che tutti i locali della Accademia sono stati a poco a poco occupati.

Soltanto una volta, forse in seguito ad osservazioni verbali fatte dalla Accademia, il direttore della Galleria Nazionale e Gabinetto delle stampe (nuova istituzione della quale non risulta che l'Accademia sia stata informata) inviava

al segretario dell'Ufficio di Presidenza ing. E. Mancini, in data 1° dicembre 1902, n. protoc. 1306, una lettera colla quale ci trasmetteva UN ELENCO DEI QUADRI CONSERVATI NEI LOCALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI, DAL QUALE CHIARAMENTE RISULTA QUALI ERANO I QUADRI CHE CIASCUNA SALA AVEVA PRECEDENTEMENTE E QUALI SONO QUELLI CHE IN ESSE ORA EFFETTIVAMENTE SI TROVANO.

Da questo elenco e da due altri che l'Accademia possiede (elenchi Tadolini) risulta ancora una volta lo spostamento della disposizione dei quadri NEI LOCALI ACCADEMICI, con occupazione di ogni vano anche nella Biblioteca, nei locali concessi all'Istituto Storico Italiano, ecc. ecc.

Dopo il 1902 l'Accademia non è più stata informata di quanto riguarda la pinacoteca Corsini. Sta però di fatto che la Direzione della Galleria Nazionale di arte antica considerava i locali accademici e il palazzo dell'Accademia come aggregati in servizio della Galleria medesima, anche perchè il numero dei quadri andava sempre più crescendo e si voleva ad ogni costo collocarli.

Fu specialmente in questi due ultimi anni che, senza alcuna richiesta di autorizzazione, la Direzione della Galleria andava facendo un nuovo spostamento di quadri che, senza alcuna comunicazione alla Amministrazione, veniva compiuto, almeno da quanto riferisce l'economo, durante le ultime vacanze accademiche, con un vero cambiamento nella qualità, numero, disposizione, collocamento dei quadri delle sale accademiche, riducendone il numero, sostituendo i migliori, disponendoli in modo che non risponde alla ornamentazione ma a criteri speciali della Direzione della Galleria.

La quale, a mezzo della Direzione generale delle belle arti, pretende ancora nuovi locali per collocarvi i molti quadri ammucchiati persino nel Gabinetto delle Stampe!

Da quanto è sopra esposto risulta:

1° che nel 1895, DI PIENO ACCORDO TRA LA PRESIDENZA DELLA ACCADEMIA E IL MINISTERO DELLA ISTRUZIONE, venivano riuniti nei locali della Galleria Corsini gli oggetti VERAMENTE DEGNI, CIOÈ IL MEGLIO delle Gallerie Corsini, Torlonia e Monte di Pietà, mentre i dipinti di quelle collezioni, che non appartenevano ai veramente degni, avrebbero servito di ADORNAMENTO DELLE SALE ACCADEMICHE;

2° che l'Accademia aveva accolto SOLTANTO la proposta di collocare NELLE SALE DELLA GALLERIA CORSINI ANCHE le più egregie opere delle Gallerie Torlonia e Monte di Pietà, ed AVEVA CONCESSO che si collocassero SEMPLICEMENTE PER ORNAMENTO delle due sale i quadri meno degni, i quali quindi dovevano servire PER USO DELLA ACCADEMIA;

3° che la Direzione della Galleria nazionale di arte antica, invadendo senza alcun diritto e senza autorizzazione quasi tutti i locali del palazzo accademico, ritenne che i locali accademici fossero adibiti ad uso della Galleria, e, senza chiedere autorizzazione e darne notizia all'Accademia, fece e disfece nelle sale accademiche e in tutti i locali dell'Accademia; disponendo, levando, sostituendo quadri ripetutamente come se fosse in casa propria, accumulando persino nelle sale del

Gabinetto delle Stampe una quantità di quadri, e pretendendo ora di avere dalla Accademia altri locali per collocarli;

4° che all'Accademia perciò viene ad essere imposto anche l'onere della custodia di quadri dei quali non conosce nè il numero, nè gli autori, nè il valore artistico e venale, e che si sono andati continuamente cambiando e sostituendo.

Questo deplorevole stato di cose non può, non deve continuare. Che se l'Accademia ha avuto il torto di non provvedere a tempo opportuno, provveda almeno ora, e, facendo rilevare a chi di ragione il modo di procedere della Direzione della Galleria di arte antica, rientri una buona volta nel pieno possesso dei suoi diritti.

3. — La collezione delle stampe.

Coll'art. 12 del contratto di vendita del palazzo Corsini allo Stato, nella stessa maniera più sopra ricordata, usata per la Galleria, i principi Corsini FANNO DONAZIONE ALLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI DELLA BIBLIOTECA, confermandola coll'atto definitivo di donazione rogito Gaetano Magalli del 17 settembre 1883 sopraricordato, nel quale atto è detto che i principi Corsini DÀNNO, CEDONO, E TRASMETTONO ALLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI LA BIBLIOTECA, perchè un'opera così gloriosa sia degnamente conservata secondo gli intendimenti voluti dagli antenati principi Corsini fondatori.

E la donazione è accettata per parte della Accademia dal suo Presidente (Q. Sella).

In questo atto di donazione si trova la SOLENNE PROMESSA, FATTA per l'Accademia da parte del suo Presidente, che sarà ADEMPIUTO ALLE PRESCRIZIONI TUTTE contenute non tanto nell'atto di vendita quanto nell'atto di donazione, come nella legge 8 luglio 1883, n. 1461.

Come risulta dall'art. 13 del contratto di vendita, la Biblioteca comprende LE STAMPE, I DISEGNI, i libri, i codici e i relativi scaffali contenuti nelle nove sale o stanze nel lato nord al primo piano, dei quali, per ordine dello stesso articolo, fu poi redatto il catalogo « da rappresentanti dei signori principi Corsini, della Reale Accademia dei Lincei e del Governo ». L'art. 15 dello stesso contratto dispone poi che « la Reale Accademia dei Lincei sarà obbligata di conservare la Biblioteca a pubblico uso col nome di Corsiniana e TENERLA SEMPRE NON SOLO IN ROMA MA ANCHE IN TRASTEVERE come dispose il cardinale Neri Corsini, uno dei fondatori della Biblioteca stessa ».

Da quanto precede risulta chiaro e incontestabile:

1° che la Biblioteca, e quindi tutto ciò che la costituisce (STAMPE, DISEGNI, libri, manoscritti), è stata DONATA dai principi Corsini ALLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI;

2° che di conseguenza l'Accademia stessa è LA SOLA ED UNICA PROPRIETARIA della Biblioteca medesima e quindi di tutto ciò che la costituisce;

3° che la Biblioteca deve rimanere nel palazzo accademico e almeno sempre nel Trastevere;

4° che alla Accademia spetta la CONSERVAZIONE della Biblioteca e quindi di TUTTO quanto la costituisce, e, di conseguenza, di stabilire le modalità per questa conservazione.

Con lettera del 22 marzo 1895, n. di partenza 1587, il Ministro della Istruzione (G. Baccelli) scriveva al Presidente dell'Accademia che « SI POTREBBERO CONVENIENTEMENTE ESPORRE NELLA SALA NONA DELLA GALLERIA CORSINI LE STAMPE PRINCIPALI della raccolta conservata nella Biblioteca e disporre le altre nel modo tenuto al Gabinetto delle stampe di Berlino, entro cassette in ordine di tempo e di autori ». E chiedeva al presidente se voleva accogliere favorevolmente questa proposta, nel qual caso avrebbe disposto per la sua definitiva attuazione.

Il Presidente (F. Brioschi), in seguito ad approvazione del Consiglio di Amministrazione (verb. adun. 23 marzo 1895), con lettera del 16 marzo 1895, n. protoc. 11, accoglieva favorevolmente la proposta, perchè essa SODDISFACEVA AL DESIDERIO ESPRESSO DA LUNGO TEMPO, che la preziosa raccolta delle stampe donata alla Biblioteca dell'Accademia potesse essere esposta IN PUBBLICO IN MODO CONVENIENTE.

Il Ministro, con lettera 30 marzo 1895, n. protoc. 1604 ringrazia il presidente della Accademia PER IL FAVORE CON CUI AVEVA ACCOLTA LA PROPOSTA DELL'ASSETTO della insigne raccolta delle stampe e dei disegni.

Risulta dagli atti che l'8 aprile stesso anno 1895, con lettera n. protoc. 16, il Presidente della Accademia mandava al comm. Tadolini — indicato dal ministro insieme col dr. P. Kristeller per la consegna delle stampe — il PROGETTO DI CONVENZIONE FRA IL MINISTERO E L'ACCADEMIA PER LA CONSEGNA CONDIZIONATA DELLE STAMPE. Ma in atto questo progetto non si trova.

Dopo questa data, dall'Archivio non risulta più nulla.

Si sa però che nel 1898 il ministro della Pubblica Istruzione (L. Cremona), in seguito a relazione di una commissione incaricata di esaminare l'andamento dei lavori nel Gabinetto delle Stampe annesso alla Galleria nazionale di arte antica — della raccolta delle quali RIMANE PROPRIETARIA L'ACCADEMIA DEI LINCEI, mentre la Direzione della Galleria NE HA SEMPLICEMENTE IL DEPOSITO — per adottare PROVVEDIMENTI PIÙ UTILI PER LA PIENA TUTELA DEL MATERIALE ARTISTICO DEPOSITATO E PER IL MIGLIOR ANDAMENTO DEL SERVIZIO, con decreto ministeriale del 17 giugno 1898 istituiva una COMMISSIONE DI VIGILANZA, della quale venivano chiamati a far parte un rappresentante della Accademia (presidente), uno del Governo, uno del Comune di Roma e il direttore della Galleria nazionale d'arte antica.

La quale Commissione di vigilanza aveva incarico di mettere in regola gli atti di consegna, sorvegliare la esatta catalogazione, riconoscere quali stampe avessero bisogno di lavatura, prendere in consegna il sigillo col quale dovevano

essere bollate tutte le stampe prima che si procedesse alla remozione di esse dai volumi nei quali si trovavano; verificare se nei lavori di restauro o di lavatura si procedeva secondo le migliori norme.

Questa Commissione – alla quale avrebbero potuto aggregarsi uno o due eruditi nelle cose d'arte, la cui cooperazione si ritenesse necessaria – era incaricata anche di redigere e sottoporre alla approvazione del Ministro un regolamento per il Gabinetto delle stampe, nel quale fossero indicate anche le norme da tenere per l'esecuzione dei lavori e le proposte per il personale che dovrà attendervi.

Di tutto questo è cenno soltanto nel verbale del Consiglio di Amministrazione del 3 luglio 1898, nel quale si trova che IL PROF. MONACI DÀ NOTIZIA DI PROVVEDIMENTI PRESI PER IL RIORDINAMENTO DEL GABINETTO DELLE STAMPE.

Pare che questa Commissione di vigilanza, presieduta dal rappresentante della Accademia, abbia proposto il regolamento per il Gabinetto nazionale delle stampe del quale sopra è detto, perchè in archivio esiste, senz'altro, una COPIA DI UN REGOLAMENTO PER IL GABINETTO NAZIONALE DELLE STAMPE IN ROMA, che appare sia stato approvato dal Ministro.

Con questo regolamento si stabilisce il modo di compilazione dell'inventario, le norme per le riparazioni alle stampe bisognose di restauro, per la registrazione, schedatura, bollatura, modo di dare in consultazione agli studiosi, fare i prestiti, trarre copie, fare esposizioni ecc.

Questo regolamento contiene anche la disposizione seguente:

« Entro il mese di luglio DI OGNI ANNO il direttore manderà al Ministero E ALL'ACCADEMIA DEI LINCEI una particolareggiata relazione sull'andamento dell'Istituto, indicando i nuovi acquisti, i restauri eseguiti, i lavori fatti ai cataloghi e i più urgenti bisogni e i mezzi per provvedervi ».

Delle riunioni della Commissione di vigilanza non risulta nulla negli atti, che io sappia.

Il SOLO DOCUMENTO relativo a questo Gabinetto delle stampe è l'unica Relazione (senza data) del direttore Federico Hermanin al presidente della Commissione di vigilanza prof. E. Monaci e da questi inviata al presidente della Accademia con lettera senza data, e presentata alla Accademia nella adunanza del 17 gennaio 1906 della classe di scienze morali (ved. Rendic. ser. 5ª, vol. XV, 1906, pag. 354).

Il presidente Monaci scrive nella sua lettera che, di quanto si fece dal 1896, fu ragguagliato di TEMPO IN TEMPO il Ministero, e che mandava ORA la relazione perchè l'Accademia, PUR SEMPRE PROPRIETARIA DI QUESTO TESORO (valutato a non meno di tre milioni), aveva diritto di essere informata.

Ma la relazione del direttore contiene ben poche cose relative alla consistenza della raccolta, alla sua sistemazione, al bilancio, al personale.

Dal 1906 ad oggi, malgrado l'obbligo della relazione annuale, non risulta più nulla in atti. L'Accademia proprietaria è completamente messa da parte. Tutto è fatto dal Direttore, il quale pare si sia arbitrariamente sostituito alla

Commissione di vigilanza. Egli ha fatto anche esposizioni con invito da parte della Direzione del Gabinetto, senza che l'Accademia sia nemmeno nominata.

Il Direttore si rivolge però all'Amministrazione e all'Accademia soltanto per chiedere continuamente e con insistenza, privatamente e a mezzo della Direzione generale delle belle arti, locali e locali per la sistemazione delle stampe mentre l'Accademia, pur avendo sempre vivissimo il desiderio di disporre degnamente la SUA collezione delle stampe (che si trova attualmente in locali riempiti disordinatamente di quadri) non lo può fare, avendo essa stessa bisogno urgente di locali specialmente per la sistemazione della Biblioteca.

Da quanto è stato riassunto in questa parte della relazione, risulta:

1°) che nel 1895 l'Accademia accoglieva la richiesta fatta dal Ministero della Istruzione di esporre nella SALA NONA della Galleria Corsini le stampe principali della raccolta Corsiniana di proprietà assoluta della Accademia, e di sistemare le altre;

2°) che, istituito più tardi il GABINETTO DELLE STAMPE, veniva nel 1898 istituita anche una COMMISSIONE DI VIGILANZA per il gabinetto medesimo;

3°) che il direttore del Gabinetto DOVEVA PRESENTARE OGNI ANNO ALL'ACCADEMIA UNA RELAZIONE sull'andamento del Gabinetto delle Stampe; mentre invece nel periodo 1898-1921 fu presentata una sola VOLTA (1902);

4°) che la Commissione di vigilanza e l'Accademia furono messe completamente da parte, e il Direttore arbitrariamente si sostituì alla Commissione stessa;

5°) che mentre il Gabinetto delle stampe come la Galleria Corsini, ha i suoi locali ben definiti, il direttore del Gabinetto, che è anche direttore della Galleria, con la continua insistente richiesta di locali mostra di ritenere che tutto il palazzo accademico debba servire per la Galleria e per il Gabinetto, e quindi che non l'Accademia accolga nel suo palazzo la Galleria e il Gabinetto, ma che questo e quella diano ospitalità all'Accademia.

Ora anche questa condizione di cose deve cessare al più presto possibile, e la Commissione di vigilanza e l'Accademia devono immediatamente riprendere i loro diritti e richiamare la direzione del Gabinetto delle stampe alla osservanza scrupolosa dei suoi doveri.

E questo anche perchè l'Accademia è obbligata, come lo Stato, per l'art. 19 del contratto di vendita del palazzo Corsini, di osservare quanto è disposto nel contratto stesso E DI NULLA FARE O PERMETTERE AD ALTRI DI FARE SOTTO QUALUNQUE TITOLO CONTRO DI ESSO.

L'Accademico Amministratore
Prof. ROMUALDO PIROTTA.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

4 dicembre 1921.

Ameghino F. — Obras completas y correspondencia cientifica. Vol. I: Vita y obras del Sabio; vol. II: Primeros trabayos cientificos. La Plata, 1913. 8°, pp 1-391, 1-765.

Amodeo F. — Un'applicazione del teorema di Nicolò de Martino sulle volte a padiglione (Estr. dal « Bollettino di matematica », anno XVII). Bologna, 1921. 8°, pp. 1-4.

Amodeo F. — Anales del Congreso Nacional de la Industria minera. Tomos I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. Lima, 1919-21. 8°, pp. I-III, 1-691, 1-91, I-VIII, 1-208, I-IV, 1-98, I-VI, 1-143, I-V, 1-163, 1-96.

Baldacci A. — Contributo alla flora autunnale ed invernale dei dintorni di Vallona (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXV, pp. 70-86). Rocca S. Casciano, 1918. 8°.

Béguinot A. — Anomalie fiorali costanti in una forma coltivata di *Veratrum nigrum* L. (Estr. dal « Bullettino della Società botanica italiana », nn. IV-IX, pp. 51-54). s. l. 1920. 8°.

Béguinot A. — Brevi notizie sulla *Digitalis Ambigua* Murr. e sulle forme affini in rapporto alla loro variabilità (Estr. dal « Bullettino della Società botanica italiana », 1921). s. l. 1921. 8°, pp. 1-8.

Béguinot A. — Commemorazione del prof. Pier Andrea Saccardo (Estratto dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova », vol. XXXVI). Padova, 1920. 8°, pp. 1-39.

Béguinot A. — Contributo alla flora autunnale ed invernale dei dintorni di Vallona (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXV, pp. 70-86). Rocca S. Casciano, 1918. 8°.

Béguinot A. — La Botanica. Roma, 1920. 12°, pp. 1-116.

Béguinot A. — La Palma nana (*Chamaerops humilis* L.) e l'industria del crine vegetale in Sicilia (Estr. dal « Bollettino di studi ed informazioni del R. Giardino coloniale di Palermo », vol. V, fasc. III-IV). Palermo, 1921. 8°, pp. 1-12.

Béguinot A. — L'Istituto e l'Orto botanico della R. Università di Padova negli anni scolastici 1919-20 e 1920-21. Padova, 1921. 8°, pp. 1-16.

Béguinot A. — Nuovi dati sul polimorfisme sessuale nei generi *Chamaerops* L. e *Trachycarpus* Wendl. (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXV). Rocca S. Casciano, 1918. 8°, pp. 1-7.

Béguinot A. — Ricerche culturali sulle variazioni delle piante eseguite negli anni 1915-1919 (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXXIX, pp. 345-375). Venezia, 1920. 8°.

Béguinot A. — Ricerche intorno al polimorfismo della *Stellaria media* (L.) Cir. in rapporto alle sue condizioni di esistenza. Parte III, fasc. I, II. Padova, 1920. 8°, pp. 1-144, 145-196.

Béguinot A. — Risultati generali sul polimorfismo sessuale nei generi *Chamaerops* L. e *Trachycarpus*. H. Wendl. (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova » vol. XXV, pp. 177-185). Padova, 1919. 8°.

Béguinot A. — Schedae ad Floram Italicam exsiccatam, serie III, fasc. XIV. Sancasciano, 1921. 8°, pp. 176-244.

Béguinot A. — Sopra un interessante *Tascadium* esistente nel R. Orto Botanico di Padova (Estr. dal « Bollettino della Società botanica italiana », n. IV-IX, 1920, pp. 55-60). s. l. s. d. 8°.

Benson W. N. — Tectonic Conditions accompanying Intrusion of Basic and ultra Basic Igneous Rocks (From the « Bull. Geol. Soc. Am. », vol. XXXI, pp. 145-148). s. l. e s. d. 8°.

Benson N. W. — The Geology and Petrology of the Great Serpentine Belt of New South Wales (From the « Proceedings of the Linneau Society of New South Wales », vol. 45, pp. 286-423). Sydney, 1920. 8°.

Bizzozero E. — Malattie della pelle. Torino, 1922. 8°, pp. I-XII, 1-140.

Boschi ed acque nella provincia di Gorizia. Gorizia, 1921. 8°. pp. 1-63.

Bossiere R. E. — Le réglement d'avaries du grand abordage. Paris, 1921 12°, pp. 1-36.

Candiani G. — Filosofia naturale e teoria delle onde. Padova, 1921. 8°.

Cavazzi D. — Grassi B. L'anofele può propagare la malaria anche direttamente? Nota II « Rend. Accademia Lincei », vol. XXX, fasc. XI (Estr. dalla « Rassegna delle Scienze biologiche », anno III, pp 106-111). Firenze, 1921. 8°.

Corties A. L. — Sir Normau Lockyer, 1836-1920 (Repr. from the « Astrophysical Journal », vol. LIII, pp. 233-248). Chicago, 1921 8°.

De Donder Th. — La gravifique Einsteinienne. Paris, 1921. 4°, pp. 1-198.

De Vecchi P. — Modern Italian Surgery and old Universities of Italy. New York, 1921. 8°. pp. I-XVI, 1-249.

De Toni G. B. — Intorno un gigantesco pesce catturato nell'Adriatico (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto

di Scienze, Leltere ed Arti», tomo LXXX, pp. 126-129) Venezia. 1921. 8°.

Delgrosso M. — Sopra un caso di accrescimento parallelo nell'argentite di Freiberg (Estr. dal «Bollettino della Società geologica italiana», vol. XL, pp. 48-50). Roma, 1920. 8°.

Favaro A. — I lettori di matematiche nella Università di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI (Estr. dalle «Memorie e documenti per la Storia della Università di Padova», vol. I). Padova, 1921. 8°. pp. 1-70.

Figaro F. — Superficie di scorrimento e forme di rottura varie nei solidi tesi o compressi (Estr. dal «Giornale del Genio civile, anno LIX). Roma, 1921. 8°, pp. 1-30.

Forti A. — Studi su la Flora della pittura classica veronese (Estr. dal «Bollettino Madonna Verona», anno XIV, pp. 57-228). Verona, 1920. 8°.

Franchetti A. — Studi ed osservazioni sulla pellagra (Estr. da «Lo Sperimentale», anno LXXV). Firenze, 1921. 8°; pp. 1-94.

Gabba L. — Giovanni Celoria. Notizie della sua opera scientifica (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica italiana», vol. I). Roma, 1921. 8°, pp. 1-10.

Galletti di Cadilhac. R. C. — The Framewoch of Wireless Telegraphy. Cambridge, 1921. 8°. pp. 1-48.

Haldane J. S. — Organism and environment as illustrated by the Physiology of Breathing. Oxford, 1917. 8°, pp. I-XI, 1-138.

Haldane J. S. — Handbook to the Norman Lockyer Observatory. London, 1921. 12°, pp. 1-35.

Ivaldi G. — Il rendimento delle macchine (Estr. dalla «Scienza per tutti», n, VI). Milano, 1921. foll.

Ivaldi G. — La pressione d'urto e quella dei gas secondo il metodo sperimentale (Estr. dal «Politecnico», n. VI-VII). Milano, 1921. 8°, pp. 1-36.

Ivaldi G. — La teoria eterea della luce, del calore, dell'elettricità secondo il metodo sperimentale (Estr. della «Rivista tecnica d'elettricità e delle invenzioni»). Milano, 1921. 4°, pp. 1-24.

Lustig A. — Gli effetti dei gas asfissianti e lagrimogeni studiati durante la guerra (1916-1918) (Estr. dal «Giornale di medicina militare»). Roma, 1921. 8°, pp. 1-31.

Lustig. A. — Studi di osservazioni sulla pellagra (Estr. da «Lo Sperimentale», an. LXXV). Firenze, 1921. 8°, pp. 1-94.

Martelli U. — Commemorazione di Odoardo Beccari. Firenze, 1921. 8°, pp. 1-61.

Mascart. J. — Notes a propos de quelques mesures d'étoiles doubles (Extr. du «Bulletin astronomique», tome I, fasc. III, 1921). s. l., 1921. 8°, pp. 1-16.

Peyronel B. — Un interessante parassita del lupino non ancora segnalato in Italia, *Blepharospara terrestris* (Sherb.) Peyr. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.», vol. XXIX, pp. 194-197). Roma, 1920. 8°.

Peyronel B. — Report of the Committee on British petrographic Nomenclature (Repr. from the «Mineralogical Magazine», vol XIX, pp. 137-147). London, 1921. 8°.

Silvestri F. — Contribuzioni alla conoscenza biologica degli Imenotteri parassiti. V. Sviluppo del *Platygaster dryamyiae* Silv. (Fam. *Proctotrupidae* (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici», vol XI, pp. 299-326). Portici, 1921. 8°.

Silvestri F. — Notizie della Cicala grigiastra (*Tettigia orni* L.) sulla Cicala maggiore (*Cicada plebeja* Scop.), sui loro parassiti e descrizione della loro larva neonata e della ninfa (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici», vol. XV, pp. 121-204). Portici, 1921. 8°.

Skinner D. H. — Culture Areas in New Zealand (Estr. dal «Journal of the Polynesian Society», pp. 71-78). s. l. e s. d. 8°.

Skinner D. H. — Shell Adzes of the Maori (From the «Journal of the Polynesian Society», vol. XXIX, pp. 200-201). s. l. e s. d. 8°.

Skinner D. H. — The Awanui (Or Kaitaia) Pare. s. l. e s. d. 8°, pp. 1-3.

Vallot J. — Annales de l'Observatoire météorologique physique et glaciaire du Mont Blanc. Tome VIII. Paris, 1917. 4°, pp. I-VI, 1-240.

Wallén A. — Sur le contrôle des annonces de tempétes (Extr. de «Geografiska Annaler». 1921, pp. 267-277). s. l. e s. d. 8°.

Zedda C. — Sopra un modo di usare gli areometri a volume costante per determinare la densità dei liquidi. Cagliari, 1921. 8°, pp. 1-6.

Zedda C. — Sulla evaporazione dell'acqua. Risultato delle osservazioni fatte nel venticinquennio 1893-1917 nel R. Osservatorio meteorologico di Cagliari. Cagliari, 1921, 8°, pp. 1-16.

Zeeman P. — Verhandelingen over Magneto-optische Verschiynselen. Leiden, 1921, 8°, pp. I-XV, 1-341.

INDICE DEL VOLUME XXX, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1921 — 2º Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Abetti. « Sulle determinazioni di differenze di longitudine mediante la telegrafia senza fili ». 18.

— « Sul confronto fra osservazioni visuali e fotografiche delle nebulose ». 47.

— « Sulla massa e il moto proprio del sistema 40 Eridani ». 460.

Agamennone. « I terremoti mondiali del 1916 e l'Osservatorio di Rocca di Papa ». 60; 363.

Agostini. Ved. *Mazzetti.*

— Ved. *Parravano.*

Albis. « Indici di rifrazione della cancrinite, della zunyite e della orangite ». 472.

Angeli. « Sopra il comportamento e la proprietà di alcuni derivati aromatici ». 341.

Armellini. « Sopra il limite interno della zona asteroidica ». 201.

Artini. « Sulla presenza della nesquehonite nelle cave d'amianto di Franscia in Val Lanterna ». 153.

Artom. « Dati citologici sul tetraploidismo dell'artemia salina di Margherita di Savoia (Puglia) ». 66.

B

Bedarida. « Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite ». 259; 303.

— « Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale ». 485.

Belardinelli. « Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche ». 208.

Benedetti. « Intorno alla morfologia del cervello di Proteus anguineus e sull'esistenza del suo nervo ottico (contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibî). 429.

Boggio. « Sul teorema di reciprocità delle funzioni di Green ». 488.

Bompiani. « Caratterizzazione intrinseca di elementi lineari rispetto al parallelismo ». 168.

— « Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine ». 248.

— « Sulle varietà contenenti più serie di superficie totalmente geodetiche ». 395.

Bompiani. Invia in esame la sua Memoria: « Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici »; 388. È approvata: 477.

Borzì. Annuncio della sua morte. 388.

Brunelli. « Sulla presenza della Meleagrina nel mare libico ». 195.

— « Sulla specie mediterranea del genere Meleagrina ». 230.

Bruni. G. « Analisi termica del sistema zolfo-p.diclorobenzolo ». 158.

— e Pelizzola. « Sulla presenza del manganese nella gomma greggia, e sull'origine della peciosità ». 37.

Bruni A. C. « Osservazioni sul tappeto lucido dei mammiferi domestici ». 285; 335.

Burali-Forti. « Su i numeri reali e le grandezze ». 26.

C

Campetti. « Sul potenziale di risonanza e di ionizzazione nei vapori misti di sodio e di potassio con mercurio ». 261; 360.

Cardani. « Disposizione sperimentale per amplificare l'effetto foto-elettrico Hallwacs-Righi ». 478.

Castelnuovo (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Fantoli, Favaro, Severi* ecc. 389.

— Comunica un invito per il Congresso internazionale di Geologia che si terrà nel Belgio a metà del prossimo anno. 390.

Čech. « Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes ». 491.

Cerulli. Osservazioni sulla Nota del professore Agamennone: « I terremoti mondiali del 1916 e l'osservatorio di Rocca di Papa ». 366.

Chisini. « Le superficie elettriche il cui determinante è un numero composto ». 172; 251; 305.

Ciusa. « Sulla scomposizione dello iodolo ». 468.

Clementi. « Sulla deamidazione enzimatica dell'asparagina in diverse specie animali, e sul significato fisiologico della sua presenza nell'organismo ». 198.

Comanducci - Cortini. « Tylomyces gummiparus n. sp., prototipo di un nuovo genere di Ifomiceti. Caratteri morfologici ». 63; 113.

Comucci. « Sopra un basalto e un calcare a glauconite di Campofiorito presso Palermo ». 220.

— « Sulla composizione chimica della stilbite elbana ». 330.

Corbino. « Azione di un campo magnetico sul flusso di calore ». 7.

— « Sulla teoria dell'effetto Thomson ». 33.

Cotronei. « Sull'influenza della nutrizione con tessuti iodati d'invertebrati sulle larve di Bufo vulgaris ». 149.

— « Nuove ricerche sperimentali sullo sviluppo e sulla metamorfosi degli Anfibî anuri (sui problemi inerenti agli innesti tra larve a litio e larve normali di Bufo vulgaris) ». 434.

— Invia in esame la sua Memoria: « Correlazioni e differenziazioni (ricerche sperimentali sullo sviluppo degli Anfibî) ». 388.

Crocco. « Constatazioni sulle scie aerodinamiche ». 345.

Cusmano. « Sopra la tautomeria della buccocanfora e una trasformazione del mentone in tetraidrocarvone ». 224.

D

D'Ancona. « Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi ». 385; 432.

De Angelis. « Sulla forma cristallina della cusparina $C_{10}H_{12}NO_3$ ». 328.

De Fiore. « Di un solfuro di ferro delle fumarole sottomarine di Vulcano (isole Eolie), formatosi nel 1916 ». 142.

De Stefani. « Silicospongie fossili della Liguria occidentale ». 437.

E

Eisenhart. « Sulle trasformazioni T dei sistemi tripli coniugati di superficie ». 399.

F

Fontebasso. « Divisori di un numero ». 212.

Franchi. « Notizie sopra alcune interessanti formazioni del Supracretaceo del bacino di Fraclea nell'Asia Minore ». 280; 332.

Frassetto. « Delle relazioni fra il peso e la statura dell'uomo adulto ». 501.

G

Gortani. « La serie paleozoica delle Alpi Carniche ». 100.

— « L'Ordoviciano nel Caracorùm orientale ». 183.

— e Vinassa de Regny. « Su l'età e posizione di alcuni scisti delle Alpi ». 140.

Grandi. « Intorno al ciclo biologico dell'Aploneura lentisci Pass. (Hemiptera-Homoptera-Aphidoidea) ». 107.

Grassi. « Razza biologica di Anofele che non punge l'uomo. Un singolarissimo caso di anofelismo e paludismo senza malaria ». 11.

— « L'anofele può propagare la malaria anche direttamente? ». 245.

— « Razze biologiche di anofeli ». 344.

I

Jucci. Invia in esame la sua Memoria: « Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi. I Neotenici »; 388. È approvata; 477.

K

Kahanowicz. « Potere emissivo di alcuni metalli ed ossidi ». 132.

— « Punti di trasformazione di alcuni metalli e leghe, in rapporto al potere emissivo ». 178.

Krall. « Una nuova teoria dello spostamento delle linee spettrali ». 309.

L

La Rosa. » Conducibilità e potere termoelettrico nel campo magnetico, secondo la teoria elettronica ». 57.

Levi-Civita. Fa omaggio di una pubblicazione del seminario matematico della Università di Amburgo. 389.

Lippmann. Annuncio della sua morte. 388.

Longo. « Su la vite selvatica della maremma ». 393.

M

Maderni. « Un nuovo caso di integralità nel problema dei due corpi di massa variabile ». 176.

Maestrini. « Contributo alla conoscenza degli enzimi. VII. Sulla ricomparsa del potere amilolitico della saliva umana, abolito dall'acido cloridico ». 237.

Maggi. « Calcolo della discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento di equilibrio elastico ». 71.

Majorana. « Sull'assorbimento della gravitazione ». 75; 289; 350; 442.

Mammana. « Sulle relazioni fra le misure di un insieme variabile e dell'insieme suo limite ». 355.

Mattirolo. « Contributo alla micologia ipogea della Venezia Subalpina. Osservazioni sopra due Ipogei della Cirenaica e considerazioni intorno ai generi Tirmania e Perferia ». 478.

Mazzetti e Agostini. « Nuovo metodo di dosaggio dell'arsenico negli acciai ». 311.

Mazzucchelli e Rosa. « Solubilità del perclorato ammonico nell'acqua ». 270.

— e Papocchia. « Sopra l'azione dei gas finamente divisi ». 469.

Mezzetti. Ved. *Sborgi*.

Millosevich. È eletto Segretario aggiunto. 504.

Montesano. « Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio ». 447.

Morpurgo. « Conseguenze della nefrectomia nei topi siamesi diseguali ». 13.

N

Nalli. « Sopra un'equazione funzionale ». 85; 122.

— « Sopra alcuni sviluppi in serie ». 295; 405; 451.

Negri. Invia in esame la sua Memoria: « Le colonie vegetali xerotermiche della val di Susa e l'ipotesi 'lacustre' del prof. L. Buscalioni »; 436. È approvata; 477.

P

Panichi. « Su la 'Italite' e la 'Vesbite' di H. S. Washington ». 370.

Paolini. « Carvomentoli levogiri dal fellandrene ». 265; 313.

— « Carvomentoli attivi dalla riduzione del carvone con platino ». 371.

Pápocchia. Ved. *Mazzucchelli.*

Parravano e Agostini. « Influenza di impurezze gassose sulla ricristallizzazione dell'oro e dell'argento ». 481.

Passerini. « L'ossidazione dell'acetil-p-aminoazobenzolo ». 137.

Pelizzola. Ved. *Bruni G.*

Perotti. « Per la conoscenza dei rapporti fra microrganismi e pianta verde ». 233.

Persico. « Realizzazione cinematica del parallelismo superficiale ». 127.

— Ved. *Tieri.*

Perucca. « La misura delle differenze di potenziale vere al contatto, col metodo di Lippmann-Pellat ». 54.

Peyronel. « Un Ifomicete dai conidi mesoendogeni: Menispora microspora n. sp. ». 29.

Picone. « Sulla equazione integrale di Fredholm a nucleo non limitato ». 90.

— « Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi ». 410.

Pieroni. « Azossiammidi e pirroli ». 267.

— « Azossiammidi e diazocomposti ». 374.

— « Di alcuni prodotti di ossidazione del pirrolo ». 316.

Pirotta. Relazione dell'Accademico amministratore intorno al Palazzo, alla Pinacoteca e al Gabinetto delle stampe, approvata nella adunanza del 16 dicembre 1921 dal Consiglio di presidenza che ne deliberava la pubblicazione. 504.

Pontremoli. « Sul luogo fisico delle frangie nella doppia rifrazione accidentale meccanica di un liquido in moto piano permanente ». 216.

— Invia in esame la sua Memoria: « La doppia rifrazione accidentale meccanica nei liquidi »; 388. È approvata; 477.

Pratolongo. « Il punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche-zuccherine ». 320.

— « I punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni ». 419.

Preti. Ved. *Traetta-Mosca.*

Q

Quercigh. « Sulla lublimite di Sassari ». 282.

R

Ravenna. « Sulla costituzione dei dipeptidi dell'acido aspartico ». 424.

Remotti. « Temperatura e migrazioni verticali delle uova di Teleostei ». 146.

Ròiti. Annuncio della sua morte. 477.

Romanese. « Sulle modificazioni morfologiche delle cellule coltivate 'in vitro' al momento della morte ». 337.

Rosa. Ved. *Mazzucchelli.*

Rovereto. « Lo svolgimento dei fenomeni carsici ». 104.

— « Lo svolgimento della morfologia costiera ». 427.

S

Saccardi. « Pirrolo e melanuria ». 185; 227; 273.

Sapuppo. Invia in esame la sua Memoria: « Sul fenomeno dell'assorbimento gravitazionale ». 388.

Sborgi e Mezzetti. « Sui borati. Sistema $(NH_4)_2O - B_2O_2 - H_2O$ (a 0^2 e a 10^2) ». 189.

Sbrana. « Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea ». 256; 300.

— « Sopra certe equazioni integrali considerate dal prof. Tedone ». 492.

Scorza. « Sugli integrali abeliani riducibili ». 359.

Sereni. « Ricerche morfologiche sul preparato centrale di rospo ». 110.

Severini. « Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali ». 92; 129.

Sibirani. « Sulle curve di Bertrand ». 41.

Somigliana « Sulla profondità dei ghiacciai ». 3.

Stefanini. « Sulla costituzione geologica della Cirenaica: II. Terreni oligocenici, miocenici e postpliocenici ». 50.

T

Tanturri. « Un'espressione nuova dei numeri bernoulliani ». 44.

Tenani. « Sul calcolo dell'energia del vento ». 367: 414.

Terracini. « Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre ». 95.

Tieri. « Birifrangenza magnetica dei fumi prodotti da un arco ad elettrodi metallici ». 263.

— e Persico. « L'effetto Hall nel Bismuto solidificato nel campo magnetico ». 464.

Togliatti. « Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno ∞^1 rette ». 22.

Traetta-Mosca e Preti. « Azione dell'Aspergillus glaucus sulla glicerina ». 324.

Tricomi. « Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali ». 402: 456.

— « Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto ». 495.

V

Vinassa De Regny. Ved. *Gortani.*

Viola E. « Il 'Cinematografo parlante' di Emilio Zeppieri ». 416.

Visco. « Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia ». 241; 276; 379.

Vitali. « Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali ». 498.

Volterra (Vicepresidente). Nell'inaugurare l'anno accademico pronuncia alcune parole di saluto per i Colleghi. 388.

— Annuncia la morte del Socio nazionale *Borzì* e del Socio straniero *Lippmann.* 388; del Socio *Roiti.* 477.

— Comunica i ringraziamenti degli Accademici di nuova nomina e aggiunge che il prof. *F. Giolitti* non ha accettato la nomina a Corrispondente. 389.

— Fa menzione di alcune pubblicazioni del Socio straniero *Lacroix* e dei sigg. *Eddington* e *Evans.* 389.

— Presenta i pieghi suggellati inviati dai signori *Barricelli, Bianco, Bruni, Pais* e *Pastori*, e dà comunicazione di un voto dell'Accademia Reale di scienze fisiche e matematiche di Napoli. 390.

Z

Zambonini. « Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoirite-epidoto ». 80; 117; 162; 203.

INDICE PER MATERIE

A

Antropologia. « Delle relazioni fra il peso e la statura nell'uomo adulto ». *F. Frassetto.* 501.

Astronomia. « Sul confronto fra osservazioni visuali e fotografiche delle nebulose ». *G. Abetti.* 47.

— « Sulle determinazioni di differenze di longitudine mediante la telegrafia senza fili ». *Id.* 18.

— « Sopra il limite interno della zona asteroidica ». *G. Armellini.* 201.

— « Sulla massa e il moto proprio del sistema 40 Eridani ». 460.

B

Batteriologia agraria. « Per la conoscenza dei rapporti fra microrganismi e pianta verde ». *R. Perotti.* 233.

Biologia. « Dati citologici sul tetraploidismo dell'Artemia salina di Margherita di Savoja (Puglia) ». *C. Artom.* 66.

— « Sulla presenza della Meleagrina nel mare libico ». *G. Brunelli.* 195.

— « Sulla specie mediterranea del genere Meleagrina ». *Id.* 230.

— « Osservazioni sul tappeto lucido dei mammiferi domestici ». *A. C. Bruni.* 285; 335.

— « Nuove ricerche sperimentali sullo sviluppo e sulla metamorfosi degli Anfibî Anuri (Sui problemi inerenti agli innesti tra larve a litio e larve normali di Bufo vulgaris) ». *G. Cotronei.* 434.

— « Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi ». *U. D'Ancona.* 385; 432.

— « Intorno al ciclo biologico dell'Aploneura lentisci Pass. (Hemiptera-Homoptera-Aphidoidea) ». *G. Grandi.* 107.

— « Razza biologica di Anofele che non punge l'uomo. Un singolarissimo caso di anofelismo e paludismo senza malaria ». *B. Grassi.* 11.

Biologia. « Razze biologiche di anofeli ». *Id.* 344.

— « Temperatura e migrazioni verticali delle uova di Teleostei ». *E. Remotti.* 146.

— « Sulle modificazioni morfologiche delle cellule coltivate ' in vitro ' al momento della morte ». *R. Romanese.* 337.

— « Ricerche morfologiche sul preparato centrale di rospo ». *E. Sereni.* 110.

Botanica. « Tylomyces gummiparus n. sp., prototipo di un nuovo genere di Ifomiceti. Caratteri morfologici ». *J. Comanducci Cortini.* 63; 113.

— « Contributo alla micologia ipogea della Venezia Subalpina. Osservazioni sopra due Ipogei della Cirenaica e considerazioni intorno ai generi Tirmania e Perferia ». *O. Mattirolo.* 478.

— agraria. « Su la vite selvatica della Maremma ». 393.

Bollettino bibliografico. 390; 513.

C

Chimica. « Sopra il comportamento e le proprietà di alcuni derivati aromatici ». *A. Angeli.* 341.

— « Sulla scomposizione dello iodolo ». *R. Ciusa.* 468.

— « Sopra la tautomeria della buccocanfora e una trasformazione del mentone in tetraidrocarvone ». *G. Cusmano.* 224.

— « Nuovo metodo di dosaggio dell'arsenico negli acciai ». *C. Mazzetti* e *P. Agostini.* 311.

— « Carvomentoli levogiri dal fellandrene ». *V. Paolini.* 265; 313.

— « Carvomentoli attivi dalla riduzione del carvone con platino ». *Id.* 371.

— « Influenza di impurezze gassose nella

ricristallizzazione dell'oro e dell'argento ». *N. Parravano* e *P. Agostini*. 481.

CHIMICA. « Aziossiammidi e pirroli ». *A. Pieroni*. 267.

— « Di alcuni prodotti di ossidazione del pirrolo ». *Id.* 316.

— « Azossiammidi e diazocomposti ». *Id.* 374.

— « L'ossidazione dell'acetil-p-aminoazobenzolo ». *M. Passerini*. 137.

— « Il punto di ebullizione delle miscele idroalcooliche-zuccherine ». *U. Pratolongo*. 320.

— « I punti di ebullizione delle miscele idroalcooliche a diverse pressioni ». *Id.* 419.

— « Sulla costituzione dei dipeptidi dell'acido aspartico ». *C. Ravenna*. 424.

— « Sui borati. Sistema $(NH_4)_2O$–B_2O_3–H_2O (a 0° e a 10°) ». *U. Sborgi* e *L. Mezzetti*. 189.

— « Azione dell'Aspergillus glaucus sulla glicerina ». *F. Traetta-Mosca* e *M. Preti*. 324.

CHIMICA APPLICATA. « Sulla presenza del manganese nella gomma greggia, e sull'origine della peciosità ». *G. Bruni* e *C. Pelizzola*. 37.

CHIMICA BIOLOGICA. « Pirrolo e melanuria ». *P. Saccardi*. 185; 227; 273.

CHIMICA FISICA. « Analisi termica del sistema zolfo-p-diclorobenzolo ». *G. Bruni*. 158.

— « Solubilità del perclorato ammonico nell'acqua ». *A. Mazzucchelli* e *A. Rosa*. 270.

CHIMICA FISIOLOGICA. « Sul valore alimentare dei semi dell'Ervum Ervilia ». *S. Visco*. 241; 276; 379.

CHIMICA GENERALE. « Sopra l'azione dei gas finamente divisi ». *A. Mazzucchelli* e *B. Papocchia*. 469.

CRISTALLOGRAFIA. « Sulla forma cristallina della cusparina $C_{10}H_{12}NO_3$ ». *M. De Angelis*. 328.

E

ELEZIONI. Elezione del Socio *F. Millosevich* a Segretario aggiunto. 504.

F

FISICA. « Sul potenziale di risonanza e di ionizzazione nei vapori misti di sodio e di potassio con mercurio ». *A. Campetti*. 261; 360.

— « Disposizione sperimentale per amplificare l'effetto foto-elettrico Hallwacs-Righi ». *P. Cardani*. 478.

— « Azione di un campo magnetico sul flusso di calore ». *O. M. Corbino*. 7.

— « Sulla teoria dell'effetto Thomson ». *Id.* 33.

— « Potere emissivo di alcuni metalli ed ossidi ». *M. Kahanowicz*. 132.

— « Punti di trasformazione di alcuni metalli e leghe, in rapporto al potere emissivo ». *Id.* 178.

— « Conducibilità e potere termoelettrico nel campo magnetico, secondo la teoria elettronica ». *M. La Rosa*. 57.

— « Sull'assorbimento della gravitazione ». *Q. Majorana*. 75; 289; 350; 442.

— « La misura delle differenze di potenziale vere al contatto, col metodo di Lippmann-Pellat ». *E. Perucca*. 54.

— « Sul luogo fisico delle frangie nella doppia rifrazione accidentale meccanica di un liquido in moto piano permanente ». *A. Pontremoli*. 216.

— « Birifrangenza magnetica dei fumi prodotti da un arco ad elettrodi metallici ». *L. Tieri*. 263.

— « L'effetto Hall nel bismuto solidificato nel campo magnetico ». *Id.* e *E. Persico*. 464.

— « Il 'Cinematografo parlante' di Emilio Zeppieri ». *E. Viola*. 416.

FISICA MATEMATICA. « Una nuova teoria dello spostamento delle linee spettrali ». *G. Krall*. 309.

— « Calcolo delle discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento d'equilibrio elastico ». *A. Maggi*. 71.

FISICA TERRESTRE. « I terremoti mondiali del 1916, e l'osservatorio di Rocca di Papa ». *G. Agamennone*. 60; 363.

— « Osservazioni sulla Nota del prof. Agamennone: 'I terremoti mondiali del

1916 e l'Osservatorio di Rocca di Papa' ». *V. Cerulli.* 366.

Fisica terrestre. « Sulla profondità dei ghiacciai ». *C. Somigliana.* 3.

Fisiologia. « Sulla deamidazione enzimatica dell'asparagina in diverse specie animali, e sul significato fisiologico della sua presenza nell'organismo ». *A. Clementi.* 198.

— « Contributo alla conoscenza degli enzimi: VII. Sulla ricomparsa del potere amilolitico della saliva umana, abolito dall'acido cloridrico ». *D. Maestrini.* 237.

— « Conseguenze della nefrectomia nei topi siamesi diseguali ». *B. Morpurgo.* 13.

Fisiologia comparata. « Sull' influenza della nutrizione con tessuti jodati d'invertebrati sulle larve di Bufo vulgaris ». *G. Cotronei.* 149.

G

Geologia. « Notizie sopra alcune interessanti formazioni del Supracretaceo del bacino di Eraclea nell'Asia Minore ». *S. Franchi.* 280; 332.

— « La serie paleozoica delle Alpi Carniche ». *M. Gortani.* 100.

— « Sulla costituzione geologica della Cirenaica. II: Terreni oligocenici, miocenici e postpliocenici ». *G. Stefanini.* 50.

— « Su l'età e posizione di alcuni scisti delle Alpi ». *M. Gortani* e *P. Vinassa de Regny.* 140.

Geomorfologia. « Lo svolgimento dei fenomeni carsici ». *G. Rovereto.* 104.

— « Lo svolgimento della morfologia costiera ». *Id.* 427.

M

Matematica. « Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite ». *A. Bedarida.* 259; 303.

— « Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale ». *Id.* 485.

Matematica. « Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche ». *G. Belardinelli.* 208.

— « Sul teorema di reciprocità delle funzioni di Green ». *T. Boggio.* 488.

— « Caratterizzazione intrinseca di elementi lineari rispetto al parallelismo ». *E. Bompiani.* 168.

— « Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine ». *Id.* 248.

— « Sulle varietà contenenti più serie di superficie totalmente geodetiche ». *Id.* 395.

— « Su i numeri reali e le grandezze «. *C. Burali-Forti.* 26.

— « Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes ». *E. Čech.* 491.

— « Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto ». *O. Chisini.* 172; 251; 305.

— « Sulle trasformazioni T dei sistemi tripli coniugati di superficie ». *L. P. Eisenhart.* 399.

— « Divisori di un numero ». *P. A. Fontebasso.* 212.

— « Sulle relazioni fra le misure di un insieme variabile e dell'insieme suo limite ». *G. Mammana.* 355.

— « Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio ». *D. Montesano.* 447.

— « Sopra un'equazione funzionale ». *P. Nalli.* 85; 122.

— « Sopra alcuni sviluppi in serie ». *Id.* 295; 405; 451.

— « Realizzazione cinematica del parallelismo superficiale ». *E. Persico.* 127.

— « Sulla equazione integrale di Fredholm a nucleo non limitato ». *M. Picone.* 90.

— « Nuova dimostrazione della necessità della condizione di *Jacobi* ». *Id.* 410.

— « Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea ». *F. Sbrana.* 256; 300.

MATEMATICA. « Sopra certe equazioni integrali considerate dal prof. Tedone ». *F. Sbrana.* 492.

— « Sugli integrali abeliani riducibili ». *G. Scorza.* 359.

— « Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali ». *C. Severini.* 92; 129.

— « Sulle curve di Bertrand ». *F. Sibirani.* 41.

— « Un' espressione nuova dei numeri bernoulliani ». *A. Tanturri.* 44.

— « Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre ». *A. Terracini.* 95.

— « Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno ∞^2 rette ». *E. G. Togliatti.* 22.

— « Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali ». *F. Tricomi.* 402; 456.

— « Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto ». *Id.* 495.

— « Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali ». *G. Vitali.* 498.

MECCANICA. « Constatazioni sulle scìe aerodinamiche ». *G. A. Crocco.* 345.

— « Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile ». *C. Maderni.* 176.

— « Sul calcolo dell'energia del vento ». *M. Tenani.* 367; 414.

MICOLOGIA. « Un Ifomicete dai conidi mesoendogeni: Menispora microspora n. sp. ». *B. Peyronel.* 29.

MINERALOGIA. « Indici di rifrazione della cancrinite, della zuñyite e della orangite ». *M. Albis.* 472.

— Sulla presenza della nesquehonite nelle cave d'amianto di Franscia in Val Lanterna ». *E. Artini.* 153.

— « Sulla composizione chimica della stilbite elbana ». *P. Comucci.* 330.

— « Sulla tublinite di Sassari ». *E. Quercigh.* 282.

— « Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto ». *F. Zambonini.* 80; 117; 162; 203.

MORFOLOGIA. « Intorno alla morfologia del cervello di Proteus anguineus e sull'esistenza del suo nervo ottico. (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibî) ». *E. Benedetti.* 429.

N

NECROLOGIE. Annuncio della morte del Socio nazionale *Borzì*, 388; del Socio straniero *Lippmann*, 388; del Socio nazionale *Roiti*, 477.

P

PALEONTOLOGIA. Silicospongie fossili della Liguria occidentale ». *C. De Stefani.* 437.

— « L'Ordoviciano nel Caracorùm orientale ». *M. Gortani.* 183.

PARASSITOLOGIA. « L'anofele può propagare la malaria anche direttamente? ». *B. Grassi.* 245.

PETROGRAFIA. « Sopra un basalto e un calcare a glauconite di Campofiorito presso Palermo ». *P. Comucci.* 220.

— « Su la 'Italite' e la 'Vesbite' di H. S. Washington ». *U. Panichi.* 370.

R

RELAZIONE dell' Accademico amministratore, intorno al Palazzo, alla Pinacoteca e al Gabinetto delle stampe, approvata nella adunanza del 16 dicembre 1921 dal Consiglio di presidenza che ne deliberava la pubblicazione. *R. Pirotta.* 504.

V

VULCANOLOGIA. « Di un solfuro di ferro delle fumarole sottomarine di Vulcano (Isole Eolie), formatosi nel 1916 ». *O. De Fiore.* 142.